METODO GENERALE PER LA RISOLUZIONE NUMERICA CON LA MACCHINA CALCOLATRICE DEI PROBLEMI DI INTERSEZIONE INVERSA

GEOM. ATTILIO SELVINI

1) GENERALITÀ.

Il problema dei « *quattro punti inaccessibili* » – altrimenti detto « *problema di Marek* » – riassume in se anche quelli di « Snellius » e di « Hansen ». Infatti, con i simboli di fig. 1, si vede chiaramente come si ritrovi il problema di Snellius allorché si faccia coincidere B con C e P con Q; e come si ricada nel caso del problema dei due punti inaccessibili nell'ipotesi che $A \equiv B$ e $C \equiv D$. (Nel caso che sia solo $B \equiv C$, si avrà il problema di Pothenot ampliato).

È universalmente nota la soluzione classica di Burckhardt per il problema di Snellius, come del resto la sua estensione alla risoluzione di quello di Hansen. Quest'ultimo poi può essere facilmente risolto col procedimento detto « della base fittizia », concettualmente assai semplice. Il caso dei « quattro punti inaccessibili » porta ad una soluzione attraverso la considerazione di alcuni triangoli e delle coordinate di due punti ausiliari, che, se non è difficile, è però abbastanza lunga. Sono note diverse soluzioni rapide e comunque adatte al calcolo con la macchina e con le tavole dei valori naturali delle funzioni trigonometriche, dei problemi di Hansen e Snellius. Per quest'ultimo poi è stata pubblicata sul n. 3, 1956 del presente Bollettino una soluzione dello scrivente, ed è stata pure ricordata – dalla Redazione – la soluzione proposta da V. Galkiewicz, certamente assai rapida.

Le formule che seguono, ricavate in maniera alquanto semplice, si prestano alla soluzione – seguendo un unico criterio generale – di tutta la serie dei problemi ricordati. Esse sono convenienti nel caso del « Marek » abbreviando il calcolo consuetudinario; assai convenienti nel caso del problema di Hansen, per la loro successiva semplificazione. Meno utile risulta la loro applicazione per la soluzione dello « Snellius », dato che esistono altri metodi (tra cui quelli ricordati) certamente più rapidi.

Tutte le formule, comunque, sono state ricavate con i procedimenti insegnati dalla geometria analitica, e con l'ausilio delle coordinate (calcolate) dei punti R ed S, i quali godono della proprietà di essere allineati con i punti P e Q, oltre a quella di appartenere alle circonferenze risolventi graficamente tutt'e tre i problemi.

2) SOLUZIONE CON LA MACCHINA CALCOLATRICE DEL PROBLEMA DI MAREK.

Elementi assegnati, o comunque noti:

$$\textit{coordinate}_4 \quad X_A,\ Y_A,\ X_B,\ Y_B,\ X_C,\ Y_C,\ X_D,\ Y_D;$$
$$\text{angoli: } A\hat{P}B = \alpha;\ A\hat{P}Q = \beta;\ P\hat{Q}C = \gamma;\ C\hat{Q}D = \delta;$$

Per determinare le coordinate dei punti incogniti P e Q si procederà come segue:

A) *Calcoli preliminari:*

Riferire le coordinate dei punti B, C, D, al sistema cartesiano traslato in A: $x_B = X_B - X_A$; $y_B = Y_B - Y_A$; ecc., essendo uguali a zero x_A e y_A quindi trovare gli angoli di direzione

$$(AB) = \operatorname{arctg}\ (x_B : y_B)$$
$$(CD) = \operatorname{arc\,tg}\ (x_D - x_C) : (y_D - y_C)$$

