

## I PROBLEMI DELL'INTERSEZIONE INVERSA

(PROBLEMA SEMPLICE E COMPOSTO DI SNELLIUS E PROBLEMA DI HANSEN) RISOLUBILI, SUL PIANO DI GAUSS-BOAGA, CON LA SOLA INTERSEZIONE DIRETTA, ATTRAVERSO IL PROBLEMA COMPOSTO DI SNELLIUS RISOLTO SENZA DETERMINARE IL RAPPORTO DEI SEMI DEGLI ANGOLI  $x$   $y$ .

*Comunicazione del I° Topografo FRANCESCO ALBANI dell'I.G.M.*

## PREMESSA.

Con l'adozione della proiezione conforme di Gauss-Goaga attraverso la quale, come è noto, tutti i problemi, sia topografici che geodetici, si risolvono usufruendo esclusivamente della trigonometria piana, sono stati ripresi in esame anche i problemi dell'intersezione inversa ed in particolar modo il problema semplice di Snellius.

Per la risoluzione di tale problema è stato ripreso in esame anche l'impiego della macchina calcolatrice e più precisamente è stato eseguito il confronto fra l'impiego della macchina doppia e quella semplice.

Lo scrivente si è pure dedicato a tali ricerche ed al riguardo ricorda che nel numero 6-7 del 1955 de « Il Geometra Italiano » egli ha illustrato, anche con esempi numerici, la semplificazione del calcolo di un punto determinato per intersezione inversa (problema semplice di Snellius), usufruendo delle coordinate dei punti particolari  $m$  ed  $n$ .

Tali punti particolari permettono infatti di ottenere il quadrante relativo all'azimut gaussiano ( $PB$ ) attraverso il segno del  $\Delta E$  e  $\Delta N$  relativi alle loro coordinate, e non è necessario, quindi, usufruire di un grafico sul quale risulti la posizione dei punti noti rispetto al punto di stazione.

È noto, infatti, che attraverso l'algoritmo del Galkiewicz (1936) è necessario invece usufruire del grafico suddetto per poter stabilire il quadrante relativo all'azimut gaussiano ( $AP$ ), in quanto il valore della tangente di tale azimut risulta noto solamente attraverso un rapporto, positivo o negativo.

Lo scrivente ha inoltre illustrato quali sono le posizioni che può assumere il punto  $P$  di stazione rispetto ai punti noti (trigonometrici)  $A$ ,  $B$ ,  $C$  perché i risultati siano esclusivamente funzione dell'approssimazione insita negli angoli misurati in  $P$  in quanto, come è noto, il problema semplice di Snellius può dar luogo a risultati non conformi all'approssimazione insita negli angoli misurati qualora la posizione di  $P$ , rispetto ad  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , si allontani dai casi di optimum.

È questa un'altra delle ragioni fondamentali che ha notevolmente influito nell'escludere tale problema dai lavori di triangolazione di dettaglio.

Infine ha dimostrato l'ulteriore semplificazione che si raggiunge usufruendo anche del metodo grafico-numerico.

Nel numero 4 (1956), sempre de « Il Geometra Italiano », lo scrivente ha dimostrato come sul piano di Gauss-Boaga si possa anche applicare, con tutto rigore, il metodo dell'intersezione laterale nella determinazione dei punti trigonometrici di dettaglio con un risparmio notevole di lavoro in campagna.

In Italia il metodo numerico per la determinazione dei PP.AA. (punti di appoggio), nei rilevamenti fotogrammetrici sostituisce, già da qualche anno, il metodo grafico che usufruisce della tavoletta pretoriana.

Il problema semplice di Snellius è in particolar modo applicato nel metodo numerico, e, per poter disporre di almeno 4 punti noti in modo da ottenere i relativi controlli, vengono determinati dei punti principali per raffittire la rete trigonometrica.

Si fa notare, al riguardo, che qualora si disponga di soli 3 punti noti, per cui non è possibile ottenere il controllo se eventualmente siano trascritti errati alcuni elementi introdotti in calcolo, è necessario eseguire due stazioni reciprocamente collegate ed applicare perciò il metodo dell'intersezione laterale.

