

CONTRIBUTO ALLA TEORIA E PRATICA DELLA FORMAZIONE DEL MODELLO OTTICO

Proposta di un calcolatore per determinare i coefficienti di correzione.

DOTT. ING. ERMENEGILDO SANTONI

RICHIAMO AL METODO DI V. GRUBER.

Riteniamo opportuno in primo tempo richiamare brevemente il metodo suggerito da V. Gruber, metodo che oltre essere ancora molto usato in pratica, è alla base delle ulteriori ricerche in materia.

Si considerino due fotogrammi aerei eseguiti ad altezza di volo quasi uguale e con l'asse della camera pressoché verticale.

Posto che essi (I-II fig. 1) siano correttamente piazzati in un restitutore,

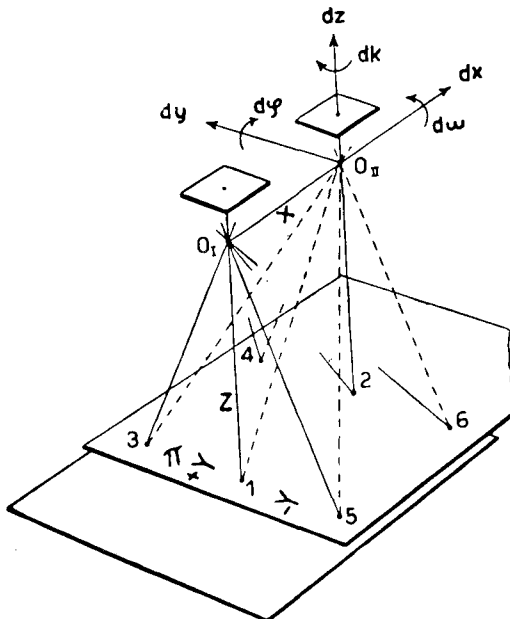


FIG. 1.

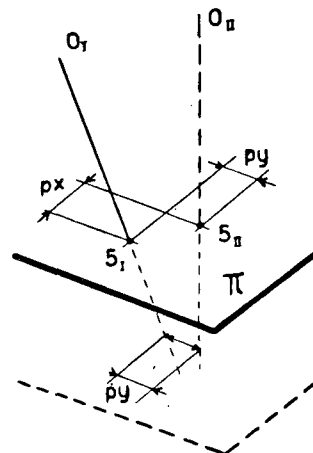


FIG. 2.

prendiamo in esame nel modello i punti nadirali 1-2 ed i laterali 3-5, 4-6 posti rispettivamente ad eguali distanze (y) da 1-2. Il terreno, pianeggiante, sia assimilabile al piano di proiezione π . Siano Z e X rispettivamente l'altezza di volo

e la base. I punti considerati (1 a 6) rappresentano pertanto i punti di intersezione spaziali delle coppie di visuali omologhe ($O_I - 1$; $O_{II} - 1$; $O_I - 2$ $O_{II} - 2$ etc) uscenti dai fotogrammi I e II .

Supponiamo ora di dare al centro di proiezione O_{II} piccoli spostamenti traslatori $dx_{II} - dy_{II} - dz_{II}$ ed al fotogramma relativo piccole rotazioni $dk_{II} - d\varphi_{II} - d\omega_{II}$ - secondo gli assi $x - y - z$ indicati in figura 1).

Le anzidette coppie di visuali risulteranno ora in generale sghembe. Ad esempio il punto di intersezione con π della visuale uscente da O_{II} relativa a 5 passerà in 5_{II} (vedi fig. 2 a scala maggiore).

Lo spostamento parallattico $5_I - 5_{II}$ potrà considerarsi scomposto in ϕx e ϕy .

Variando opportunamente l'altezza del piano π (nel caso della figura abbassandolo) si può render nulla la componente ϕx mettendo in evidenza la ϕy che chiamiamo *parallasse di altezza* con nome improprio derivato dalla fotogrammetria terrestre.