B) *Ricerca di valori naturali sulle tavole trigonometriche:*

$$m_1 = tg\,(\Theta_{AB} + \beta);\ m_2 = tg(\Theta_{AB} + \alpha + \beta);\ m_3 = tg(\Theta_{CD} - \gamma - \delta);\ m_4 = tg(\Theta_{CD} - \gamma)$$

$$n_1 = tg(\alpha + \beta);\ n_2 = tg\gamma$$

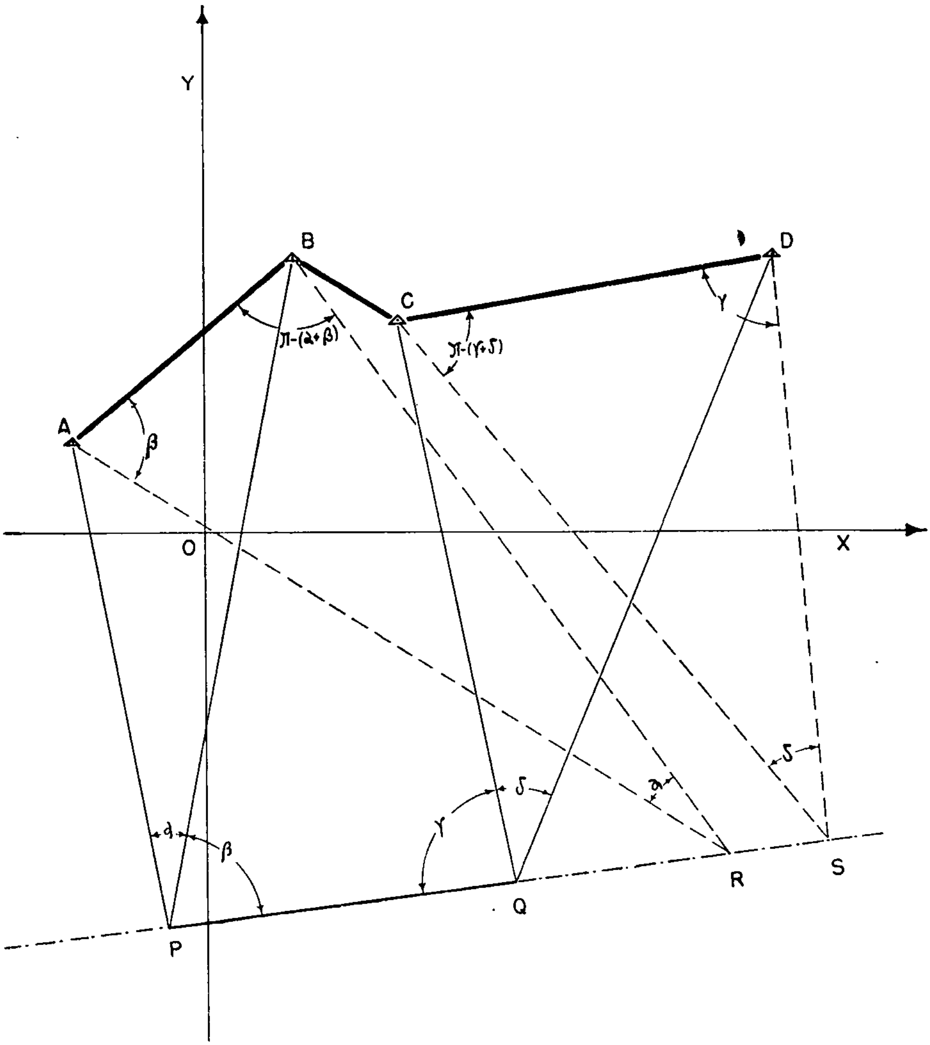

FIG. 1.