Con tutto ciò la determinazione dei PP.AA. situati in fondo valle, od in terreni ricchi di vegetazione, non è sempre ottenibile anche integrando l'intersezione laterale con la battuta di stadia.

In tali casi è necessario determinare ancora altri punti principali.

*In altri termini il vincolo della posizione dei punti noti rispetto a quello di stazione per poter risolvere il problema semplice di Snellius nelle migliori condizioni, e la necessità di dover usufruire anche di un quarto punto noto, porta di conseguenza che non sempre è possibile che la stazione così determinata venga a trovarsi vicina al P.A. in precedenza prescelto.*

Lo scrivente ha preso allora in esame la possibilità pratica di poter usufruire del problema di Hansen, avendo a disposizione due treppiedi.

La pratica attuazione, però, ha dimostrato la necessità che i due treppiedi siano disposti, rispetto ai punti noti  $A$  e  $B$ , come appare nelle figure 1 e 2 e soprattutto che la

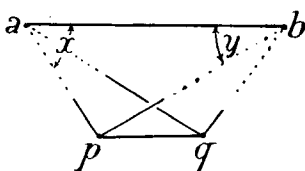


FIG. 1.

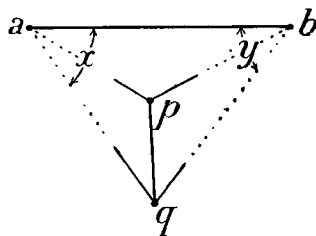


FIG. 2.

distanza  $\overline{PQ}$  non risulti inferiore ai 350 metri, tenendo presente inoltre che anche per il problema di Hansen è necessario poter disporre di un punto noto in più per il relativo controllo di calcolo e di trascrizione.

Come è noto la soluzione analitica del problema di Hansen (e di Snellius) è ottenuta attraverso il rapporto  $\frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$  il cui valore è fornito dal rapporto dei seni degli angoli misurati in campagna in  $P$  ed in  $Q$ , per cui, allontanandosi dai casi su mostrati, o diminuendo la distanza  $\overline{PQ}$ , si possono ottenere risultati non attendibili.

Pertanto anche il problema di Hansen non può essere applicato in tutti i casi e cioè viene a mancare essenzialmente nei casi di maggior utilità ossia qualora i PP.AA. siano situati in fondo valle, od in terreni ricchi di vegetazione.

#### SOLUZIONE DEL PROBLEMA IN OGGETTO.

Nel numero 1 del Bollettino della S.I.F.E.T. del 1951 lo scrivente ha dimostrato come si possa risolvere, con l'impiego della tavoletta pretoriana, il problema composto di Snellius o « problema della doppia intersezione inversa », la cui soluzione analitica è ottenuta a tutt'oggi attraverso il rapporto  $\frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$ .

La soluzione analitica del procedimento grafico dimostrato nel 1951 è l'oggetto della presente comunicante.

Per maggior chiarezza e semplicità di esposizione lo scrivente richiama pertanto la soluzione grafica del problema composto di Snellius.

Per la soluzione del problema in oggetto è necessario associare al punto  $P$  di stazione un secondo punto  $Q$  (come per il problema di Hansen) qualora si disponga di 3 punti noti disposti in modo che da  $P$  risultino visibili solo  $A, B$  e  $Q$  e da  $Q$  solo  $B, C$  e  $P$  (fig. 3).

Ammettendo di aver già risolto il problema si traccino le due circonferenze passanti rispettivamente per  $a, b, p$  e  $b, c, q$  e cioè per i punti immagini dei punti omologhi  $A, B, C, P, Q$  del terreno.

