

I. — RESTITUZIONE PROSPETTICA

1. *Generalità.* — Se il grado di speditezza del rilevamento lo consente, si prescinde dalle due deformazioni sopra illustrate e si effettua la restituzione prospettica, valendosi della proprietà del fotogramma nadirale di contenere in sé ogni curva di livello rappresentata ad una scala costante. In tal caso ci proponiamo quindi semplicemente di individuarle e tracciarle, ad esempio, su un fotogramma; a questo scopo ci varremo dello stereogramma formato da esso e dal fotogramma che lo precede (o lo segue), per i quali supporremo verificata *una seconda ipotesi*, che essi siano *complanari*. Come è noto la porzione di terreno comune a due fotogrammi consecutivi della catena aerea è normalmente pari a circa i due terzi del loro formato; è su questa parte di uno dei due fotogrammi dello stereogramma che ci proponiamo tracciare le curve di livello. Le chiameremo « *prospettiche* » nel loro complesso, perché proiettate da un centro proprio, per distinguerle da quelle « *planimetriche* » nel loro complesso, perché proiettate dal punto improprio nella direzione della verticale; è evidente che quanto più il detto centro si approssima al detto punto improprio — ossia quanto più è grande la quota relativa della presa aerea — e quanto minori sono i dislivelli del terreno, tanto più le curve prospettiche si approssimano a quelle planimetriche, e le loro diverse scale risultano contenute in una gamma più ristretta di valori, potendosene assumere il valore medio quale scala approssimata del rilevamento.

2. *Descrizione di una curva di livello prospettica di quota indeterminata.* — Si vogliono individuare, e unire con una linea, tutti i punti dello stereogramma (F_{n-1} , F_n) aventi la quota Q_P di un punto P assegnato ad arbitrio, nelle ipotesi già fatte che ripetiamo:

- 1) rigorosa *verticalità* degli assi di presa dei fotogrammi;
- 2) che i punti di presa O_{n-1} , O_n di fotogrammi consecutivi abbiano *uguale quota assoluta* H .

In forza di tali ipotesi i fotogrammi sono complanari e orizzontali, anche se comunque orientati nel loro piano comune (fig. 2). Assumiamo su ognuno di essi un sistema di coordinate piane ortogonali aventi l'origine nel rispettivo punto principale (N'_{n-1} , N'_n), che chiameremo più genericamente « centro », e l'asse x nella direzione congiungente i due centri stessi, orientata da N'_{n-1} a N'_n ; indichiamo con f la distanza principale della presa, con b la base O_{n-1} , O_n , con Z_P il dislivello fra il punto generico P e i punti di presa O_{n-1} , O_P , con ϕ la parallasse, ossia la differenza delle ascisse, nel sistema scelto di assi, delle immagini P_{n-1} , P_n del punto P sui fotogrammi. Da note formule di stereofotogrammetria terrestre, e comunque da semplici relazioni fra i triangoli

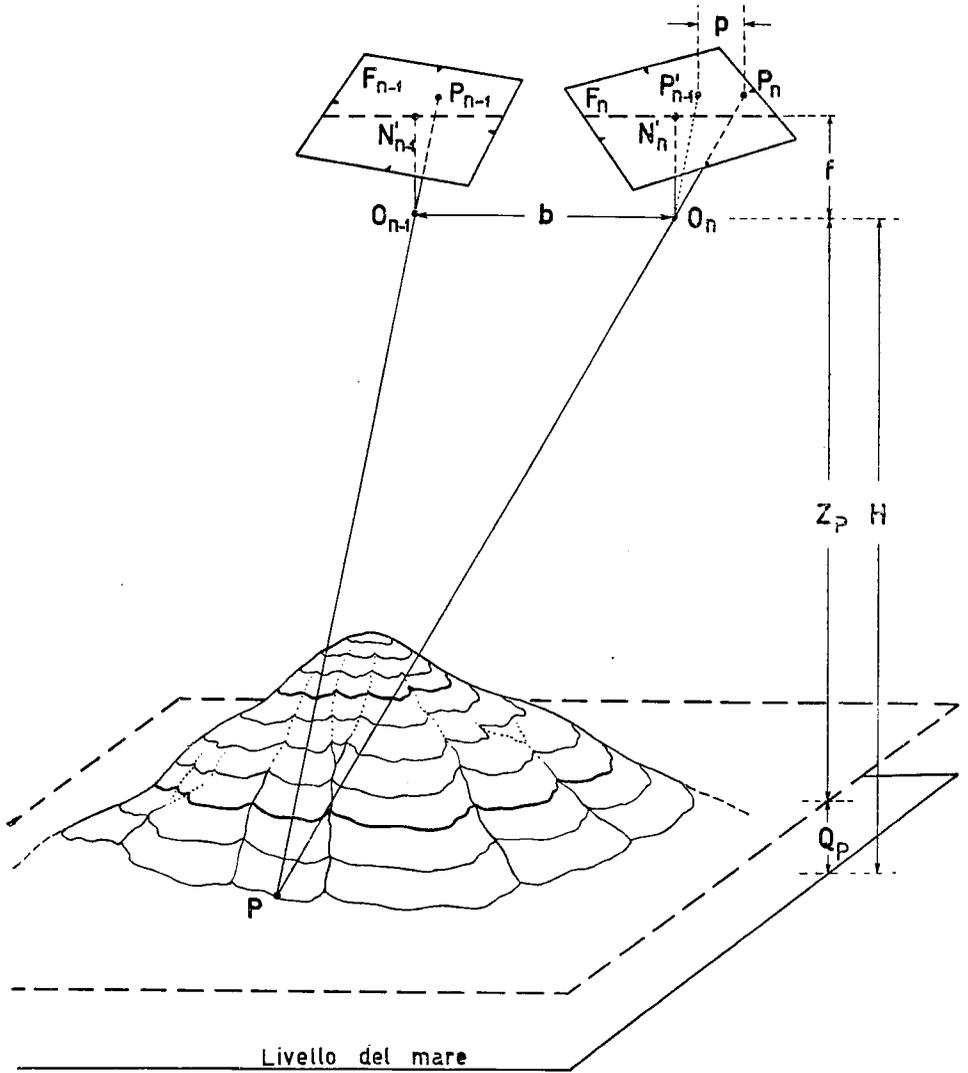


FIG. 2.

simili $O_{n-1} O_n P$ e $P_{n-1} P_n O_n$ e le loro proiezioni su un piano verticale, sappiamo che

$$Z_P = f \frac{b}{p} ;$$

ed essendo

$$Q_P = H - Z_P ,$$

otteniamo

$$\boxed{Q_P = H - f \frac{b}{p}} . \quad (I)$$

Da questa relazione, considerando che H, f, b sono costanti in ogni stereogramma, si deduce che Q^0 è funzione soltanto di ϕ ; quindi se ϕ è costante lo è anche Q_P ; ma

$$Q_P = \text{costante}$$

è l'equazione del piano orizzontale di quota Q_P .

Si può dunque asserire che *tutti i punti aventi la stessa quota presentano uguale parallasse nello stereogramma*. Si noti inoltre che, nelle ipotesi fatte, *le immagini di uno stesso punto del terreno hanno uguale ordinata sui due fotogrammi*.

