

# SUL METODO ANALITICO DI AEROTRIANGOLAZIONE \*

DR. UGO BARTORELLI

In aerotriangolazione il *metodo analitico* non ha finora trovato vasta applicazione in quanto i calcoli che comporta sono di notevole entità, tanto che fino all'avvento delle macchine calcolatrici elettroniche esso è stato considerato fuori della portata pratica; ma oggi esso viene riconsiderato. Con tale metodo si persegue il fine di ricavare le coordinate dei punti del terreno, scelti per l'aerotriangolazione di una catena, ricorrendo alla semplice lettura delle coordinate piane delle loro immagini sui fotogrammi, alla conoscenza dell'orientamento interno di questi e alle coordinate dei punti noti sul terreno; di solito si vuole arrivare allo scopo con il calcolo preventivo dell'orientamento esterno di ogni fotogramma. Il metodo, in contrapposto alla laboriosità dei calcoli, dovuta al grado elevato del problema, presenta il pregio di ridurre al minimo e alle più semplici, le operazioni strumentali, ossia a quelle dell'impiego di uno *stereocomparatore*.

Senza addentrarci nello sviluppo analitico completo del problema, preferiamo svolgere alcune considerazioni che illustrano con la più grande efficacia il problema della aerotriangolazione, manifestandone la sua vera essenza. Come è noto nel metodo, correntemente impiegato negli apparati restitutori, che ricorre alla ricostruzione dei modelli ottici vengono presi in considerazione un minimo di cinque punti per ogni fotogramma per la formazione di ogni stereogramma; come è noto essi sono disposti in modo che del fotogramma  $i$ , intermedio qualsiasi della catena, vengono presi in considerazione nove punti, uno presso il punto principale e gli altri otto sui bordi del fotogramma. In realtà nove punti sono esuberanti per la aerotriangolazione, il che ci proponiamo di dimostrare.

Consideriamo (fig. 1), che il fotogramma  $i$  della catena sia già orientato assolutamente nello spazio, insieme al precedente  $i-1$ ; dallo stereogramma  $S_{i-1,i}$  potremo determinare le coordinate di due punti  $P_{is}$ ,  $P_{id}$ , comuni al fotogramma  $i+1$ , disposti su questo presso i vertici del suo formato che si sovrappongono al fotogramma  $i-1$ ; inoltre potremo determinare le direzioni

---

(\*) Conferenza tenuta alle « Settimane fiorentine di Cultura fotogrammetrica » Firenze, settembre 1955. In essa l'A. - assistente all'Istituto di Geodesia e Topografia della Facoltà di Ingegneria di Roma - ha proposto una elegante soluzione di un problema attualmente in discussione relativo alla aerotriangolazione. *N. d. R.*

uscanti da  $O_i$  su cui si trovano i punti  $P_{(i+1)s}$ ,  $P_{(i+1)d}$  laterali rispetto al punto principale del fotogramma  $i+1$ ; esse direzioni si possono ricavare dal fotogramma  $i$ , in quanto anche a tale fotogramma appartengono le immagini di detti punti. Proponiamoci ora di far assumere al fotogramma  $i+1$  il suo assetto nella catena valendoci solamente:

1) delle direzioni uscenti dal suo punto di vista  $O_{i+1}$  ai soli quattro punti  $P_{is}$ ,  $P_{id}$ ,  $P_{(i+1)s}$ ,  $P_{(i+1)d}$ ; riduciamo cioè il fotogramma  $i+1$  a queste sole quattro direzioni rigidamente collegate fra loro; esse formano un tetraedro indefinito, le cui facce, anche quelle diagonali, sono note attraverso le coordinate delle immagini dei quattro punti sul fotogramma e l'orientamento interno di esso (punto principale, distanza principale e distorsione);

2) della conoscenza delle coordinate, sul modello, dei punti restituiti, già noti,  $P_{is}$ ,  $P_{id}$ , per i quali devono passare i corrispondenti spigoli del suddetto tetraedro;

3) della condizione di complanarità con i raggi, già noti,  $O_i P_{(i+1)s}$  e  $O_i P_{(i+1)d}$ , dei rispettivi spigoli del suddetto tetraedro.