C) *Calcolo delle coordinate dei punti ausiliari R ed S:*

$$\begin{cases} y_R = (x_B - m_2 y_B) : (m_1 - m_2) \\ x_R = m_1 y_R \end{cases} \qquad \begin{cases} y_S = (x_D - x_C + m_3 y_C - m_4 y_D) : (m_3 - m_4) \\ x_S = x_C + m_3\,(y_S - y_C) \end{cases}$$

D) *Calcolo di coefficienti con la macchina:*

$$m_5 = (x_S - x_R) : (y_S - y_R) \qquad m_6 = (m_5 - n_1) : (1 + m_5 n_1)$$

$$m_7 = (m_5 + n_2) : (1 - m_5 n_2)$$

E) *Determinazioni delle coordinate parziali dei punti P e Q:*

$$\begin{cases} y_P = (x_R - m_5 y_R) : (m_6 - m_5) \\ x_P = m_6\, y_P \end{cases} \qquad \begin{cases} y_Q = (x_R - x_C - m_5 y_R + m_7 y_C) : (m_7 - m_5) \\ x_Q = x_C + m_7\,(y_Q - y_C) \end{cases}$$

F) *Determinazione delle coordinate totali dei punti P e Q:*

$$X_P = X_A + x_P;\ Y_P = Y_A + y_P;\ X_Q = X_A + x_Q;\ Y_Q = Y_A + y_Q$$

La giustificazione delle formule proposte è assai semplice.

I valori contraddistinti con la lettera m seguita dagli indici 1, 2, 3, 4, sono rispettivamente i coefficienti angolari delle rette $\overline{AR}$, $\overline{BR}$, $\overline{CS}$. $\overline{DS}$ m_6 ed m_7 sono i coefficienti delle rette $\overline{AP}$ e $\overline{QC}$, ricavati attraverso la formula che fornisce l'angolo di due rette note:

$$tg\ \emptyset = (m - m_i) : (1 + m\, m_i)$$

da cui si trae m_i, sostituendo al posto di m generico, il coefficiente angolare m_5 della retta $\overline{RS}$, ed al posto di «$tg\ \emptyset$» i valori n_1 ed n_2, rispettivamente tangenti degli angoli $(\alpha + \beta)$ e γ.

Inutile dire come le coordinate dei punti P e Q siano poi facilmente ricavabili, note le equazioni delle rette $\overline{RS}$, $\overline{AP}$ e $\overline{CQ}$, e come – essendo esse riferite ad A in cui si è traslata l'origine degli assi – per riferirle ad Q debbano essere sommate alle coordinate di A.

3) Soluzione del problema di Hansen con la macchina calcolatrice.

Elementi assegnati o comunque noti:

coordinate X_A, Y_A; X_B, Y_B; *angoli*: $B\hat{P}Q = \alpha_1$; $A\hat{P}Q = \beta_1$; $P\hat{Q}B = \alpha_2$; $P\hat{Q}A = \beta_2$

Le coordinate dei due punti incogniti P, Q, si determinano come segue:

A) *Calcoli preliminari:*

$$(AB) = arctg\ (x_B - x_A) : (y_B - y_A);\ \text{sen}\ (AB) = t;\ \cos\ (AB) = u$$

$$\overline{AB} = (x_B - x_A) : t = (y_B - y_A) : u$$

B) *Ricerca di valori naturali sulle tavole trigonometriche:*

$$m_1 = - cotg\alpha_1;\ m_2 = - cotg\beta_1;\ m_3 = cotg\alpha_2;\ m_4 = cotg\beta_2$$

C) *Calcolo di coefficienti con la macchina:*

$$a = m_1 - m_2;\ b = m_3 - m_4;\ m_5 = (a\ m_3 - b\ m_1) : (a - b)$$

$$c = \overline{AB}\ (m_1 - m_5) : a;\ m_6 = (m_2\ m_5 + 1) : (m_2 - m_5);$$

$$m_7 = (m_4\ m_5 + 1); (m_4 - m_5)$$

D) *Calcolo delle coordinate parziali dei punti* P *e* Q*:*

$$\begin{cases} y'_P = c : (m_6 - m_5) \\ x'_P = m_6 \cdot y'_P \end{cases} \qquad \begin{cases} y'_Q = c : (m_7 - m_5) \\ x'_Q = m_7 \cdot y'_Q \end{cases}$$