Da queste considerazioni già si deduce la maniera di conseguire quanto ci eravamo proposto, ossia che per tracciare sul fotogramma F^0 la curva di

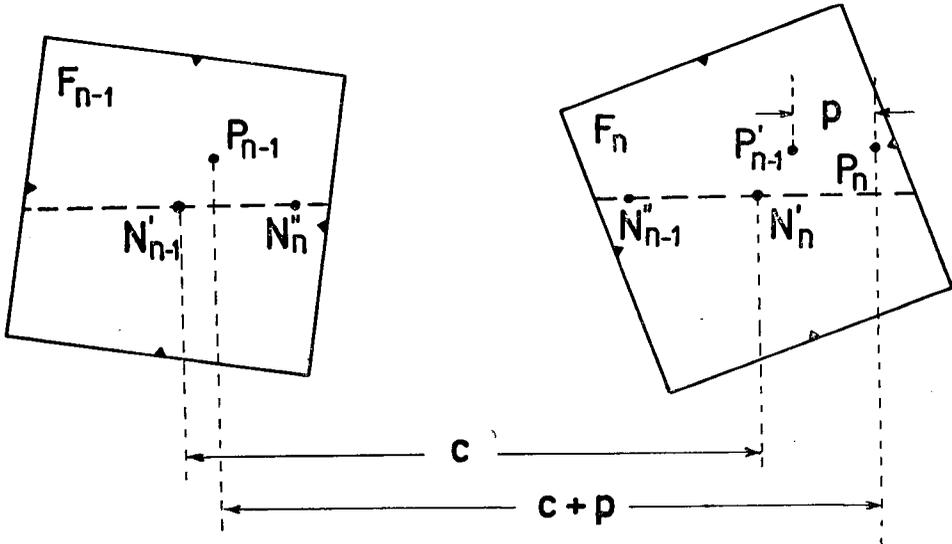


FIG. 3.

livello passante per il punto generico P basta congiungere con una linea tutti i punti che presentano nello stereogramma (F_{n-1}, F_n) la parallasse ϕ , costante e uguale a quella relativa al punto P .

Praticamente si potrà operare nella seguente forma (fig. 3):

1) si disporranno i fotogrammi su uno stesso piano con i centri N'_{n-1} e N'_n a distanza arbitraria c ;

2) si orienteranno reciprocamente nell'assetto corrispondente alla presa, per il che, nelle ipotesi fatte, sarà sufficiente che la congiungente i centri N'_{n-1} e N'_n passi su ogni fotogramma per la immagine (N''_{n-1} e N''_n) del centro dell'altro;

3) considerate le immagini P_{n-1} , P_n del punto P sui rispettivi fotogrammi, e misurate la loro distanza

$$P_{n-1} P_n = c + \phi,$$

hanno la stessa quota Q_P di P quei punti, le cui immagini si trovano alla medesima distanza $c + \phi$.

Per determinarli con continuità ed in forma pratica, tale distanza può essere materializzata come quella esistente, ad esempio, fra due reticoli, che chiamiamo « *marche* », vincolati ad una sbarra. Questa verrà condotta sui fotogrammi in modo da mantenere costantemente collimate le due marche su immagini corrispondenti al medesimo punto del terreno;

4) in tale operazione la sbarra subirà solo *traslazioni*, ossia si manterrà sempre parallela a sé stessa per avere le dette immagini la medesima ordinata, come già abbiamo osservato;

5) se osserveremo con l'occhio sinistro la marca che esplora il fotogramma F_{n-1} e con quello destro l'altra marca, si otterrà, nelle condizioni di collimazione sopra descritte, la sensazione *stereoscopica* di contatto fra la marca, unica apparente, spaziale e il cosiddetto *modello ottico* dello stereogramma;

6) la punta di una matita che coincidesse con una delle due marche descriverebbe sul fotogramma rispettivo la curva di livello; collegandola invece alla sbarra con un dispositivo e in una posizione qualsiasi, purché ad essa *rigidamente connessa*, traccerà la curva di livello su un foglio opportunamente disposto;

7) variando la distanza $c + \phi$ *descriveremo quante si vogliano curve di livello* del terreno; notiamo che, anche se di esse non si conoscesse la quota – la cui determinazione non abbiamo ancora trattato – purtuttavia esse già *descrivono il terreno nella sua forma*.

Con quanto abbiamo ora dedotto, abbiamo delineato una parte dello schema geometrico e meccanico cui soddisfano gli strumenti in questione e in particolare lo Stereografometro Nistri (fig. 4), quella che riguarda la delineazione delle curve di livello prospettiche di uno stereogramma nadirale, schema che presenta i seguenti requisiti:

1) i fotogrammi, disposti su un medesimo piano, devono poter *ruotare* intorno al proprio centro (*orientamento sulla retta dei centri*; vedi punti 1) e 2) precedenti);

2) un sistema rigido formato da due marche di collimazione ed una matita tracciante devono poter subire *traslazioni* parallele alla congiungente i due centri N'_{n-1} , N'_n (*tracciamento delle curve di livello*; vedi punti 3), 4), 6) precedenti);

3) le marche devono essere osservate una per occhio (*osservazione stereoscopica*; vedi punto 5) precedente;

4) una marca deve poter subire la traslazione nella direzione dell'altra (*variazioni della parallasse orizzontale p*) per passare da una curva di livello ad un'altra; vedi punto 7) precedente;

5) siccome il verificarsi delle ipotesi alla base del metodo è sempre imperfetto, il che provoca che la congiungente le immagini corrispondenti sui due fotogrammi sia parallela alla retta dei centri solo imperfettamente, una delle due marche deve poter subire la traslazione perpendicolare a detta retta per ovviare al detto difetto di parallelismo (*eliminazione della parallasse verticale*).

3. *Descrizione di una curva di livello prospettica di quota assegnata e determinazione della quota di un punto qualsiasi.*

A) *Dati solamente la distanza principale f la quota assoluta H e la base b della presa*; essi sono sufficienti a calcolare le quote Q^o con la formola (1), quando si misuri p . Viceversa, dalla formola (1) si ricava

$$\boxed{p = \frac{fb}{H - Q_p}}, \quad (2)$$

che, assegnata la quota Q_p della curva di livello da descrivere, permette di calcolare la parallasse p che le corrisponde, e quindi la distanza $c + p$ da imporre fra le due marche.

Praticamente, imposta tale distanza e ricercata la coincidenza fra marca spaziale e modello ottico del terreno, si descriverà la curva di livello inducendo alla marca i movimenti nel piano orizzontale da essa definito, mantenendo il contatto fra di essa e la superficie del modello ottico del terreno.

È ovvio che la conoscenza diretta di H e di b è inevitabilmente affetta da errori sensibili, che saranno trattati più avanti parlando della loro determinazione; per evitare le conseguenze temibili da tali errori, e quelle dell'imperfetto verificarsi delle due ipotesi alla base del metodo, che in questo caso A) sono anche esse notevoli, conviene usufruire di elementi noti sul terreno, e non solamente di quelli intrinseci della presa.

B) *Dati f , H e punti di quota nota*. Se conosciamo la quota di almeno un punto del terreno riconosciuto sui fotogrammi, conviene effettuare la determinazione del *dislivello* di qualsiasi altro punto da quello dato; per questo si impiegherà la *differenza* fra la parallasse del punto incognito e quella del punto noto. Se i punti noti fossero più di uno, disporremmo di più provenienze per la determinazione, e quindi avremmo anche la nozione dell'attendibilità del risultato.