Poiché $X Y Z$ sono le coordinate del punto 5 rispetto al vertice O_{II} il valore di ϕy_5 è dato dalla formula:

$$\phi y_5 = dy_{II} + dz_{II} \frac{Y}{Z} + dk_{II} X + d\varphi_{II} X \frac{Y}{Z} + d\omega_{II} Z \left(1 + \frac{Y^2}{Z^2}\right) \quad (1)$$

Questa formula, dando ad X ed Y i propri segni, è valevole per qualsiasi punto. In essa non compare dx poiché lo spostamento dx non genera parallasse ϕy ma solo variazione di distanza del piano π di intersezione e quindi variazione di grandezza del modello. Si utilizza infatti la dx per la messa a scala.

Il primo termine, che si identifica con dy , è uguale per tutti i punti del modello mentre il secondo termine è legato a dz dal rapporto $\frac{Y}{Z}$. Esso è dunque

uguale in valore assoluto per i punti 3-4, 5-6, solo che per 5-6 è di segno negativo (cambiando segno Y).

Il terzo termine, funzione di dk_{II} , è nullo per i punti 4-2-6 (dove la X è nulla) ed uguale in segno e valore assoluto per i punti 1-3-5 (aventi uguale X).

Il quarto termine, legato a $d\varphi_{II}$, è funzione di X ed ancora del rapporto costante $\frac{Y}{Z}$. Esso è dunque nullo per 2-4-6 (essendo nulli X) e per 1 (essendo nullo Y). Inoltre esso è uguale in valore assoluto per i punti 3-5 ma di segno contrario a causa del segno di Y . Infine l'ultimo termine è legato a $d\omega_{II}$ da un coefficiente un pò più complesso. Il suo valore è però uguale in valore assoluto e segno per i quattro punti 3-4, 5-6 in quanto Y vi compare al quadrato.

Il caso pratico è esattamente il contrario della ipotesi fatta poiché anziché partire da un modello privo di parallassi, introduciamo nel restitutore i fotogrammi I, II in posizione reciproca approssimata e pertanto partiamo da

Prima di procedere oltre, osserviamo nella figura (3) la genesi delle parallassi da $d\varphi$ che chiameremo $\phi\varphi$. La rotazione $d\varphi$ del fotogramma O_{II} attorno all'asse y è sostituita dalla rotazione $d\varphi$ attorno all'asse 4-6 supponendo che la prima rotazione sia combinata ad una opportuna traslazione dx che sappiamo di effetto nullo sulle ϕy . Si è messa così in evidenza la formazione delle parallassi $\phi\varphi_3$, $\phi\varphi_5$ di segno contrario il cui valore, eguale, è dato dal quarto termine della (1)

$$\phi\varphi_3 = + d\varphi_{II} X \frac{Y}{Z} ; \phi\varphi_5 = - d\varphi_{II} X \frac{Y}{Z} \quad (2)$$

Nella fig. 4 si osservi l'effetto della rotazione $d\omega$ attorno all'asse x combinata con uno spostamento $dy = Zd\omega$ atto ad annullare la conseguente parallasse nel punto nadirale 1. Anche qui si può considerare che la rotazione $d\omega$ sia avvenuta direttamente attorno alla retta 1-2 mettendo in evidenza le parallassi residue $\phi\omega_3$, $\phi\omega_5$ che risultano di eguale entità e segno.

Il valore di queste parallassi è dato dall'ultimo termine della (1) ove si tenga presente di avervi sottratto la parte $Zd\omega = dy$ poiché si è annullata con dy la parallasse nel punto 1. Si avrà così:

$$\phi\omega_3 = \phi\omega_5 = d\omega_{II} Z \frac{Y^2}{Z^2} \quad (3)$$

Potremo ora scrivere:

$$\phi y_3 = \phi\varphi_3 - \phi\omega_3 \quad (4)$$

$$\phi y_5 = - \phi\varphi_5 - \phi\omega_5$$

dalle quali essendo i termini $\phi\varphi$ e $\phi\omega$ rispettivamente eguali in valore assoluto, otterremo per somma e sottrazione:

$$\phi y_3 + \phi y_5 = - 2 \phi\omega ; \quad ; \quad \phi y_3 - \phi y_5 = 2\phi\varphi$$