La retta passante per  $q$  e  $p$  incontra le due circonferenze nei punti ausiliari  $r$  ed  $s$

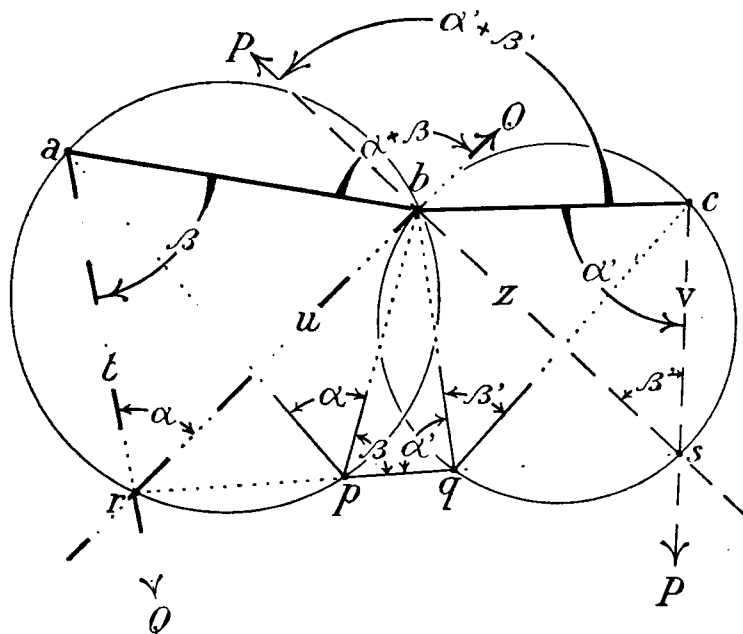


FIG. 3.

Usufruento della tavoletta pretoriana lo scrivente ha dimostrato che dopo aver messo la tavoletta in stazione in  $P$  e collimato a  $B$  rotando lo specchio con la linea di fede dell'alidada disposta secondo  $ab$ , la successiva collimazione a  $Q$  fa disporre la linea di fede dell'alidada secondo la retta  $at$  la quale forma in  $a$ , con  $ab$ , l'angolo  $\beta$  (analiticamente perciò la retta  $at$  è individuata dall'azimut guassiano noto  $(AB) + \beta$ ).

La collimazione a  $Q$  eseguita invece dopo aver collimato ad  $A$  con la linea di fede dell'alidada disposta secondo  $ba$ , fa disporre la linea di fede dell'alidada secondo la retta  $bu$  la quale forma in  $b$ , con  $ba$ , l'angolo  $(\alpha + \beta)$  (analiticamente perciò la retta  $bu$  è individuata dall'azimut guassiano noto  $(BA) + (\alpha + \beta)$ ).

La retta  $bu$  incontra la retta  $at$  precisamente nel punto ausiliario  $r$ .

Infatti del triangolo  $abr$  è stato costruito l'angolo  $\beta$  in  $a$  e l'angolo  $180^\circ - (\alpha + \beta)$  in  $b$ , perciò l'angolo in  $r$  è precisamente l'angolo  $\beta$  e cioè l'angolo  $\hat{A}PB$  misurato in campagna.

Analogamente, dopo aver messo la tavoletta pretoriana in stazione in  $Q$ , si determina il punto ausiliario  $s$  in funzione delle rette  $cv$  e  $bz$  le quali vengono tracciate usu-

fruendo degli angoli  $\alpha'$  ed  $(\alpha' + \beta')$ , e precisamente  $\alpha$  in  $c$ , rispetto alla  $cb$ , ed  $(\alpha' + \beta')$  in  $b$ , rispetto alla  $bc$  (analiticamente perciò tali rette sono individuate in funzione degli azimut gaussiani noti  $(CB) - \alpha'$  e  $(BC) - (\alpha' + \beta')$ ).

Le coordinate gaussiane di  $r$  ed  $s$  sono quindi determinate per intersezione diretta rispettivamente da  $A, B$  in funzione degli azimut gaussiani noti  $(AB) + \beta$  e  $(BA) + (\alpha + \beta)$ , e da  $B, C$  in funzione degli azimut gaussiani noti  $(CB) - \alpha'$  e  $(BC) - (\alpha' + \beta')$ .

Ottenute le coordinate gaussiane di  $r$  ed  $s$  risulta noto anche l'azimut gaussiano  $(PQ) = (rs)$  per quanto su dimostrato.