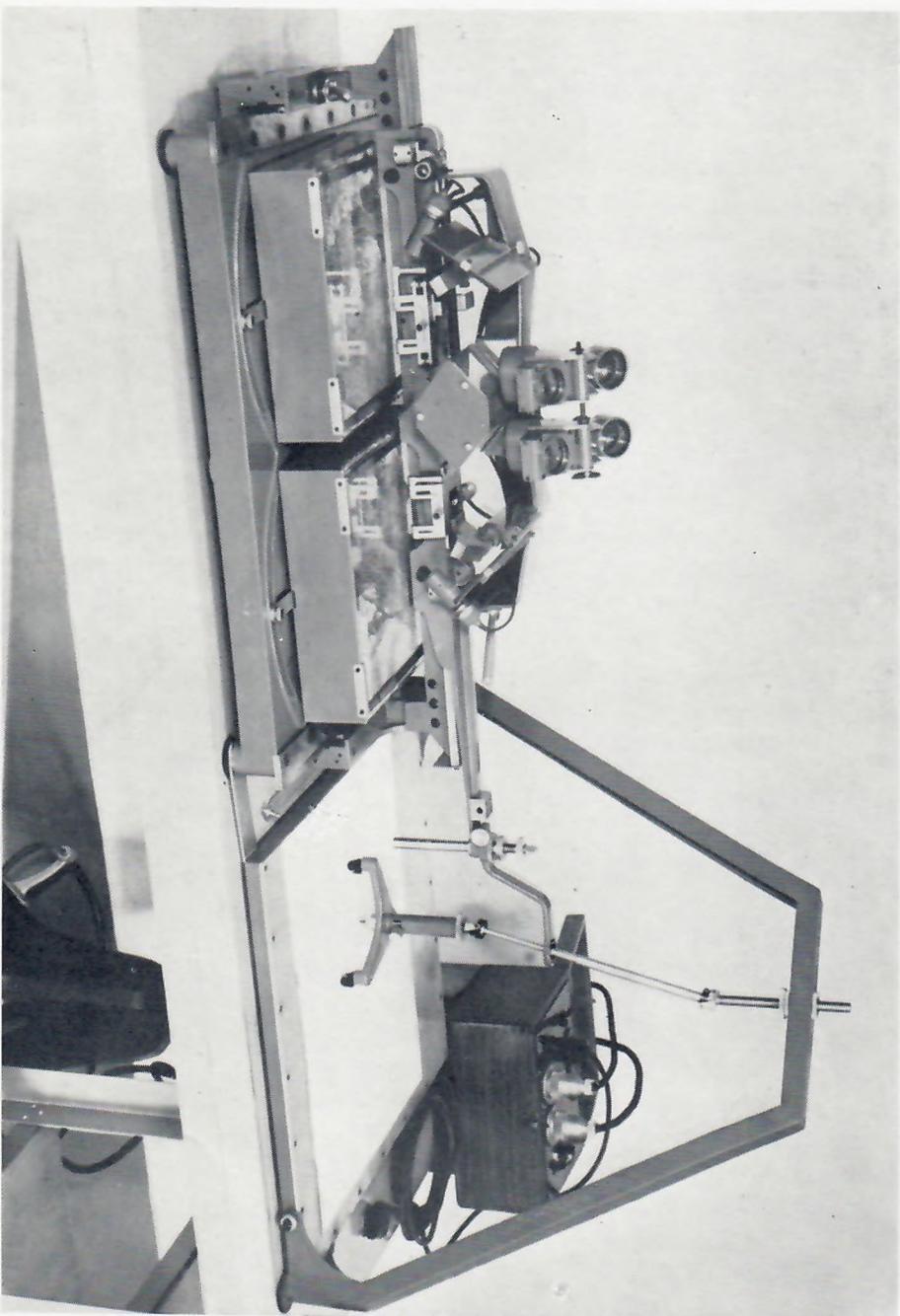


Fig. 4. - Stereografometro Nistri mod. SGG 89/B con pantografo spaziale.

I) *Formule approssimate.* Differenziando la (1) rispetto a p si ottiene:

$$dQ_P = f \frac{b}{p^2} dp$$

ed essendo

$$\frac{f}{p} = \frac{H - Q_P}{b} ,$$

si ha

$$dQ_P = \frac{H - Q_P}{p} dp . \quad (3)$$

Sostituendo i differenziali rispettivamente con Δh , dislivello, e con Δp , differenza di parallasse, e indicando con K il fattore frazionario che è costante, si ottiene:

$$\Delta h = K \Delta p \quad (4)$$

Tale relazione esprime il dislivello Δh , da determinare fra un punto incognito, per il quale si è misurata la parallasse $p + \Delta p$, e quello P , di quota nota Q_P , per il quale si è misurata la parallasse p . Dalla (4) si ricava

$$\Delta p = -\frac{1}{K} \Delta h , \quad (5)$$

che ci dà la differenza di parallasse Δp di cui variare quella p , misurata per il punto P , di quota nota Q_P , per indurre alla marca il dislivello Δh , onde portarla alla quota $Q_P + \Delta h$, ad esempio di una curva di livello da tracciare.

Le due formule (4) e (5), per essere ricavate da differenziali, sono tanto più approssimate quanto più piccolo è il dislivello da determinare. Nel caso che l'errore introdotto dal loro impiego non fosse tollerabile conviene usare le formule esatte.

II) *Formule esatte.* Conservando le notazioni precedenti, sia Q_{P_x} la quota del punto P_x da determinare e p_x la parallasse misurata, ad esso relativa. Dalla (1), applicata anche al punto P_x , si ottiene

$$Q_P = H - f \frac{b}{p} ,$$

$$Q_{P_x} = H - f \frac{b}{p_x} ;$$

sottraendo membro a membro, e indicando con Δh il dislivello da determinare $Q_{P_x} - Q_P$, con Δp la differenza fra le parallasse misurate $p_x - p$, si ottiene

$$\Delta h = \frac{fb}{p} - \frac{\Delta p}{p_x} \quad (6)$$

e siccome per la (1) il primo fattore frazionario è uguale a $H - Q_P$ si ha

$$\Delta h = \frac{H - Q_P}{p_x} \Delta p \quad (7)$$

Risolvendo la (6) rispetto a Δp , si ricava

$$\Delta p = \frac{p_x}{fb} p \Delta h$$

e siccome per la (1) il fattore frazionario è il reciproco di $H - Q_{P_x}$ si ha

$$\Delta p = \frac{p}{H - Q_{P_x}} \Delta h \quad (8)$$

Le formule (7) e (8) sostituiscono rispettivamente le (4) e (5), di più spedito impiego, quando i dislivelli del terreno superino il valore che le fa uscirle di tolleranza.

Come è noto dalla teoria, si possono impiegare agli stessi scopi altre formule, deducibili dalle precedenti e di analogo impiego.

4. *Considerazioni sulle approssimazioni conseguibili nelle determinazioni altimetriche.* — Si considerino in primo luogo gli effetti dell'imperfetto verificarsi nella presa delle ipotesi alla base del metodo sotto l'aspetto degli errori che ne risultano nel tracciamento delle curve di livello; osserviamo che le *superfici di uguale parallasse*, che per prese rigorosamente nadirali sono piani orizzontali — quelli che intersecando il terreno determinano le curve di livello — sono famiglie di superfici di ordine superiore che si approssimano sensibilmente al piano solo per piccoli scostamenti dalle condizioni in ipotesi. È noto ad esempio (fig. 5) che per un piccolo errore di convergenza ($d\varphi$) degli assi di presa, nel loro piano verticale, le superfici di uguale parallasse sono cilindriche; che per una piccola inclinazione trasversale ($d\omega$) tali superfici sono paraboloidi iperbolici, che per un piccolo dislivello (dH) fra i punti di presa tali superfici sono piane, ma non orizzontali. Le curve di livello descritte sono quindi le intersezioni del terreno, non con piani orizzontali, ma con *superfici curve e inclinate*, sia pure in piccola misura, che costituiscono superfici di livello « fittizie », che, se descrivono soddisfacentemente il terreno dal punto di