Quanto ci siamo proposti è possibile e l'assetto del tetraedro  $O_{i+1} P_{is} P_{id} P_{(i+1)s} P_{(i+1)d}$  è determinato avendo il problema un numero finito di soluzioni, dovute al suo grado, fra le

quali è facile, per la natura del problema, dedurre quella che interessa.

Invero, ricostruito il tetraedro (fig. 2) con i dati suddetti della condizione (1), assoggettiamolo alla condizione (2) che vuole che i due raggi  $O'_{i+1} P'_{is}$  e  $O'_{i+1} P'_{id}$  passino per i punti  $P_{is}$  e  $P_{id}$ ; se verifichiamo tale condizione in un piano generico contenente tali due punti,  $O'_{i+1}$  rimane indeterminato su un arco di circonferenza, quello capace della faccia  $P'_{is} O'_{i+1} P'_{id}$  e che insiste sulla corda  $P_{is} P_{id}$ ; considerando tutti i piani del fascio che ha per asse questa corda, detto arco di circonferenza dà luogo ad una superficie torica. La condizione (2) lascia quindi al vertice  $O'_{i+1}$  la indeterminatezza su tale superficie, ossia su un insieme  $\infty^2$ . Mantenendo ora il vertice  $O'_{i+1}$  sulla superficie così determinata, assoggettiamo dapprima il raggio  $O'_{i+1} P'_{(i+1)s}$  ad appoggiarsi al raggio  $O_i P_{(i+1)s}$  (prima parte della condizione 3). Al vertice  $O'_{i+1}$  rimane la indeterminatezza su una linea del detto toro, ossia su un insieme semplicemente infinito. Ciò si può mettere in evidenza nella seguente maniera (fig. 3). Fissiamo un punto generico  $G$  sul raggio  $O_i P_{(i+1)s}$  e stabiliamo che per esso debba passare il raggio omologo  $O'_{i+1} P'_{(i+1)s}$  del tetraedro; allora la determinazione della posizione assunta da  $O'_{i+1}$  quando i tre raggi  $O'_{i+1} P'_{is}$ ,  $O'_{i+1} P'_{id}$ ,  $O'_{i+1} P'_{(i+1)s}$  passano rispettivamente per i punti  $P_{is}$ ,  $P_{id}$ ,  $G$ , costituiscono il

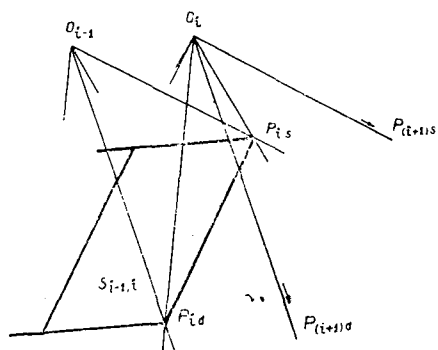


FIG. 1.

noto problema del semplice vertice di piramide, che, come sappiamo, è riducibile al quarto grado, con quattro soluzioni dalle quali possiamo separare quella che ci interessa. Facciamo adesso variare il punto  $G$  sul raggio  $O_i P_{(i+1)s}$ ; ad ogni posizione di  $G$  su tale raggio corrisponde una posizione di  $O'_{i+1}$ ; l'insieme descritto da  $O'_{i+1}$  è semplicemente infinito, ossia una linea  $L'$ , generalmente continua per intervalli generici della variazione di  $G$  su  $O_i P_{(i+1)s}$ ; tale linea non può che appartenere al toro anzidetto.

Mantenendo sempre il vertice  $O'_{i+1}$  sulla superficie del toro, assogget-

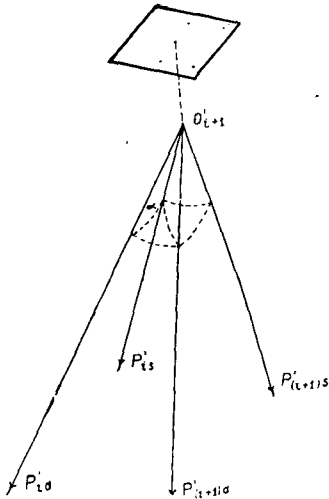


FIG. 2 a.