E) *Calcolo delle coordinate totali dei punti* P *e* Q*:*

$$\begin{cases} X_P = X_A + x'_P\ t - y'_P\ u; \\ Y_P = Y_A + x'_P\ u + y'_P\ t; \end{cases} \qquad \begin{cases} X_Q = X_A + x'_Q\ u - y'_Q u; \\ Y_Q = Y_A + x'_Q\ u + y'_Q\ t; \end{cases}$$

In questo caso è da notare come sia stato possibile abbreviare il calcolo, trascurando di trovare in forma esplicita le coordinate di R ed S (però implicitamente presenti nel calcolo) e ruotando (oltreché traslare) gli assi cartesiani in modo da far coincidere il semiasse delle ascisse positive con la base nota $\overline{AB}$.

Rispetto al nuovo sistema di riferimento, i valori « m » hanno ancora il significato del caso precedente: sono i coefficienti angolari delle rette $\overline{AR}$, $\overline{BR}$, $\overline{AS}$, $\overline{BS}$, $\overline{RS}$, $\overline{AP}$, $\overline{AQ}$.

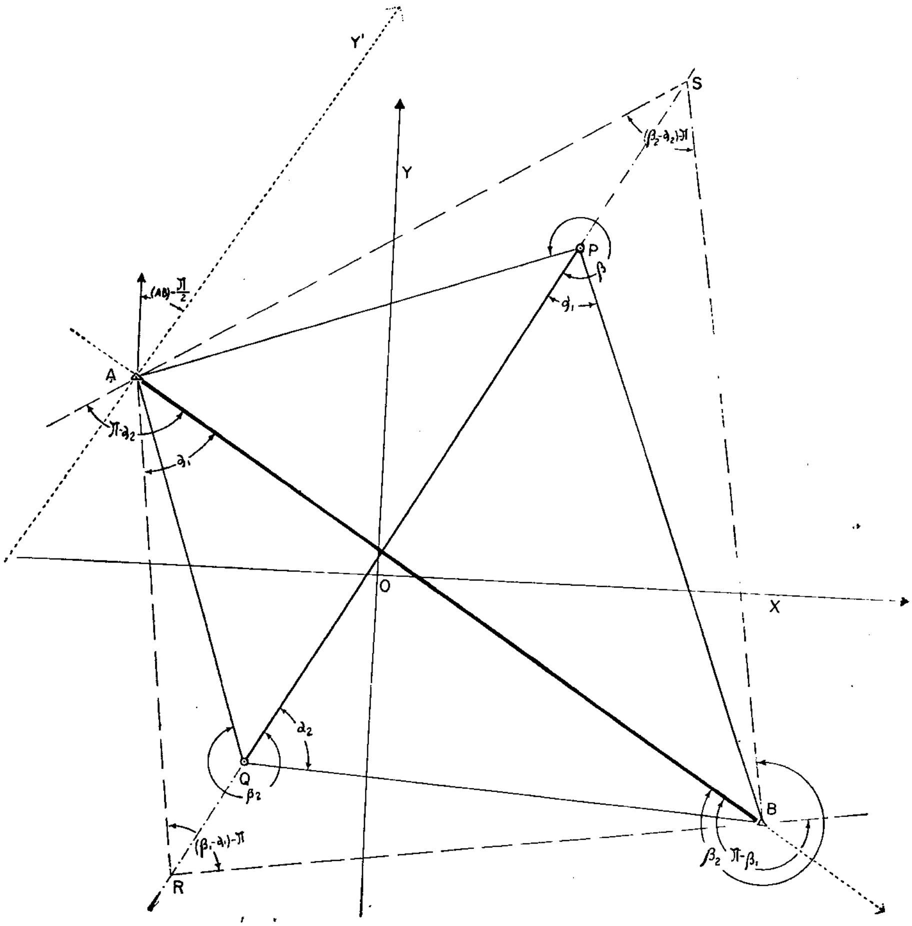

FIG. 2.