Introducendo i valori ottenuti nelle 2 e 3 avremo:

$$d\varphi_{II} = \frac{\phi y_3 - \phi y_5}{2 X \frac{Y}{Z}} \quad (5) \quad d\omega_{II} = - \frac{\phi y_3 + \phi y_5}{2 Z \frac{Y^2}{Z^2}} \quad (5 \text{ bis})$$

In quest'ultimo artificio (somma e sottrazione) consiste precisamente il metodo suggerito da V. Gruber. Altri accorgimenti di carattere puramente operativo, che non riportiamo per brevità, sono suggeriti per facilitare la introdu-

zione delle correzioni $d\varphi$ e $d\omega$ nel restitutore. Come si è già detto in luogo della correzione dZ_{II} si preferisce dare una correzione $d\varphi_I$ che può essere calcolata analogamente alla $d\varphi_{II}$, con ρy_4 e ρy_6 od anche effettuata praticamente osservando visualmente l'effetto sui punti 4-6. Naturalmente introducendo nella (5_{bis}) ρy_4 e ρy_6 avremo ancora un $d\omega_I$ da mediare con $d\omega_{II}$.

Ottenuto così l'orientamento relativo dei fotogrammi, si può passare all'orientamento assoluto sui punti noti al terreno, come di consueto.

NUOVE PROPOSTE.

Se nella fig. 4 supponiamo che la linea punteggiata rappresenti l'andamento altimetrico del terreno, osserviamo subito che l'avvicinarsi o l'allontanarsi di esso dal rispettivo punto di cerniera m determina una sensibilissima variazione della parallasse $\rho\omega$ fino a renderla nulla se la sezione del terreno passa per il punto r e per i punti di cerniera m , dando luogo al cosiddetto cilindro critico, causa di indeterminatezza della ω .

Ma senza giungere a tale limite, sono sufficienti variazioni altimetriche modeste specialmente per camere di campi modesti, perché i due valori $\rho\omega_3$, $\rho\omega_5$ risultino molto differenti fra loro. Con ciò viene a mancare la validità dell'artificio di sottrarre e sommare membro a membro le (4).

Alcuni interessanti procedimenti sono stati proposti da eminenti cultori per risolvere il problema nel caso più generale.

Poiché essi sono noti agli studiosi e agli operatori non si ritiene opportuno qui trattarne. Ciò porterebbe a confronti che esulano dal nostro scopo. Con il presente studio intendiamo portare il nostro contributo alla soluzione pratica del problema lasciando ad altri il giudizio comparativo.

Dopo avere seguito il procedimento del Gruber, nel caso di altezza di volo costante, sino all'annullamento delle parallasse nei punti 2 ed 1 con dy_{II} e dk_{II} rileveremo le parallasse residue nei punti 3 e 5 formate ancora dalle:

$$\begin{aligned} \rho y_3 &= \rho\varphi_3 - \rho\omega_3 \\ \rho y_5 &= -\rho\varphi_5 - \rho\omega_5 \end{aligned} \quad (6) = (4)$$

Ove si prendano in esame punti del modello 3-4, 5-6 che corrispondano sui fotogrammi a punti immagine distanti dall'asse (parallelo ad X) di una stessa lunghezza (a), avremo reso costante il rapporto $\frac{a}{f} = \frac{Y}{Z} = C$ indipendentemente dalla quota del punto considerato. Questo accorgimento fu già proposto dallo stesso V. Grüber con il suo cartoncino provvisto di fori da sovrapporre al fotogramma. La scelta dei punti stessi (3-4, 5-6) in piani normali alla base e passanti per i vertici O_I , O_{II} rende di per sè eguali le X di detti punti sul modello,

Consideriamo per primi i punti 1, 3, 5. I coefficienti $\phi\varphi_3$, $\phi\varphi_5$ risultano pertanto eguali fra loro in valore assoluto anche per terreni montuosi.