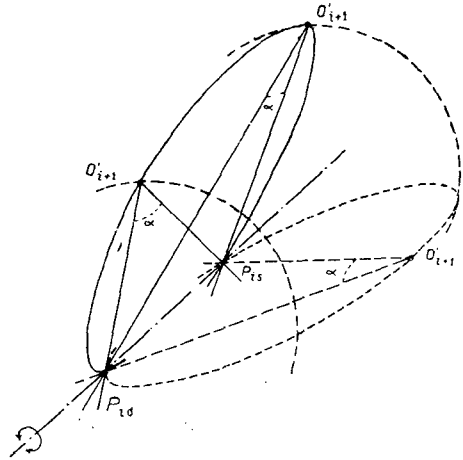


FIG. 2 b.

tiamo poi il raggio  $O'_{i+1} P'_{(i+1)d}$  ad appoggiarsi al raggio  $O_i P_{(i+1)d}$ , (seconda parte della condizione 3) senza imporre più condizioni al raggio  $O'_{i+1} P'_{(i+1)s}$ . Analogamente a quanto è stato adesso dimostrato, ad  $O'_{i+1}$  rimane la indeterminatezza su un'altra linea  $L''$ , appartenente anch'essa al toro.

Se infine imponiamo simultaneamente l'appoggiarsi dei raggi  $O'_{i+1} P'_{(i+1)s}$ ,  $O'_{i+1} P'_{(i+1)d}$  rispettivamente a quelli  $O_i P_{(i+1)s}$ ,  $O_i P_{(i+1)d}$ , il vertice  $O'_{i+1}$  resta univocamente determinato (a meno di un numero finito di altre soluzioni che non ci interessano) nella intersezione delle due linee  $L'$ ,  $L''$  suddette.

Con ciò risulta dimostrato che è sufficiente prendere in considerazione quattro soli punti di un fotogramma  $i+1$  perché sia possibile orientarlo nel concatenamento sui due fotogrammi precedenti  $i-1$ ,  $i$ , dai quali è stata ricavata la restituzione di due punti del modello, comuni al fotogramma  $i+1$ , e la restituzione di due direzioni, uscenti da  $i$ , ad altri due punti del fotogramma  $i+1$  da orientare. Questo significa che, in un concatenamento, ogni modello parziale della aerotriangolazione viene formato e saldato al precedente, in una sola operazione, considerando del precedente solamente due punti restituiti e due direzioni ad altri due punti appartenenti al nuovo modello da formare;

poi, formatolo, basta restituire tali due punti perché, con procedimento analogo, si possa formare e saldare il modello parziale successivo, e così via

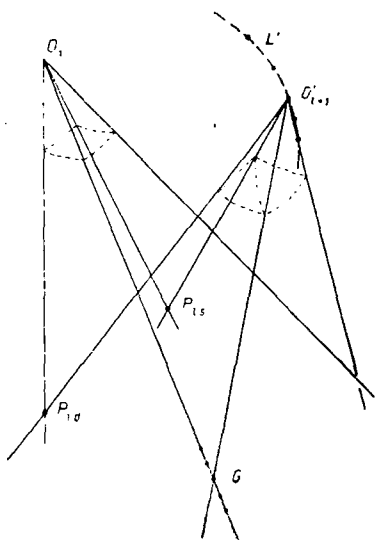


FIG. 3 a.