Graficamente il problema è già risolto al punto D): infatti è già ivi possibile individuare sul grafico i punti P e Q. Volendo le coordinate riferite al sistema assegnato, con le note formule riportate al punto E) si completa la soluzione.

4) SOLUZIONE CON LA MACCHINA CALCOLATRICE DEL PROBLEMA DI SNELLIUS.

Elementi assegnati o comunque noti:

coordinate: X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C, Y_C, angoli: $A\hat{P}B = \alpha$; $B\hat{P}C = \beta$;

Per determinare le coordinate incognite del punto P si procede come segue:

A) *Calcoli preliminari:*

Riferire le coordinate di B e C ad A preso come origine del sistema di assi cartesiani:

$$X_B - X_A = x_B\,;\quad Y_B - Y_A = y_B\,;\quad X_C - X_A = x_C\,;\quad Y_C - Y_A = y_C\,;$$

quindi calcolare gli angoli di direzione:

$$(AB) = arctg\ (x_B : y_B);\ (BC) = arctg\ (x_C - x_B) : (y_C - y_B)$$

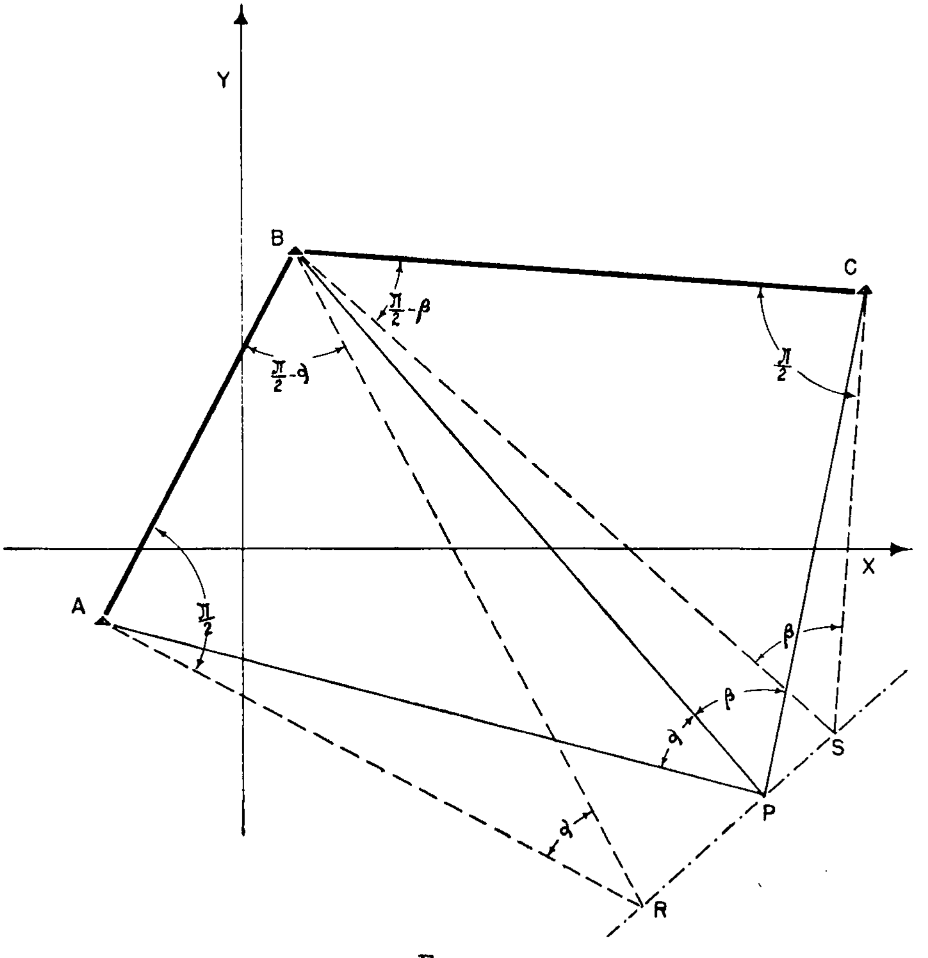

FIG. 3.