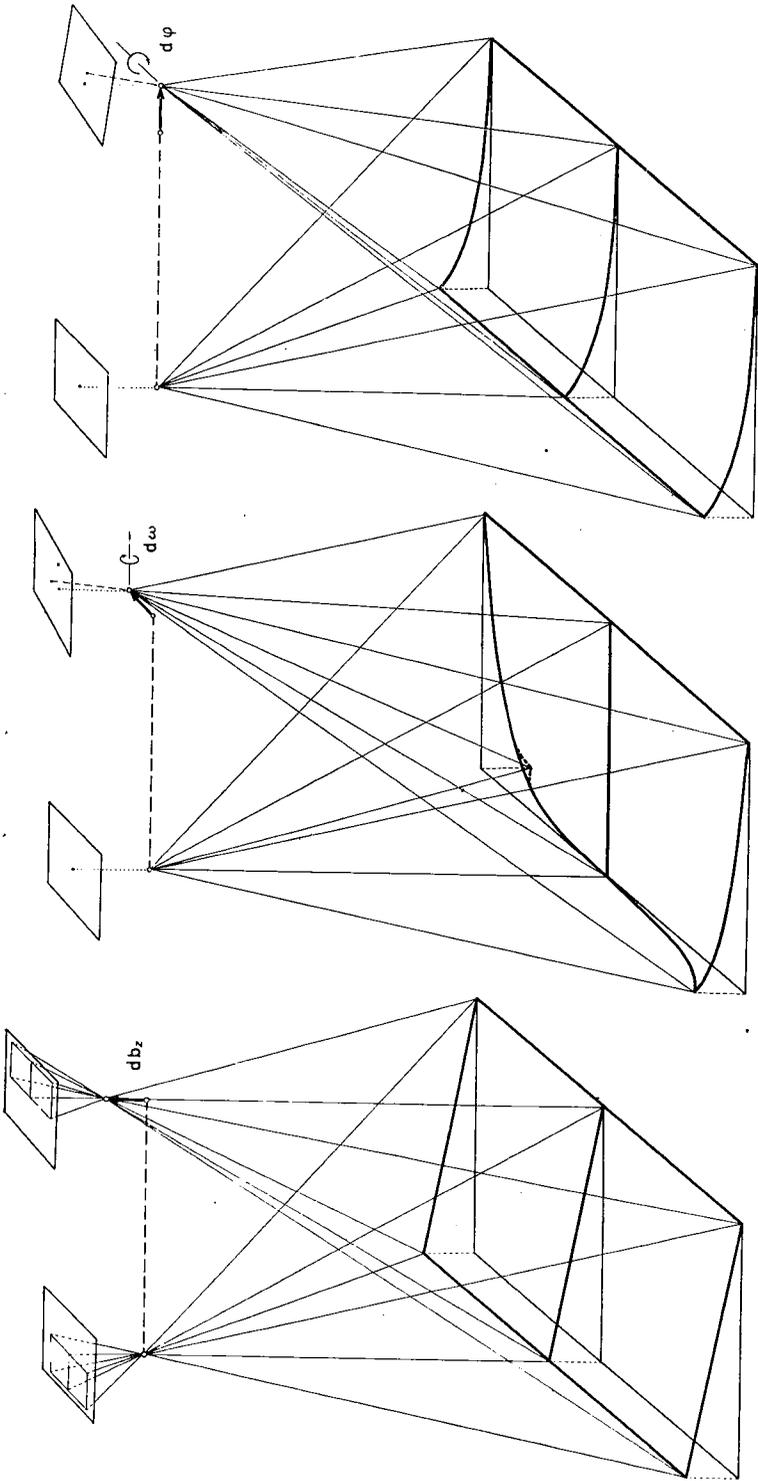


FIG. 5.

vista morfologico, possono a volte indurre errori geometrici notevoli; ad esempio una porzione di una delle dette superfici di livello fittizie può presentare profili di pendenza media superiore a quella di una strada o una linea di acqua del suo intorno, con il che queste verrebbero restituite con pendenza di segno opposto alla vera.

Dopo questa prima considerazione, che dà idea, dal punto di vista qualitativo, del variare degli errori sul modello restituito, calcoliamo gli errori che si commettono nel calcolo delle quote secondo il metodo A) e dei dislivelli secondo quello B). Possiamo accettare a priori che la *distanza principale* f della camera di presa sia in ogni caso conosciuta con approssimazione esuberante alle esigenze di precisione dello strumento, posto che lo è nei riguardi dei grandi restitutori. Le fonti di errore che introduciamo nelle formule sono quindi:

- 1) l'errore $\pm dH$ nella determinazione della *quota assoluta di volo*;
- 2) l'errore $\pm db$ nella valutazione della *base aerea di presa*;
- 3) l'errore $\pm dp_m$ nella *misura della parallasse* p ;
- 4) l'errore $\pm dp_\varphi$ nella *parallasse* p , dovuto a *difetto della nadiralità della presa*. La componente dell'inclinazione del fotogramma, che in prima approssimazione influisce sulla parallasse orizzontale p , è la inclinazione longitudinale φ ; quindi considereremo che l'errore di nadiralità si verifichi nel piano verticale nucleare; inoltre agli effetti della parallasse p evidentemente interessa solo considerare l'errore $\pm \varphi$ di parallelismo fra gli assi di presa dello stereogramma, giacché una loro uguale piccola inclinazione, che li conservasse paralleli, non introdurrebbe errore nella parallasse p . Per tutto ciò l'errore dp si può considerare espresso dalla relazione

$$dp_\varphi = f \cdot d\varphi. \quad (9)$$

Indichiamo con r il rapporto fra quota di presa relativa ad un punto e la base aerea di presa che è uguale a quello fra distanza principale e parallasse relativa al punto stesso; con S il denominatore della scala $s = 1 : S$ di una determinata curva di livello sul fotogramma, ossia il rapporto fra quota di presa relativa alla curva di livello e la distanza principale della camera di presa, che è uguale al rapporto fra base aerea di presa e parallasse relativa alla curva di livello stessa; con v il rapporto fra la parallasse relativa ad un punto e la differenza di parallasse fra un secondo punto e il primo, che è uguale al rapporto fra la quota di presa relativa ad un punto e il dislivello fra un secondo punto e il primo: ossia riassumendo:

$$r = \frac{H - Q_P}{b} = \frac{f}{p}; \quad S = \frac{H - Q_P}{f} = \frac{b}{p};$$

$$v = \frac{p}{\Delta p} = \frac{H - Q_P}{h}. \quad (10)$$

Premesso questo, differenziamo la (1) del caso A) considerando gli errori accennati come indipendenti, otteniamo

$$dQ_P = \pm dH \pm \frac{f}{p} db \mp \frac{f b}{p^2} dp_m \mp \frac{f b}{p^2} dp \varphi,$$

e per la (9) e la (10)

$$dQ_P = \pm dH \pm r db \pm r S dp_m \pm r (H - Q_P) d; \quad (11)$$

differenziamo analogamente la (7) del caso B), considerando uguali e indipendenti fra loro gli errori dp_m che si commettono nella misura sia di p che di p_x , e che è il medesimo l'errore di nadiralità $d\varphi$, nel senso già menzionato, che affetta sia p che p_x ; otteniamo ricordando che Δp è la differenza fra p_x e p ,

$$\begin{aligned} d \Delta h &= \pm \frac{\Delta p}{p_x} dH \mp \frac{H - Q_P}{p_x} dp_m \mp \frac{(H - Q_P) p}{p_x^2} dp_m \mp \\ &= \left[\frac{H - Q_P}{p_x} - \frac{(H - Q_P) p}{p_x^2} \right] dp \varphi, \end{aligned}$$

e per la (9) e le (10), nelle quali si può considerare p^0 uguale a p senza variare l'ordine di grandezza dei termini,

$$d \Delta h = \pm \frac{1}{v} dH \mp 2 r S dp_m \mp \frac{rS}{v} dp_m \mp \frac{r(H - Q_P)}{v_x^2} d\varphi. \quad (12)$$

Ponendo

$$E = \pm dH \mp r S dp_m \mp r (H - Q_P) d\varphi$$

la (11) e la (12) diventano

$$dQ_P = E \pm r db \quad (13)$$

$$d \Delta h = \frac{E}{v} \mp 2r S dp_m. \quad (14)$$

Si consideri un caso corrente di una presa aerea con camera grandangolare di distanza principale $f = 152$ mm; sia $H = 6080$ m circa, determinata ad esempio con un altimetro con $dH = \pm 100$ m; è $S = 40.000$; sia $Q_P = 0$, $r = 2,5$ e $d\varphi = 1^0$; nelle condizioni più sfavorevoli di fotogrammi su carta, sia $dp_m = 0,05$ mm; ed infine $db = 40$ m; si otterrà

$$E = \pm 100 \text{ m} \mp 5 \text{ m} \mp 267,5 \text{ m}$$

$$dQ_P = E \pm 100 \text{ m}$$

$$d \Delta h = \frac{E}{v} \pm 10 \text{ m}$$

le quali ci danno idea dell'ordine di grandezza degli errori nella determinazione assoluta delle quote e dei dislivelli.