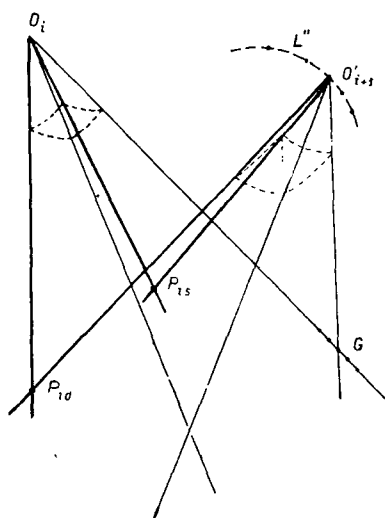


FIG. 3 b.

indefinitamente. Con questo procedimento, di ogni fotogramma è sufficiente prendere in considerazione solamente *sei* punti, consentendo ogni altro punto di stabilire relazioni esuberanti per una compensazione; la aerotriangolazione viene a procedere con un passo che comporta ad ogni fotogramma la determinazione di due punti del modello ottico.

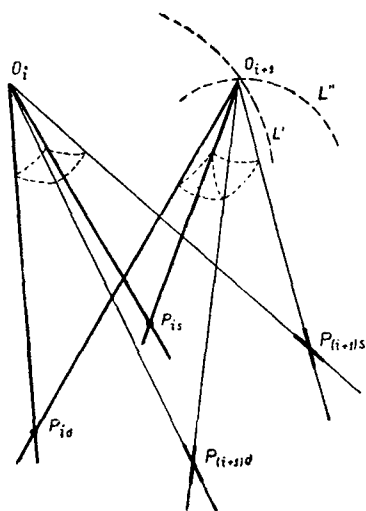


FIG. 3 c.

Un tale metodo non si presta a soluzioni ottico-meccaniche, a costo di variare sostanzialmente la struttura dei restitutori aerotriangolatori spaziali, quali sono attualmente; bensì esso può trovare applicazione particolarmente adatta all'aerotriangolazione analitica di una catena. Il metodo esposto si differenzia da ogni altro finora proposto, oltre che per il numero dei punti impiegato, per il fatto che con esso si arriva a determinare direttamente le coordinate dei punti del concatenamento senza necessità di calcolare preventivamente l'orientamento esterno dei singoli fotogrammi.

Sia data la catena aerea di vertici (punti di presa)  $O_1 \rightarrow O_n$  (fig. 4). Sul terreno da essa coperto prenderemo in considerazione, come punti della trian-

golazione aerea solamente quelli disposti trasversalmente ad ogni vertice, uno a sinistra ed uno a destra di essi; aventi circa la stessa ascissa nel sistema di assi della catena; i punti laterali del vertice  $O_h$  ( $h = 1, 2, \dots, n$ ) vengono rispettivamente indicati con  $P_{hs}$   $P_{hd}$ ; le immagini di tali punti sul fotogramma  $k$  saranno indicate rispettivamente con  $P_{hs}^k$   $P_{hd}^k$ ; evidentemente nel fotogramma

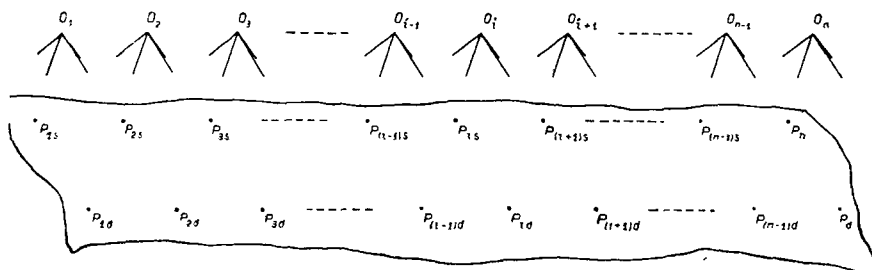


FIG. 4.

$k$  non potrà aversi che  $h = k - 1, k, k + 1$ . Siano  $P_{1s}, P_{1d}, P_{2s}$  i punti *noti* di partenza della aerotriangolazione.

Supponiamo di dover orientare il fotogramma  $i + 1$  su quello  $i$ , già orientato nello stereogramma  $(i - 1, i)$ ; si possono considerare noti il vertice  $O_i$  e i punti  $P_{is}, P_{id}$ ; ci proponiamo di giungere a determinare in primo luogo il vertice  $O_{i+1}$ ; dopodiché potremo determinare i punti  $P_{(i+1)s}$  e  $P_{(i+1)d}$ .