In funzione degli angoli misurati  $\beta, \alpha$  ed  $\alpha', \beta'$  risultano noti di conseguenza anche gli azimut gaussiani  $(PB), (PA)$  e  $(QB), (QC)$  e cioè gli elementi necessari e sufficienti per determinare le coordinate gaussiane di  $P$  o di  $Q$ , o di ambedue, rispettivamente da  $A, B, C$  usufruendo esclusivamente del metodo della intersezione diretta.

Si fa notare che fra i casi di optimum richiamati nel n. 6-7 de « Il Geometra Italiano », su citato, figura anche quello di seguito riportato (fig. 4).

In tali condizioni è necessario, però, che sussista la relazione:

$$\alpha = \beta = \hat{A}BC = 45^\circ$$

Molto spesso, e non solamente nelle zone costiere, i punti noti disponibili si presentano, rispetto al punto di stazione, pressoché disposti come riportato nella fig. 4, però praticamente il problema non presenta soluzioni possibili in quanto difficilmente si verifica che sia  $\alpha = \beta = \hat{A}BC = 45^\circ$ .

Applicando invece la soluzione analitica su dimostrata tale caso è risolubile ottimamente, anche se non è soddisfatta l'identità su richiamata, e senza sostanziali differenze rispetto a quanto dimostrato attraverso la fig. 3.

Infatti dall'esame delle figure 5 e 6 si nota che gli angoli  $\alpha, \beta$  od  $\alpha', \beta'$  non risultano contigui per cui in tali casi invece di usufruire della loro somma si deve usufruire della loro differenza e precisamente:

$$(Br) = (BA) + (\beta - \alpha) \quad (\text{fig. 5})$$

$$(Bs) = (BC) - (\alpha' - \beta') \quad (\text{fig. 6})$$

e cioè varianti che si ricordano facilmente sia attraverso l'esame della figura schematica sia tenendo presente la soluzione grafica usufruendo della tavoletta pretoriana (i vertici  $A$  e  $C$  possono indifferentemente essere contrassegnati con la lettera  $C$  ed  $A$ ).

Si fa notare infine che nella fig. 7 i punti  $a, b, c, p, q$ , giacciono su di una circonferenza e che in tale caso il problema è maggiormente semplificato poiché i punti ausiliari  $r$  ed  $s$  coincidono rispettivamente con i punti di stazione  $Q$  e  $P$ .

È evidente perciò l'importanza pratica della soluzione analitica su dimostrata che permette di determinare le coordinate gaussiane dei punti ausiliari  $r$  ed  $s$ , e, successivamente, quelle di  $P$  o di  $Q$ , o di ambedue, usufruendo esclusivamente dell'intersezione diretta introducendo in calcolo azimut gaussiani ottenuti direttamente in funzione degli azimut gaussiani noti e degli angoli misurati in  $P$  ed in  $Q$ , e potendo perciò usufruire anche del caso che a tutt'oggi praticamente non può essere preso in considerazione (fig. 4).

È necessario tener presente, infatti, che attraverso la soluzione analitica del problema semplice e composto di Snellius e del problema di Hansen, a tutt'oggi adottata, le coordinate

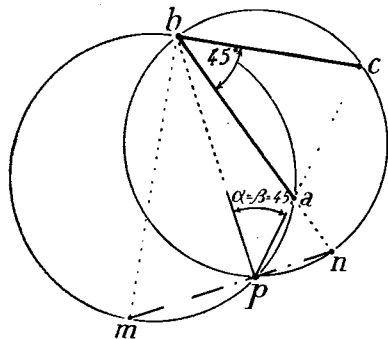


FIG. 4.

gaussiane di  $P$ , o di  $P$  e  $Q$ , sono pure determinate usufruendo dell'intersezione diretta, introducendo in calcolo, però, azimut gaussiani ottenuti in funzione della  $\text{ctg } \lambda = \frac{\sin y}{\sin x}$  (relazione trasformata dal Galkiewicz, per il problema semplice di Snellius, nella

$$\text{tg}(AP) = \frac{-E_A (\text{ctg } \alpha - \text{ctg } \beta) + E_B \text{ctg } \alpha - E_C \text{ctg } \beta + N_C - N_B}{-N_A (\text{ctg } \alpha - \text{ctg } \beta) + N_B \text{ctg } \alpha - N_C \text{ctg } \beta + E_B - E_O}$$

e cioè attraverso azimut gaussiani calcolati in funzione dei seni o delle contingenti degli angoli misurati in  $P$  od in  $P$  e  $Q$ .