Si consideri adesso che v è un numero grande, nelle condizioni normali di impiego della fotogrammetria, perché esprime quante volte è più grande la quota relativa di presa rispetto ai dislivelli Δh del terreno da rilevare; tale errore v nel caso della presa aerea considerata è maggiore di 50 in terreni pianeggianti, compreso fra 50 e 20 per i collinosi, fra 20 e 10 per i montagnosi con valori minori di 10 solo eccezionalmente e in limitate porzioni di uno stereogramma.

Per condizioni di presa diverse da quelle considerate, le relazioni di grandezza che si ottengono gli errori dQ_P e $d \Delta h$ sostanzialmente non cambiano; in modo che possiamo concludere:

1) che la determinazione della quota assoluta di un punto secondo il caso B), passando attraverso quella del suo dislivello Δh da un altro di quota nota, è circa v volte più precisa di quella effettuata secondo il caso A):

$$dQ_P = v d \Delta h ;$$

2) che l'errore di più temibili conseguenze è quello dovuto a difetto di nadivalità $d\varphi$;

3) che l'errore nella misura delle parallassi, rispetto a quelli provenienti dalle altre cause, è trascurabile nel caso A) mentre non lo è nel caso B).

Pertanto, come avevamo già avvertito converrà ricorrere sempre, quando si abbiano punti di quota nota sul terreno, al metodo B), il che si potrà sempre fare, ad esempio, nel caso dell'aggiornamento di una carta. Se non si disporrà di detti punti, li si creeranno in ogni stereogramma effettuando preventivamente una aerotriangolazione radiale della presa aerea, valendosi dell'ausilio dello stereografometro stesso come è illustrato più avanti parlando del suo impiego; con tale aerotriangolazione, note, o calcolate secondo il metodo A), le quote di almeno due punti rispettivamente agli estremi della catena aerea, si ricondurrà al caso B) la determinazione delle quote in tutti gli stereogrammi intermedi, conseguendosi una precisione relativa nella restituzione di ordine superiore, nel senso che gli errori si distribuiranno lungo di essa senza discontinuità, e che ogni porzione di essa presenterà i dislivelli restituiti con notevole precisione, anche se le quote assolute saranno affette da errori più grandi.

Si noti come la forma più conveniente d'impiego si avvalga di *tre elementi la cui misura è indipendente l'una dall'altra*: uno determinato nella presa aerea, ossia la quota assoluta di volo H ; uno determinato sul terreno, ossia la quota Q_P di un punto; uno misurato sui fotogrammi, ossia le parallassi p e p_x . Nel metodo A) invece è necessario impiegare anche la base aerea di presa b che può essere variamente determinata.

La determinazione di H può essere ricavata dalle indicazioni di un altimetro, o meglio di uno statoscopio, riferite ad altri elementi noti; per uno stereogramma si assumerà la media dei valori registrati sui due punti di presa; l'approssimazione assoluta si può valutare dell'ordine dei 100 metri. Si può dedurre con approssimazione superiore dalla conoscenza della scala media s_m di almeno un fotogramma, moltiplicando il denominatore S_m della scala per la distanza principale f , quando su di esso compaiano almeno due punti di posizione nota, il che si verifica nel caso di aggiornamento di carte regolari. L'altimetro radar, che dà l'indicazione della quota relativa della presa rispetto ad una piccola zona del fotogramma, dà l'approssimazione massima conseguibile allo scopo.

La determinazione di b può essere ottenuta come media delle distanze fra le immagini dei centri sui due fotogrammi (vedi fig. 3: N'_{n-1} , N''_n ; N''_{n-1} , N'_n), nota la loro scala media quale rapporto fra la quota relativa della presa e la distanza principale f , o mediante punti di posizione conosciuta; la determinazione di tutte le basi, così determinate, di una catena aerea si presta ad una compensazione che porti la somma delle basi ad uguagliare la distanza, determinata per altra via, fra il primo e l'ultimo centro della catena. Meglio, la determinazione di b si ricaverà dalla aerotriangolazione radiale della catena aerea, eseguita con l'ausilio dello Stereografometro stesso. Anche le indicazioni degli intervalli di tempo fra prese consecutive, registrati da un cronometro fotografato insieme al terreno conducono alla conoscenza delle basi, interpolandole, proporzionali a detti intervalli, nella lunghezza, supposta nota, della catena aerea.

È ovvio che dalla attendibilità di H (e di b nel caso del metodo A), in funzione delle accennate possibilità e disponibilità per la sua determinazione, dipende il grado di speditezza del rilevamento; nel caso che questo sia ampio e il rilevamento abbia un carattere più descrittivo che geometrico, si potrà ad esempio impiegare un unico valore medio di H (e di b) per tutta una catena aerea; invece nel caso dell'aggiornamento di carte regolari, ove si avranno a disposizione elementi piani-altimetrici di appoggio e controllo in abbondanza si determinerà per ogni stereogramma il valore di H per varie vie; non è detto che tale valore sia il più approssimato a quello vero, giacché può verificarsi il caso che con la alterazione del suo valore si introduca un errore che tenda a diminuire altri di altra origine, principalmente quelli dovuti a imperfetta nadiralità della presa. A volte converrà restituire le successive porzioni dello stereogramma introducendo nel calcolo delle quote valori diversi di H , ricavato ognuno sui punti di appoggio contenuti nella porzione considerata di stereogramma.

Le considerazioni esposte, insieme alla esperienza dei metodi aerofotogrammetrici in genere e nell'impiego dello strumento, serviranno caso per caso a informare i criteri cui attenersi per ottenere dallo Stereografometro, nella gamma di rilevamenti cui può essere destinato, la prestazione più conveniente.

una determinata scala, è necessario indurre al fotogramma le due *trasformazioni* menzionate a pag. 5. Il problema che si presenta riguarda solo la rappresentazione planimetrica del terreno; nulla quindi cambia su quanto è stato detto anteriormente nei riguardi delle determinazioni altimetriche.

Per operare *simultaneamente* le sue dette trasformazioni ci varremo del seguente schema geometrico.

Si consideri la fig. 6 (*) in cui O rappresenta il punto di presa di quota assoluta H , e il piano α il fotogramma posto da O alla distanza principale f della camera di presa; per le ipotesi alla base del metodo α è orizzontale e il punto principale N' del fotogramma è sulla verticale di O (1). Il piano π rappresenta il livello del mare che supporremo piano, da cui si misurano le quote assolute. Si voglia effettuare la restituzione alla scala $s = 1 : S$. Sul fotogramma nadirale, per la sua *proprietà* rilevata a pag. 4, esiste una curva di livello, ed una sola che rappresenta planimetricamente alla scala s quella corrispondente sul terreno. Questa ultima è evidentemente l'intersezione con il terreno del piano orizzontale λ posto da O alla distanza verticale Sf , ossia di quota $q = H - Sf$, piano di livello che diremo « *fondamentale* ». Tale curva di livello è quindi la unica che possiamo considerare restituita planimetricamente sul fotogramma alla scala assegnata s .