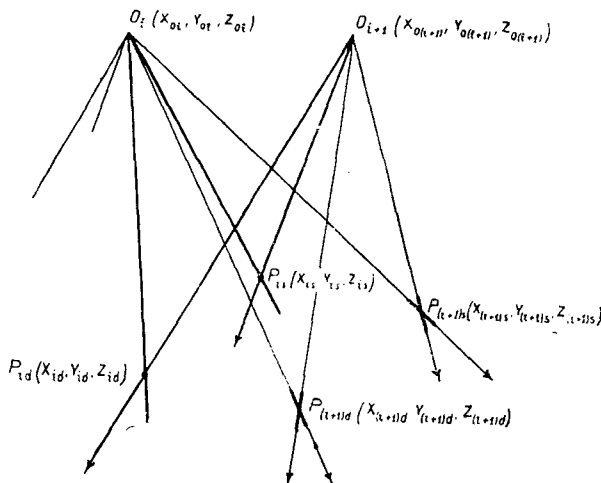


FIG. 5.

Nella trattazione che segue verranno utilizzate per i singoli punti le rispettive coordinate  $X, Y, Z$ , fornite dei corrispondenti indici.

Immaginiamo il problema risolto, (fig. 5), ossia che il tetraedro da orientare abbia già assunto il suo vero assetto, nello spazio, che porta i raggi  $O'_{i+1}$   $P'_{is}$

e  $O'_{i+1}P'_{id}$  a passare rispettivamente per i punti noti  $P_{is}$  e  $P_{id}$  e i raggi  $O'_{i+1}P_{(i+1)s}$  e  $O'_{i+1}P'_{(i+1)d}$  ad appoggiarsi rispettivamente a quelli noti  $O_iP_{(i+1)s}$  e  $O_iP'_{(i+1)d}$ . Di questi due raggi siano

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(i+1)s}^i, v_{(i+1)s}^i, w_{(i+1)s}^i \\ \text{ed analoghi cambiando } s \text{ in } d \end{array} \right.$$

i coseni direttori rispettivi. Essi sono noti.

Degli spigoli

$$O_{i+1}P_{is}, O_{i+1}P_{id}, O_{i+1}P_{(i+1)s}, O_{i+1}P_{(i+1)d}$$

del tetraedro da orientare, siano rispettivamente

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{is}^{i+1}, v_{is}^{i+1}, w_{is}^{i+1} \\ \text{ed analoghi cambiando } s \text{ in } d \end{array} \right.$$

i coseni direttori. Essi sono incogniti.

Tali dodici incognite e le tre, costituite dalle coordinate del vertice  $O_{i+1}$  sono le quindici incognite del problema. Le equazioni che lo risolvono sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{X_{P_{is}} - X_{O_{i+1}}}{u_{is}^{i+1}} = \frac{Y_{P_{is}} - Y_{O_{i+1}}}{v_{is}^{i+1}} = \frac{Z_{P_{is}} - Z_{O_{i+1}}}{w_{is}^{i+1}} \quad (1,2) \\ \text{ed analoghe cambiando } s \text{ in } d \quad (3,4) \end{array} \right.$$

che esprimono rispettivamente la condizione di incidenza del raggio  $O'_{i+1}P'_{is}$  nel punto  $P_{is}$  e del raggio  $O'_{i+1}P'_{id}$  nel punto  $P_{id}$ ;

$$\text{per } j = u, v, w \left\{ \begin{array}{l} \Sigma j_{is}^{i+1} j_{id}^{i+1} = A \quad (5) \\ \Sigma j_{id}^{i+1} j_{(i+1)d}^{i+1} = B \quad (6) \\ \Sigma j_{(i+1)d}^{i+1} j_{(i+1)s}^{i+1} = C \quad (7) \\ \Sigma j_{(i+1)s}^{i+1} j_{is}^{i+1} = D \quad (8) \\ \Sigma j_{is}^{i+1} j_{(i+1)d}^{i+1} = E \quad (9) \end{array} \right.$$

che esprimono le relazioni che legano i coseni direttori degli spigoli del tetraedro da orientare in virtù della conoscenza delle facce laterali e diagonali

di esso;  $A, B, C, D, E$ , sono precisamente i coseni di dette facce, calcolabili mediante le coordinate note dei punti immagini.