Avremo quindi:

$$\phi\varphi_3 = -\phi\varphi_5 = d\varphi_{II} \cdot X \cdot C \quad (7)$$

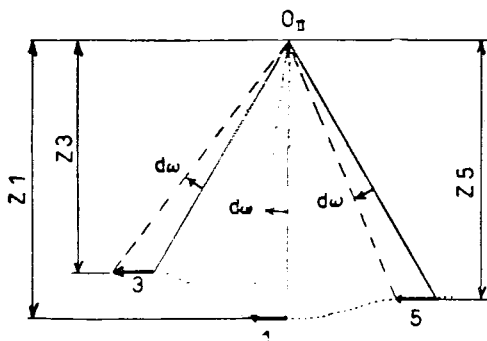


FIG. 5.

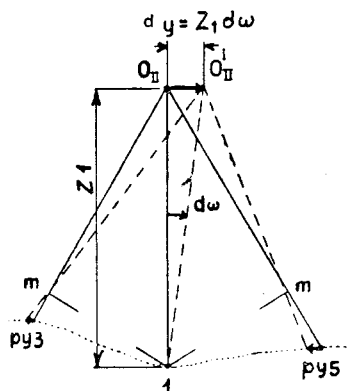


FIG. 6.

Nei riguardi del termine $\phi\omega$ prendiamo in esame nella fig. 5 gli spostamenti paralleltici totali (ϕ') per i punti 3, 1, 5 situati a differente altitudine.

Essi sono dati dall'ultimo termine della (1) nel quale ponendo

$$1 + \frac{Y^2}{Z^2} = C_2 \text{ avremo:}$$

$$\phi'_{\omega_3} = Z_3 d\omega C_2$$

$$\phi'_{\omega_1} = Z_1 d\omega$$

$$\phi'_{\omega_5} = Z_5 d\omega C_2$$

Ma poiché prima di misurare le parallasse in 3 e 5 annulliamo con dy_{II} la parallasse in 1, le parallasse residue nei punti 3 e 5 dipendenti da $d\omega$, (che chiameremo $\phi\omega_3$ e $\phi\omega_5$) saranno:

$$\phi_{\omega_3} = d\omega (Z_3 C_2 - Z_1)$$

$$\phi_{\omega_5} = d\omega (Z_5 C_2 - Z_1)$$

$$\text{Posto } Z_3 C_2 - Z_1 = K_3 \quad \text{e} \quad Z_5 C_2 - Z_1 = K_5 \quad (9)$$

ed in genere:

$$Z_n C_2 - Z_1 = K_n$$

avremo:

$$\phi_{\omega_3} = d\omega K_3$$

$$\phi_{\omega_5} = d\omega K_5$$

(10)

In effetto noi misuriamo nei punti 3 e 5 le parallasse residue totali (ϕy) comprendenti cioè simultaneamente le $\phi\varphi$ e $\phi\omega$ come indicato nella (6).

Ma poiché, come risulta dalla (7) i primi due termini sono eguali in valore assoluto, sarà lecito eliminarli per somma ottenendo:

$$p\gamma_3 + p\gamma_5 = - (p\omega_3 + p\omega_5) \quad (11)$$

d'altra parte dalla (10) si ha :

$$p\omega_3 + p\omega_5 = d\omega K_3 + d\omega k_5$$

da cui

$$d\omega = - \frac{p\omega_3 + p\omega_5}{K_3 + K_5} \quad (12)$$

È questa la formula definitiva che, una volta formati i coefficienti K_3 K_5 , può darci il valore $d\omega$ che potremmo subito introdurre nel restitutore.

Così facendo, si dovrebbero di nuovo annullare le parallassi in 1 e 2 nel modo solito ($d\gamma_{II}$, dK_{II}). Successivamente si potrebbero annullare visualmente le parallassi residue in 3 e 5 con $d\varphi_{II}$ ed in 4 e 6 con $d\varphi_I$.