Si consideri ora il punto generico P del terreno di quota Q_P e di immagine P' sul fotogramma. La sua esatta planimetria rispetto alla curva di livello anzi considerata, sul piano del fotogramma alla scala s si trova nel punto P'_1 , immagine di P_1 , proiezione verticale di P sul piano λ di quota q . Quindi il punto P' per trasportarsi sul fotogramma nella sua vera planimetria deve subire la traslazione $P'P'_1$. La verticale per P'_1 è complanare alla OP per appartenere entrambe al piano verticale contenente O e P ; la incontra quindi in un punto P'' . Dalla simiglianza dei triangoli OP'_1P'' e OP_1P , e di quelli $OP'N'$ e OP_1N_1 si ricava

$$P''P'_1 : PP_1 = ON : ON_1 ,$$

da cui

$$P''P'_1 = \frac{P P_1}{S} ,$$

indicando $P''P'_1$ con i , ed essendo $PP_1 = q - Q_P$,

$$\boxed{i = \frac{q - Q_P}{S}} \quad (15)$$

* La figura è tratta dall'opera (7) citata in bibliografia.

• In figura il piano α è disposto in posizione simmetrica di quella del piano del fotogramma nella presa, rispetto all'orizzonte di O ; ma come è noto le prospettive dei due piani si identificano con la rotazione di 180° nel proprio piano di una delle due.

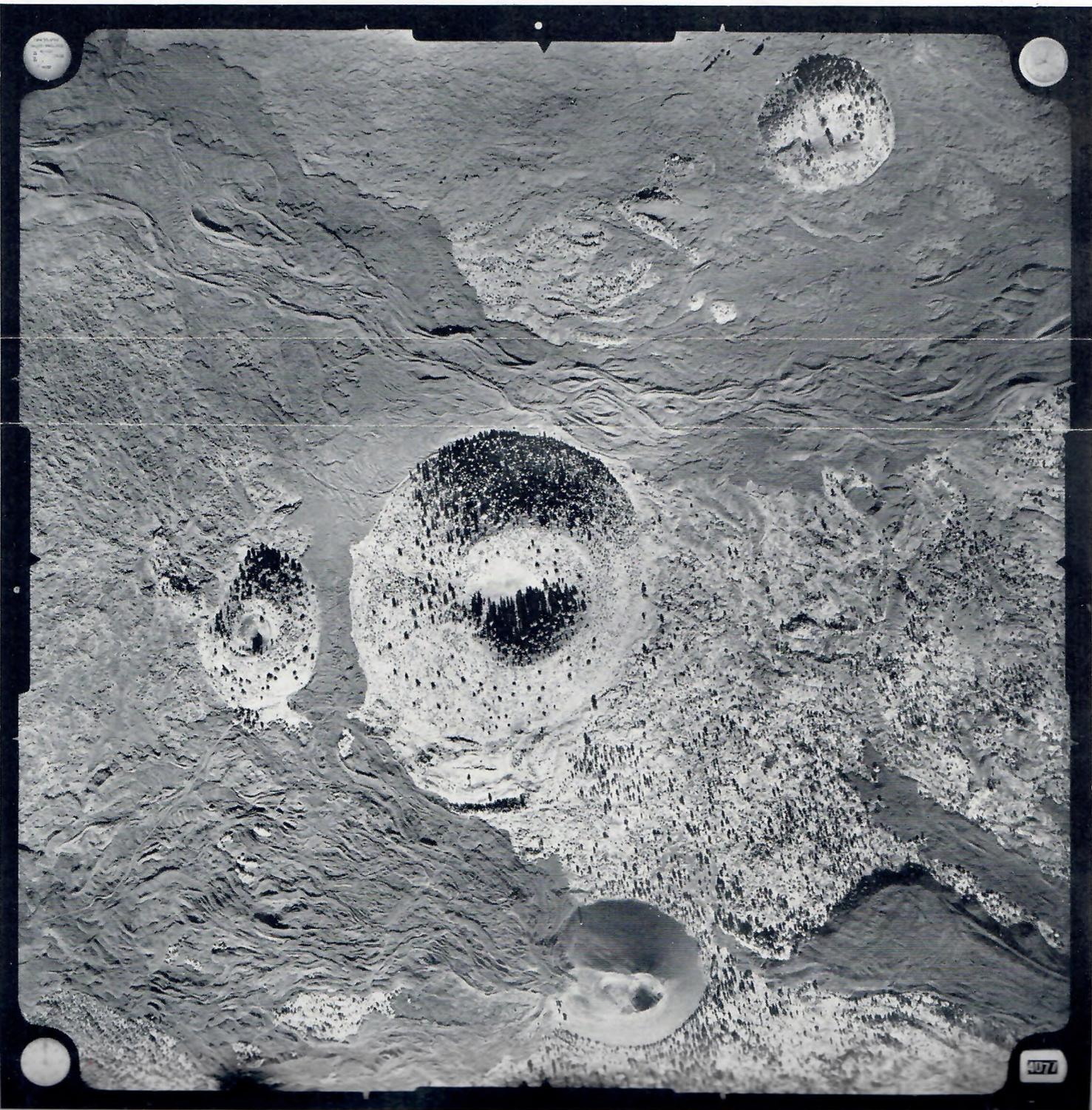


Fig. 7 - Crateri secondari dell'Etna (Sicilia) - Fotogramma ottenuto con Macchina di presa Aerofotogrammetrica OMI-Nistri Roma mod. 53/A, obiettivo grandangolare OMI-Rigel 1 : 6,3 f = 1,52 mm. Quota assoluta della presa 3000 m. eseguito dalla ETA di Roma.