La maggiore o minore approssimazione nei risultati non è, perciò, solamente funzione della maggiore o minore approssimazione insita negli angoli misurati, ma soprattutto per il problema semplice di Snellius e per quello di Hansen l'approssimazione nei risultati è esclusivamente funzione della posizione che il punto  $P$ , o  $P$  e  $Q$ , assumono rispetto ai punti noti a disposizione qualora non si usufruisca dei pochi casi di optimum.

È necessario ricordare, con riferimento alla proie-

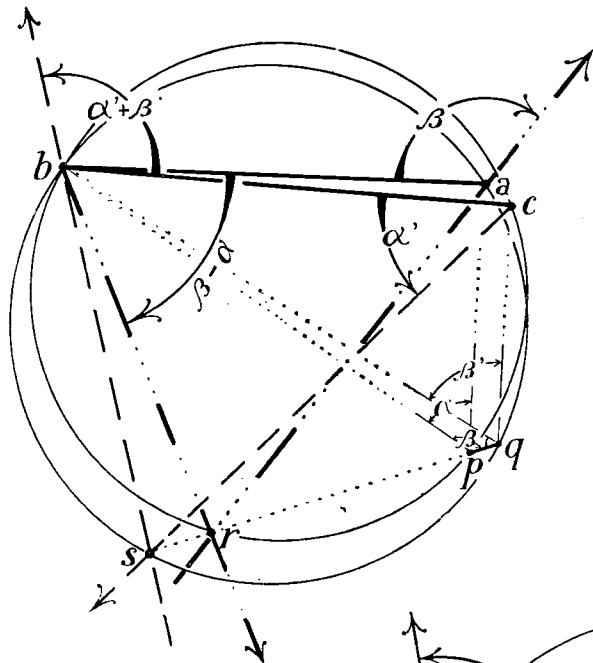


FIG. 5.

zione conforme di Gauss-Boaga, che gli angoli letti in campagna, fra punti distanti 10-15 km, si possono ritenere senz'altro angoli gaussiani. Nei casi limiti, e cioè agli estremi di ciascun fuso, si possono ottenere invece, a tali distanze, delle riduzioni angolari massime di 5"-6" (per ottenere i corrispondenti angoli gaussiani osservati) che praticamente non producono nessuna influenza nella determinazione dei PP. AA.

Nella determinazione dei punti principali, ed eventualmente anche dei punti ausiliari  $r$  ed  $s$ ,

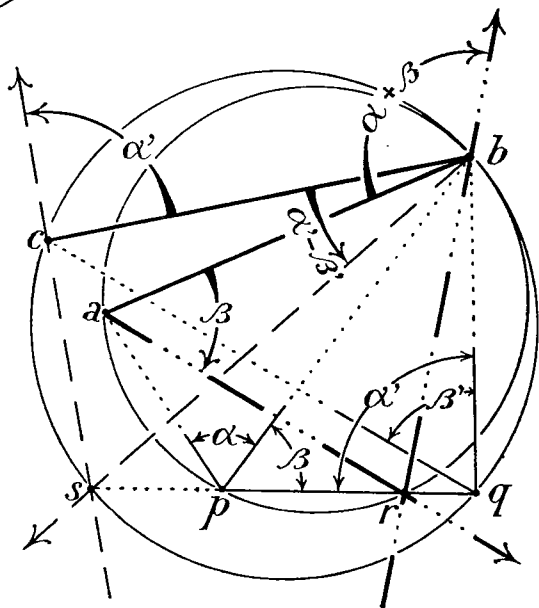


FIG. 6.

l'applicazione di tali riduzioni angolari può invece essere necessaria ed al riguardo si fa presente che non occorre eseguire nessun calcolo, per determinare tali riduzioni potendo usufruire di appositi grafici.