È da notare che la ultima rettifica dK sarebbe ormai libera dall'influenza di $d\omega$. Ma è anche possibile ottenere per via di calcolo il valore $d\varphi_{II}$. Infatti dalle

$$(10) \text{ avremo } \frac{p\omega_3}{p\omega_5} = \frac{K_3}{K_5}$$

da cui: $p\omega_3 = p\omega_5 \frac{K_3}{K_5}$; ponendo $\frac{K_5}{K_3} = C\varphi$ avremo dalla (6)

$$\begin{aligned} C\varphi \cdot p\gamma_3 &= C\varphi p\varphi_3 - p\omega_5 \\ p\gamma_5 &= - p\varphi_5 - p\omega_5 \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro:

$$C\varphi \cdot p\gamma_3 - p\gamma_5 = p\varphi (1 + C\varphi)$$

da cui

$$p\varphi = \frac{C\varphi \cdot p\gamma_3 - p\gamma_5}{1 + C\varphi} \quad (13)$$

Ed infine dalle (7) e (13)

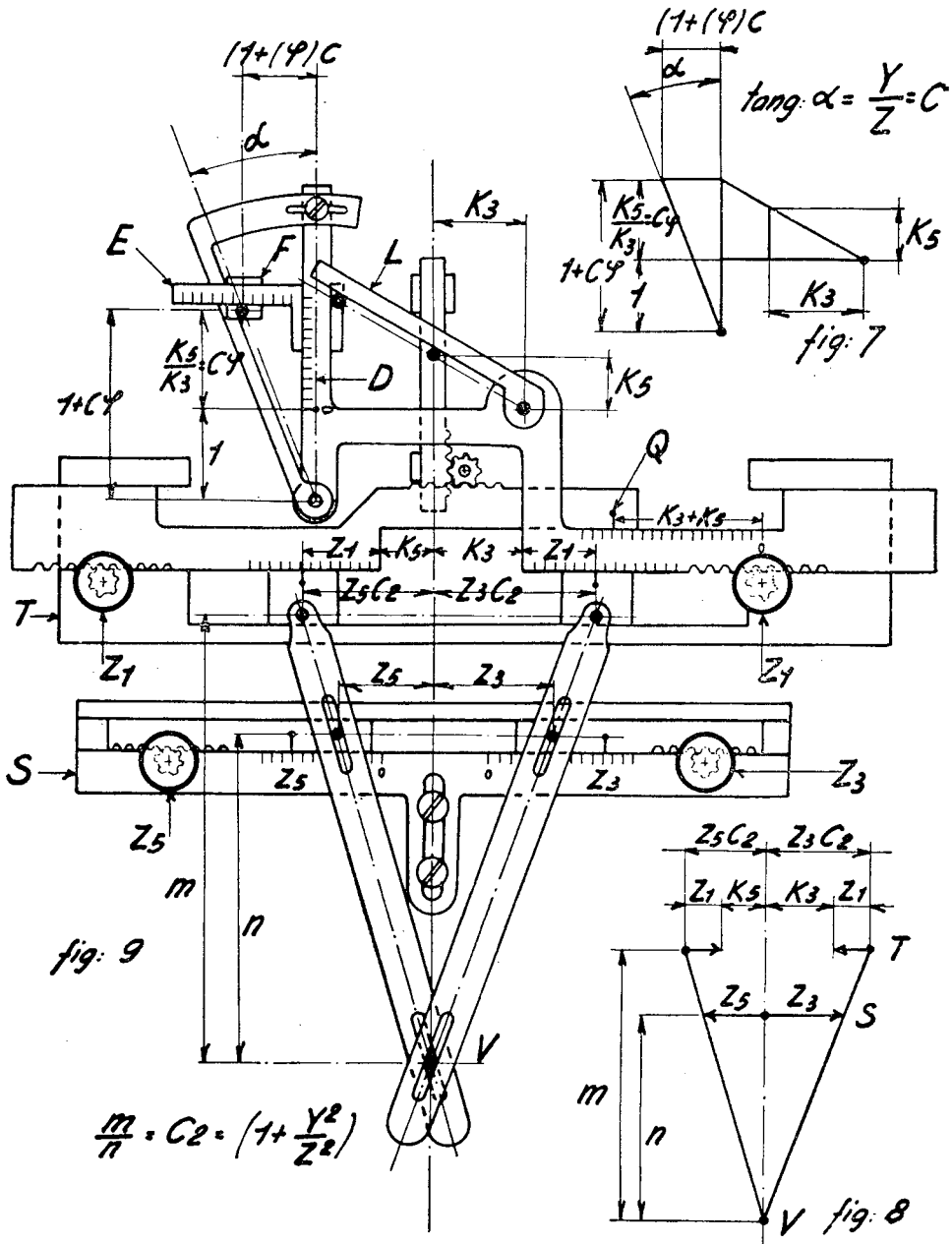
$$d\varphi_{II} = \frac{C\varphi \cdot p\gamma_3 - p\gamma_5}{(1 + C\varphi) CX} \quad (14)$$