$$p_{is}^{i+1}, p_{id}^{i+1}, p_{(i+1)s}^{i+1}, p_{(i+1)d}^{i+1}$$

messe in relazione con la distanza principale del fotogramma (\*)

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma (j_{is}^{i+1})^2 = 1 \quad (I0) \\ \text{ed analoga cambiando } s \text{ in } d \quad (I1) \\ \Sigma (j_{(i+1)s}^{i+1})^2 = 1 \quad (I2) \\ \text{ed analoga cambiando } s \text{ in } d \quad (I3) \end{array} \right\} \text{ per } j = u, v, w$$

che esprimono la relazione nota fra i coseni direttori di una stessa direzione; ed infine

$$\left| \begin{array}{ccc} X_{O_i} - X_{O_{i+1}} & Y_{O_i} - Y_{O_{i+1}} & Z_{O_i} - Z_{O_{i+1}} \\ u_{(i+1)s}^i & v_{(i+1)s}^i & w_{(i+1)s}^i \\ u_{(i+1)s}^{i+1} & v_{(i+1)s}^{i+1} & w_{(i+1)s}^{i+1} \end{array} \right| = 0 \quad (I4)$$

$$\text{ed analoga cambiando } s \text{ in } d \quad (I5)$$

che esprimono la complanarità dei raggi  $O_i P_{(i+1)s}$  e  $O_i P_{(i+1)d}$  con quelli  $O_{i+1} P_{(i+1)s}$  e  $O_{i+1} P_{(i+1)d}$  rispettivamente.

Le quindici equazioni impostate, tutte di secondo grado, risolvono il problema dando le coordinate del vertice  $O_{i+1}$  e i coseni direttori degli spigoli del tetraedro da orientare, da cui, infine, le coordinate dei punti  $P_{(i+1)s}$ ,  $P_{(i+1)d}$ , ottenibili semplicemente quali intersezioni di raggi noti. Noti questi due punti e il vertice  $O_{i+1}$  si può continuare il procedimento orientando il fotogramma  $1+2$  su quello  $1+1$ , ecc.

Per risolvere il sistema se ne assegna una soluzione approssimata e si procede per *reiterazione* sul sistema di primo grado che fornisce gli errori della

(\*) L'equazione

$$\Sigma j_{id}^{i+1} j_{(i+1)s}^{i+1} = F$$

non è da considerare perché combinazione lineare delle altre.

soluzione approssimata. Si noti che il metodo non implica passaggi fra angoli e loro funzioni trigonometriche, oltre quelli necessari a ricavare i dati di ingresso,  $A, B, C, D, E$ .

Possiamo concludere che i punti  $P_{(i+1)s}$ ,  $P_{(i+1)d}$  ossia quelli del terreno che ci interessa di determinare per l'aerotriangolazione, sono stati ottenuti in funzione dei punti della catena

$$P_{is}, P_{id}, O_i, O_{i+1},$$

tutti e quattro noti ciascuno attraverso le loro coordinate ricavate dalla aerotriangolazione, e dei punti

$$p_{hs}^k, p_{hd}^k \quad (k = i, i+1; \quad h = i, i+1)$$

punti immagini dei precedenti, secondo la notazione stabilita precedentemente, tutti e otto noti, ciascuno attraverso le loro due coordinate misurate sui rispettivi fotogrammi. Potremmo scrivere

$$P_{(i+1)s} = f(P_{is}, P_{id}, O_i, O_{i+1}, p_{hs}^k, p_{hd}^k) \quad (k = i, i+1; \quad h = i, i+1)$$

e analoga relazione per  $P_{(i+1)d}$ . Ma abbiamo analogamente dedotto che

$$O_{i+1} = g'(P_{is}, P_{id}, O_i, p_{hs}^k, p_{hd}^k) \quad (k = i, i+1; \quad h = i, i+1),$$

e quindi, eliminando  $O_{i+1}$ , avremo:

$$P_{(i+1)s} = f'(P_{is}, P_{id}, O_i, p_{hs}^k, p_{hd}^k) \quad (k = i, i+1; \quad h = i, i+1).$$

Ma analogamente  $O_i, P_{is}, P_{id}$  sono funzioni diverse dei punti:

$$P_{(i-1)s}, P_{(i-1)d}, O_{i-1}, p_{hs}^k, p_{hd}^k \quad (k = i-1, i; \quad h = i-1, i),$$

ecc.