#### CONCLUSIONE.

La soluzione analitica del problema composto di Snellius, su dimostrata, permette:

1° di poter ridurre al minimo il numero degli eventuali punti principali tenendo presente che sulle alture di maggior dominio, ed eventualmente anche sui fabbricati di mole notevole, si possono determinare contemporaneamente due punti principali dato che è possibile risolvere il problema con i punti noti disposti come rappresentato nelle figure 5 e 6.

I punti  $A, C$ , infatti, si possono introdurre in calcolo anche se sono molto vicini fra loro dato che le condizioni necessarie e sufficienti che devono essere soddisfatte in  $P$  ed in  $Q$  sono che gli angoli  $\alpha$  e  $\beta'$  abbiano un'ampiezza sufficiente per determinare le coordinate di  $r, s$  (e conseguentemente quelle di  $P, Q$ ) per intersezione diretta.

Praticamente perciò si riducono a due (invece di quattro) le visuali da realizzare da  $P$  e  $Q$  e, quindi, facilmente realizzabili anche in terreni ricchi di vegetazione o pressoché in fondo valle;

2° di poter disporre di due punti di stazione  $P$  e  $Q$  distanti fra loro secondo le esigenze del terreno in quanto l'angolo d'intersezione per ottenere le coordinate

gaussiane di  $r$  ed  $s$  (e conseguentemente quelle di  $P$  e  $Q$ ) è indipendente dalla maggiore o minore distanza fra  $P$  e  $Q$  che può essere anche solo di 30-40 metri;

3° di poter ottenere il controllo di calcolo e di trascrizione, anche usufruendo di soli tre punti noti, in quanto da  $P$  o da  $Q$ , o da ambedue, è possibile collimare tutti e tre i punti noti. Perciò la direzione  $PC$  o la direzione  $QA$ , che non si introducono in calcolo per determinare le coordinate di  $r$  ed  $s$ , divengono direzioni di controllo qualora siano introdotte nel calcolo delle coordinate di  $P$  o di  $Q$ ;

4° di rendere minime le operazioni di calcolo in quanto le coordinate gaussiane di  $r, s$  e di  $P, Q$  sono ottenute esclusivamente per intersezione diretta da  $A, B, C$ .

E poiché i valori del  $\Delta N$  e  $\Delta E$  relativi ad  $A, B$  e relativi a  $B, C$ , hanno già dato luogo al calcolo degli azimut gaussiani noti ( $AB$ ) e ( $BC$ ), il calcolo di  $r, s$  e di  $P, Q$  è ulteriormente facilitato introducendovi degli elementi già noti e precisamente i suddetti  $\Delta N$  e  $\Delta E$ .

Al riguardo è anche necessario tener presente che attraverso la semplificazione che si può ottenere nel calcolo dell'intersezione diretta, mostrata nel n. 6-7 de « Il Geometra

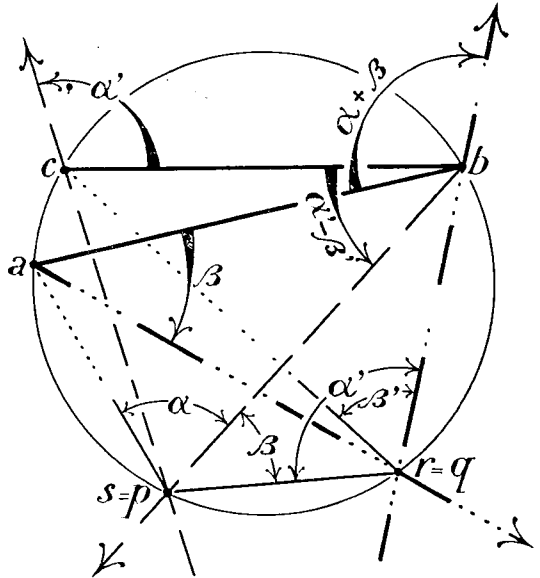


FIG. 7.