Analogamente si avrà :

$$d\varphi_I = - \frac{C\varphi \cdot p\gamma_4 - p\gamma_6}{(1 + C\varphi) CX} \quad \text{dove } C\varphi = \frac{K_6}{K_4} \quad (14 \text{ bis})$$

Nel caso di dover effettuare la connessione di fotogrammi successivi, il φ_I deve restare invariato per cui invece di $d\varphi_I$ dovrà essere introdotto un dz_{II} il cui valore è dato dalla

$$dz_{II} = X d\varphi_I = - \frac{C\varphi \cdot \rho y_4 - \rho y_6}{(1 + C\varphi) C} \quad (15)$$



Ma poichè la stessa dz_{II} ha influito anche sul valore delle parallassi misurate sui punti 3-5, con un contributo che chiameremo ϕz_{II} dovremo togliere da esse il valore ϕz_{II} prima di introdurre nella (14). Il valore di ϕz_{II} , dato dal secondo termine dell (1), avendo fatto $\frac{Y}{Z} = C$, sarà:

$$\phi z_{II} = dz_{II} C = - \frac{C\varphi \phi y_4 - \phi y_6}{(1 + C\varphi)} \quad (16)$$

Tenuto conto di ciò, le due formule (12) (14) sono applicabili anche nel caso che vengano presi in esame più terne di punti disposti in piani ortogonali alla base, aventi perciò differenti valori di X .

In tal caso avremo:

$$d\omega_m = \frac{\sum d\omega}{n} \quad ; \quad d\varphi_m = \frac{\sum X d\varphi}{\sum X}$$

Per ottenere rapidamente i valori dei coefficienti, del tipo $(K_s + K_3) C\varphi$ e $(1 + C\varphi) C$ si prospetta la possibilità di impiegare un dispositivo calcolatore di cui le figure 7 e 8 rappresentano lo schema geometrico e la 9 una forma di esecuzione a titolo dimostrativo. Il funzionamento è il seguente.

Dal tipo di camera impiegato si stabilisce il rapporto costante

$$\frac{Y}{Z} = C = \text{tang. } \alpha$$

Si regolano una volta per sempre l'angolo α e la posizione della guida S in modo che risulti $\frac{m}{n} = (1 + \frac{Y^2}{Z^2}) = C_2$

L'apparecchio è così pronto per l'uso. Si misurano al restitutore (scala delle distanze) i valori Z_r, Z_3, Z_5 etc. Si introducono con i bottoni Z_3, Z_5 i rispettivi valori sulle scale. Il valore Z_r si introduce doppiamente mediantei due bottoni $Z1$. Si possono ora leggere i coefficienti $(K_s + K_3)$ sulla scala Q ; $C\varphi$ sulla scala D ; $(1 + C\varphi) C$ sulla scala E .

Ove sia ritenuto conveniente le scale Q ed E possono dare i valori

$$\frac{1}{(K_s + K_3)} \quad \text{e} \quad \frac{1}{1 + C\varphi} C$$