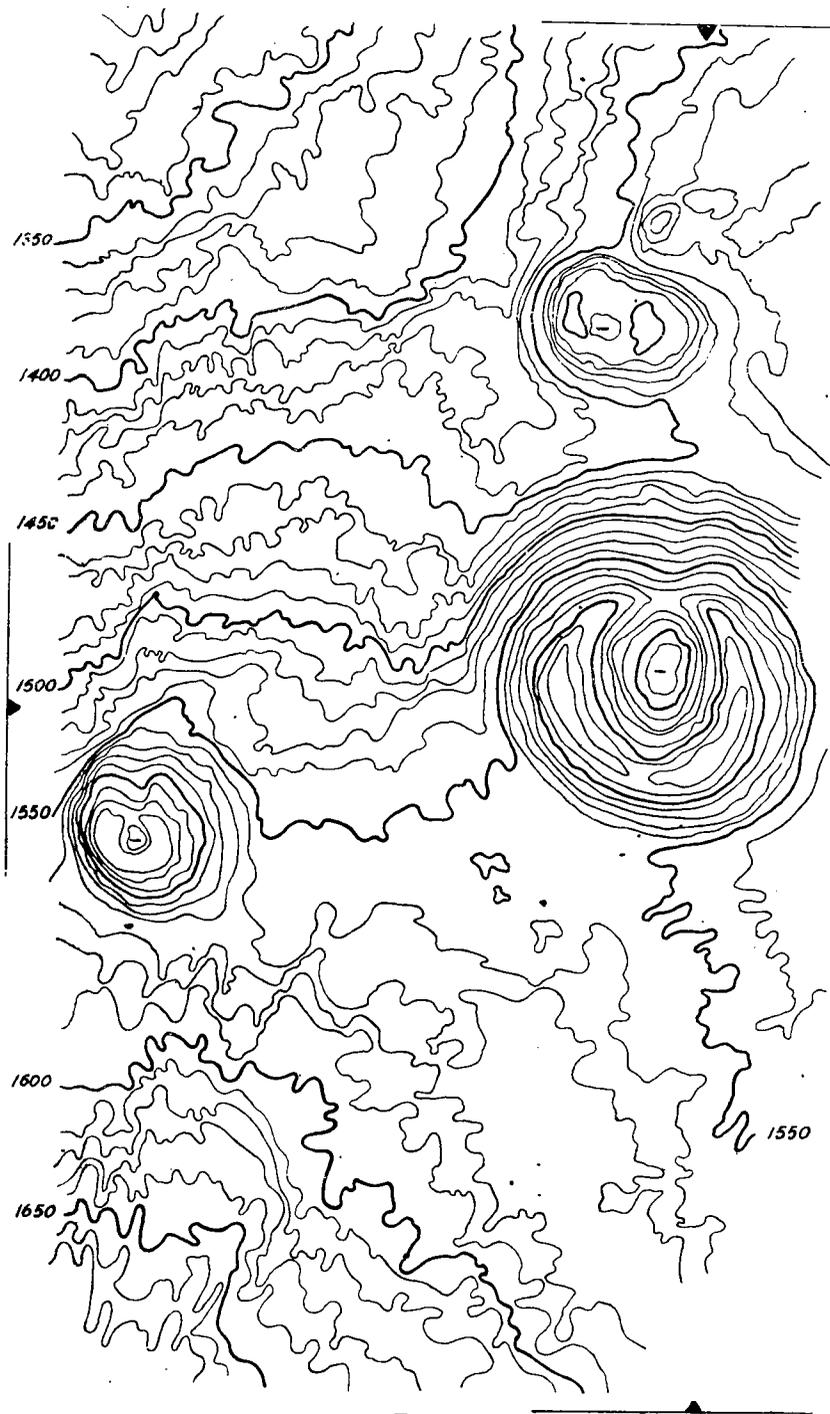
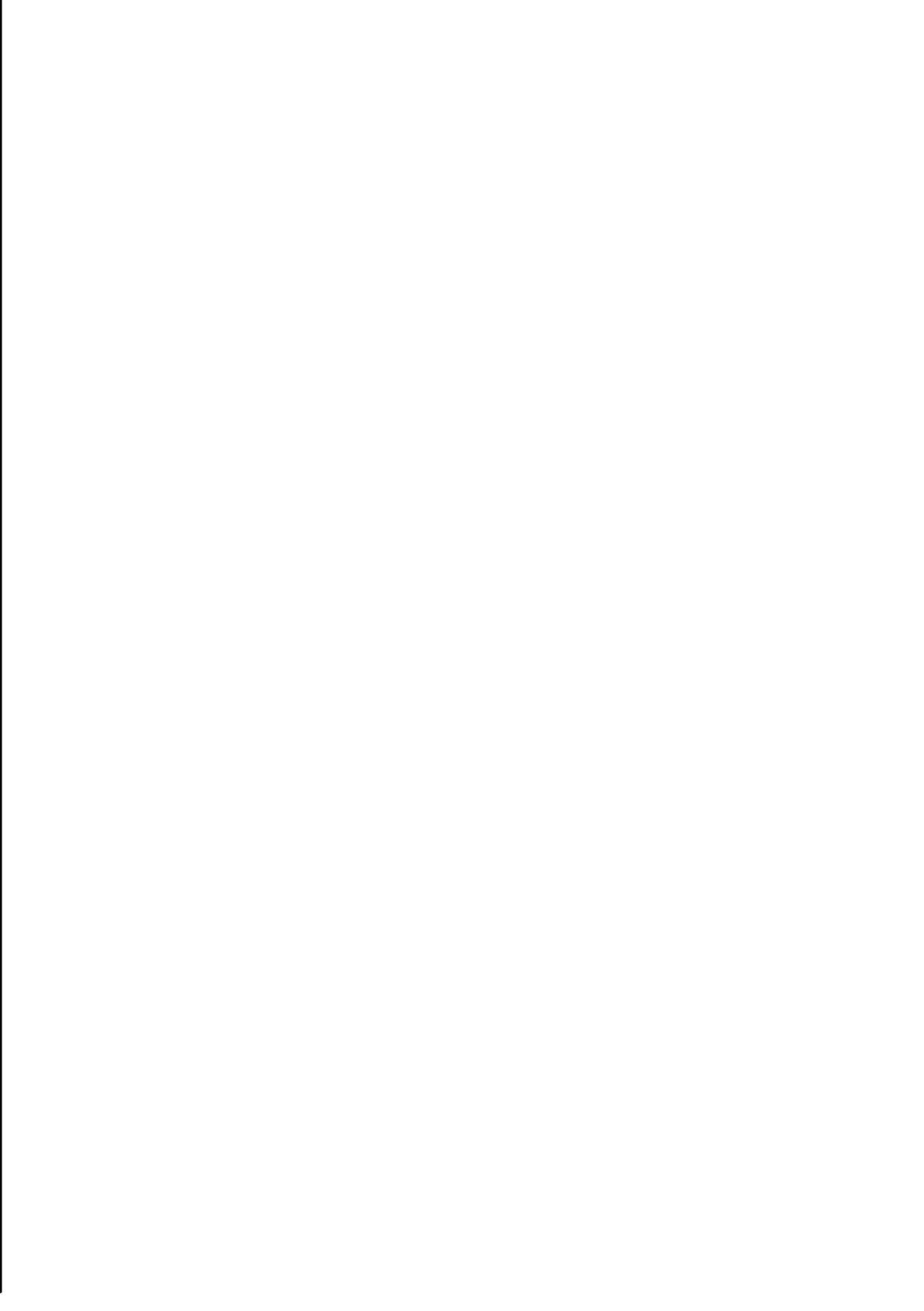


FIG. 8. - Restituzione prospettica, ottenuta con lo Stereografometro Nistri, delle curve di livello del fotogramma di fig. 7. Curva di livello 1080 alla scala 1:11750 circa.