Italiano » (1956), si può fare a meno dell'impiego della macchina calcolatrice qualora si usufruisca sia delle tavole dei valori naturali che delle tavole logaritmiche a 7 cifre decimali, in quanto tale semplificazione riduce il calcolo a due prodotti ed un quoziente;

5° di ottenere il controllo di ogni singolo calcolo in quanto gli azimut gaussiani

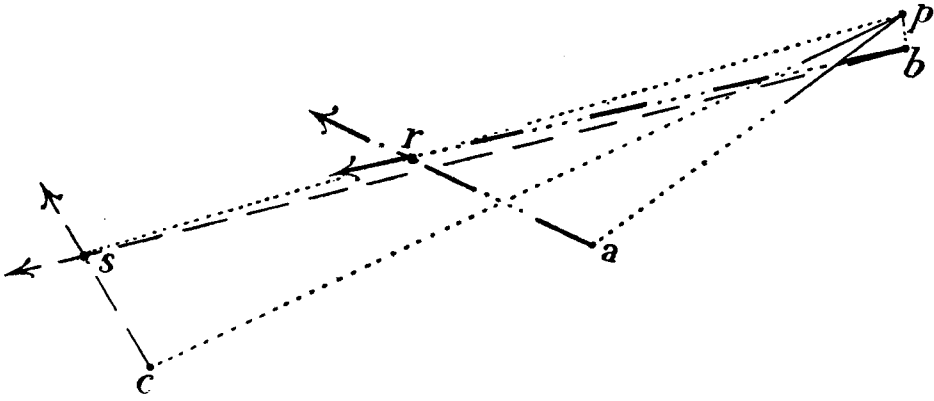


FIG. 8.

in  $P$  e  $Q$  si possono verificare attraverso somme o differenze di angoli diversi, e le coordinate di  $r$  ed  $s$  vengono controllate molto semplicemente prendendo in considerazione la cotangente degli azimut gaussiani oltre che la tangente;

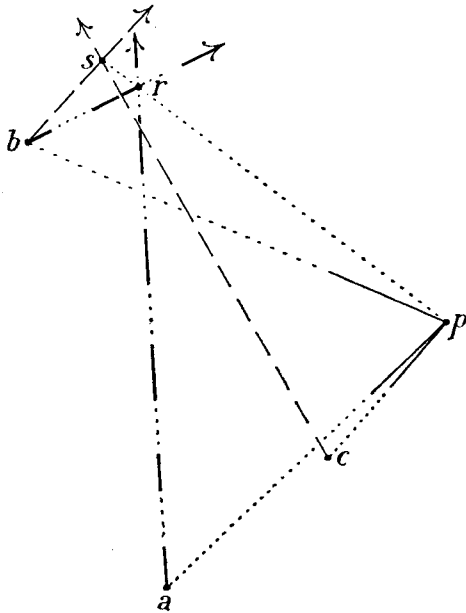


FIG. 9.

6° di eliminare totalmente gli errori dovuti alle battute di stadia poiché, per quanto sopra, è possibile porre con maggior facilità un treppiede vicino al  $P$ . A. anche se tale punto si trova in fondo valle od in zona alberata, e, quindi, possibilità di eseguire misure dirette di eccentricità. In secondo luogo poiché disponendo di due punti di stazione il trasporto delle coordinate avviene attraverso due serie di misure lineari ed angolari ben distinte che eliminano anche qualsiasi errore di calcolo;

7° di ottenere le coordinate dei punti trigonometrici di dettaglio con l'approssimazione che ad essi compete, tenendo presente che in tali casi i punti  $P$  e  $Q$  si identificano con i punti trigonometrici da determinare.

È evidente perciò che potendo ottenere con quattro calcoli d'intersezione diretta addirittura le coordinate comprese (come sarà successivamente dimostrato) di due trigonometrici, viene eliminato praticamente anche qualsiasi soluzione grafico-numerica.