Così continuando  $O_3, P_{3s}, P_{3d}$  risultano funzioni dei punti

$$P_{2s}, P_{2d}, O_2, p_{hs}^k, p_{hd}^k \quad (k = 2, 3; \quad h = 2, 3),$$

e  $O_2, P_{2s}, P_{2d}$  funzioni dei punti

$$P_{1s}, P_{1d}, O_1, p_{hs}^k, p_{hd}^k \quad (k = 1, 2; \quad h = 1, 2).$$

Ma sappiamo bene che

$$O_1 = f^0(P_{1s}, P_{1d}, P_{2s}, p_{1s}^1, p_{1d}^1, p_{2d}^1)$$



in quanto  $O_1$  è determinabile secondo il semplice vertice di piramide mediante i punti  $P_{1s}$ ,  $P_{1d}$ ,  $P_{2s}$  supposti coincidenti con i punti noti di *partenza* della aerotriangolazione.

Allora risalendo nelle sostituzioni deduciamo che  $P_{2s}$  e  $P_{2d}$  sono funzioni dei punti

$$P_{1s}, P_{1d}, P_{2s}, P_{hs}^k, P_{hd}^k \quad (k = 1, 2; \quad h = 1, 2);$$

che  $P_{3s}$  e  $P_{3d}$  sono funzioni dei punti

$$P_{1s}, P_{1d}, P_{2s}, P_{hs}^k, P_{hd}^k \quad (k = 1, 2, 3; \quad h = 1, 2, 3);$$

ecc. ed infine

$$P_{(i+1)s} = F(P_{1s}, P_{1d}, P_{2s}, P_{hs}^k, P_{hd}^k) \quad \left( \begin{array}{l} k = 1, 2 \dots i, i+1 \\ h = 1, 2 \dots i, i+1 \end{array} \right)$$

Analoga funzione vale per  $P_{(i+1)d}$ . (\*)

Possiamo quindi concludere che, supposto di potere esplicitare le coordinate dei punti dell'aerotriangolazione, i *punti laterali del vertice  $i+1$*  sono *funzioni dei tre punti noti di partenza  $P_{1s}$ ,  $P_{1d}$ ,  $P_{2s}$  e dei punti immagini  $P_{hs}^k$ ,  $P_{hd}^k$  ( $k = 1, 2 \dots i, i+1$ ) ( $h = 1, 2 \dots i, i+1$ ) di tutti i punti  $P_s$ ,  $P_d$  della aerotriangolazione, quelli noti di partenza e quelli da determinare.*

Le coordinate dei punti immagini sono misurate sui fotogrammi della catena dal primo fino all' $i+1$  compresi. Pertanto, misurate queste la aerotriangolazione può procedere o calcolando, per ogni fotogramma  $i+1$ , prima il vertice  $O_{i+1}$  e poi i punti  $P_{(i+1)s}$ ,  $P_{(i+1)d}$ , servendosi degli omonimi del fotogramma precedente, e dei soli punti immagini ad essi interessati, oppure, supposta possibile la detta esplicitazione, calcolando ogni punto  $P$ , *indipendentemente dagli altri omonimi, e senza fare ricorso al calcolo dei vertici  $O$ , solo utilizzando le coordinate dei punti noti di partenza e quelle dei punti immagini misurate lungo la catena fino a quelli da determinare.*

---

(\*) Si tenga presente la limitazione di  $h$  rispettivamente a  $k$ , già notata, nel senso che  $h$  può valere solamente  $k-1, k, k+1$ .