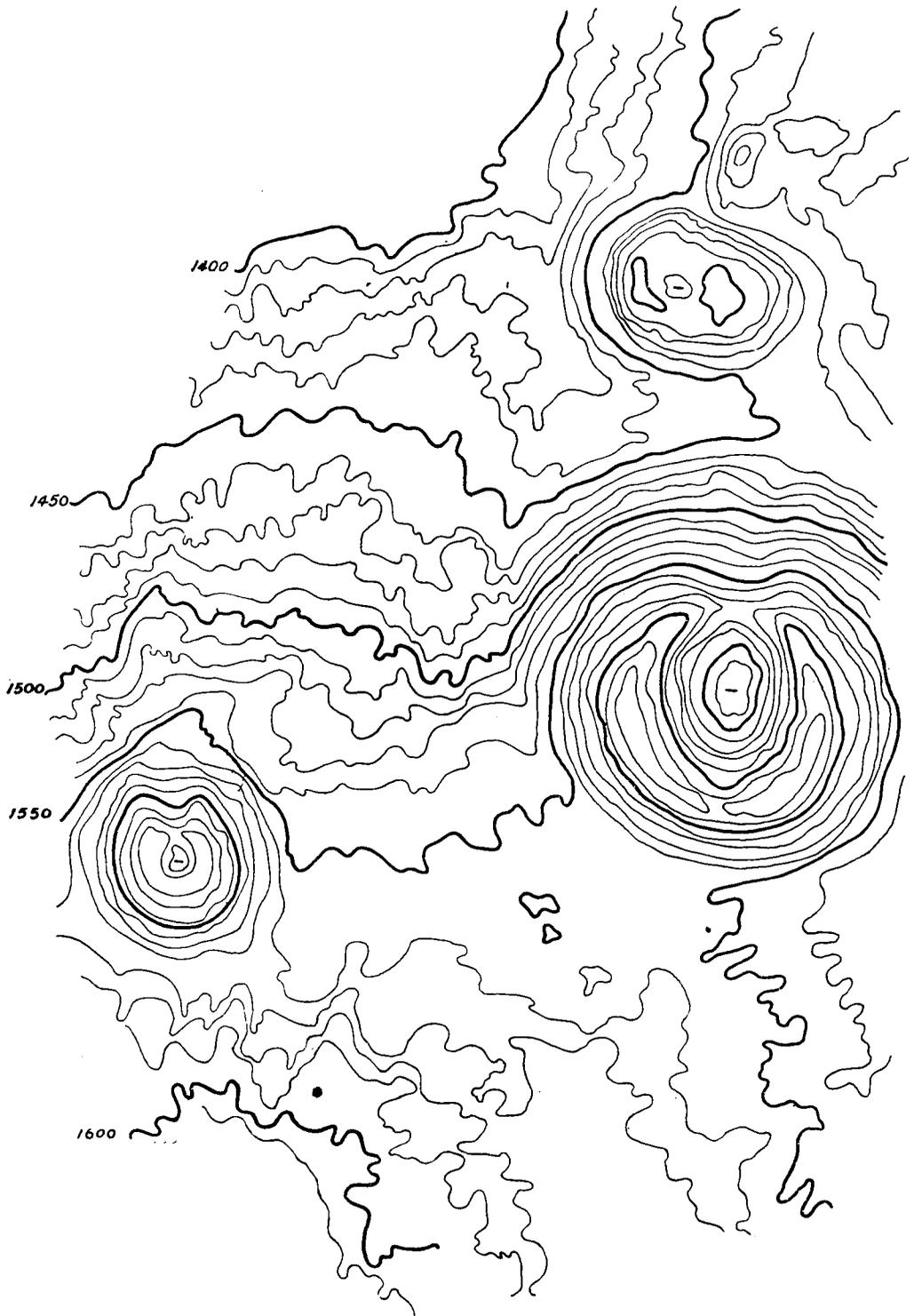


FIG. 9. - Restituzione planimetrica, ottenuta con lo Stereografometro e il Pantografo spaziale Nistri, di parte del fotogramma di fig. 7. Scala 1 : 8500.

Da ciò possiamo dedurre che la *esatta planimetria* P'_1 alla scala $s = 1: S$, di P sul piano α del fotogramma è data dalla proiezione su di esso del punto P'' della visuale OP' , che si trova da detto piano alla distanza i , che chiameremo « intervallo di proiezione » e che rappresenta alla scala s il dislivello di P dal piano fondamentale λ di quota q . Si noti che i è costante per qualsiasi posizione di P sulla sua curva di livello; infatti nel secondo membro della (15) q e S sono numeri fissi per tutto il rilevamento, in modo che i è costante se lo è anche Q_P . Pertanto possiamo estendere la deduzione, fatta più sopra, nel senso che la *esatta planimetria della curva di livello di quota* Q_P generica si ottiene proiettando verticalmente sul piano del fotogramma il punto della visuale OP' che appartiene al piano posto dal precedente alla distanza i , variabile con Q_P secondo la (15). Naturalmente otterremo la stessa planimetria proiettando verticalmente il detto punto su un piano *orizzontale qualsiasi*, che sarà quello del disegno, invece che su quello α del fotogramma.

Abbiamo così esposto lo schema geometrico cui soddisfa il « Pantografo spaziale » Nistri, che presenta le seguenti possibilità:

- 1) tre punti O , P' , P'' devono essere *vincolati ad una retta*;
- 2) il punto O deve essere *fisso nello spazio*;
- 3) il punto P' deve inoltre essere *vincolato ad un piano orizzontale* α posto a distanza f da O , e deve poter assumere in esso le posizioni delle immagini dei punti del terreno da restituire, considerato il fotogramma trasportato su detto piano con il centro N' sulla verticale di O ;
- 4) il punto P'' deve inoltre essere *vincolato ad un piano orizzontale* posto da O alla distanza i da imporre a proposito. Tale punto deve essere proiettato su un piano orizzontale.

Praticamente lo schema è riprodotto da un dispositivo nel quale i tre punti O , P' , P'' sono realizzati dai centri di tre snodi cardanici (64), (65), (66) vincolati ad una canna metallica su cui possono variare le loro distanze, essendo il primo fisso, e gli altri due vincolati a descrivere piani paralleli fra loro, a distanza variabile; il centro dello snodo corrispondente a P'' si proietta nella punta di una matita che traccia la restituzione sul piano fisso del disegno, parallelo ai precedenti, rappresentato in fig. 5.

La base su cui fonda la trasformazione proiettiva attuata dal pantografo spaziale è teoricamente esatta; la approssimazione con cui è necessario che si realizzi risente della più ampia tolleranza concessa alla delineazione grafica planimetrica; senza entrare in una analisi quantitativa della questione, la precisione conseguibile dipenderà sostanzialmente da quella con la quale si ripristina la distanza principale f della camera di presa, e da quella con la quale si verifica il parallelismo fra i piani β , α degli snodi e l'imposizione della loro distanza, i essendo le altre condizioni di secondaria importanza.

Nelle figg. 8 e 9 si possono osservare le restituzioni rispettivamente pro-

spettica e planimetrica della zona di terreno di fig. 7, ottenute con lo Stereografometro Nistri SGG 89/B. Il cratere più piccolo ed a margine della fig. 9 mette in evidenza la differenza delle due proiezioni, già notata geometricamente in fig. 1; il cratere più grande invece, trovandosi al centro del fotogramma, si differenzia meno nelle due proiezioni; in fig. 9 inoltre tutte le curve di livello sono rappresentate alla medesima scala.

BIBLIOGRAFIA

La bibliografia sull'argomento è così vasta che ci si limita a riportare quella in lingua italiana.

- (1) U. NISTRI, *Lo stereografometro e le sue applicazioni civili e militari*. « Rivista Ottica » Firenze, 1936, nn. 3-4 del luglio 1936. Edizione Mori, Firenze.
- (2) G. PRADELLI, *La compensazione degli errori nelle triangolazioni aeree radiali*. Pubblicazione n. 35 dell'« Istituto di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria del Politecnico » di Milano, 1939.
- (3) L. SOLAINI, *Apparecchi di restituzione*. « Photogrammetria ». « Rivista dell'Istituto Geografico Militare di Bruxelles », Edizione 1940, pagg. 402, 407.
- (4) L. SOLAINI, *Sulla determinazione speditiva delle quote di fotogrammi nadirali*. « Rivista del Catasto e dei SS. TT. EE. », anno 1940, n. 20, Roma.
- (5) M. BONETTI, *L'idrografia della Costa Somala e la fotogrammetria*, Conferenza tenuta al Politecnico di Milano il 24 aprile 1940.
- (6) ISTITUTO GEOGRAFICO MILITARE, *Fotogrammetria*, Firenze 1940.
- (7) G. CASSINIS e L. SOLAINI, *Note di Fotogrammetria*. Libreria Editrice Politecnica Cesare Tamburini, Milano 1946. (Da questa opera sono state tratte le figg. 1 e 5 della presente memoria).
- (8) O. M. I., Monografia, *Stereografometri Nistri*. Ed. 1952, Roma.
- (9) O. M. I., *Stereografometri Nistri mod. SGG 89/B*. (23 × 23 cm²). Teoria, descrizione e istruzione. Edizione 1954, Roma.