B) *Ricerca di valori naturali con le tavole trigonometriche:*

$m_1 = ctg\ (AB)$; $m_2 = -\ ctg\ (\varnothing_{AB} + \alpha)$; $m_3 = ctg\ (\varnothing_{BC} - \beta)$; $m_4 = ctg(BC)$ $n_1 = ctg\alpha$

C) *Calcolo delle coordinate dei punti ausiliari R ed S:*

$$\begin{cases} y_R = (m_2\, y_B - x_B) : (m_1 + m_2) \\ x_B = -\, m_1\, y_R \end{cases} \qquad \begin{cases} y_S = (x_C - x_B + m_3\, y_B + m_4\, y_C) : (m_3 + m_4) \\ x_S = x_B + m_3\ (y_S - y_B) \end{cases}$$

D) *Calcolo con la macchina di coefficienti:*

$$m_5 = (x_S - x_R) : (y_S - y_R); \quad m_6 = (m_5 + n_1) : (1 - m_5 n_1)$$

E) *Calcolo delle coordinate parziali del punto* P *:*

$$\begin{cases} y_P = (x_R - m_5 y_R) : (m_6 - m_5) \\ y_P = m_6 y_P \end{cases}$$

F) *Calcolo delle coordinate totali del punto* P *:*

$$X_P = X_A + x_P; \qquad Y_P = Y_A + y_P;$$

Nulla dl particolare da aggiungere a quanto detto dei due casi precedenti: lo sviluppo del calcolo è evidente, con l'ausilio della fig. 3. Ricercate ed ottenute le coordinate di R ed S, con i coefficienti angolari delle rette $\overline{AR}$, $\overline{BR}$; $\overline{BS}$, $\overline{CS}$ (rispettivamente m_1, m_2, m_3, m_4) si ottiene quello della $\overline{RS}$, Quindi ,attraverso n_1, il coefficiente angolare m_4 della retta $\overline{AP}$ che permette di ricavare le coordinate di P.

Per il controllo (anche nei casi precedenti) è possibile scrivere semplici formule analoghe a quelle fornite, considerando la retta $\overline{BP}$ o $\overline{CP}$, nel caso presente; le rette $\overline{BP}$ e BQ per Hansen; e BP e DQ per Marek.

Collegamento di due stazioni celerimetriche non visibili fra di loro e distanti più della normale battuta di stadia

GEOM. ATTILIO SELVINI

È noto come il collegamento di due stazioni celerimetriche che distino più della normale battuta di stadia (ma meno del doppio) e che non siano visibili fra di loro, venga effettuato col metodo del Porro; metodo che è concettualmente assai semplice, ma che porta a calcoli dallo sviluppo piuttosto lungo. Vale la pena, per meglio inquadrare quanto sto per dire, di riassumere qui di seguito le operazioni necessarie, secondo Ignazio Porro, per il collegamento in oggetto.

Rilevati i numeri generatori di due punti P, Q, scelti in modo da essere visibili da entrambe le stazioni da collegare, dalla prima di queste due, si trasporta lo strumento (tacheometro od autoriduttore) sulla seconda. Di qui, dopo aver nuovamente battuti i due punti prescelti, si continua il rilevamento dei punti di dettaglio. Le operazioni da eseguirsi a tavolino, per avere i dati necessari al collegamento (coordinate della stazione S_2 rispetto al sistema di riferimento, o semplicemente rispetto ad S_1, e correzione d'orientamento δ da apportare a tutti gli angoli di direzione misurati da S_2), consistono in ciò.

Con riferimento alla figura, si calcolano le distanze S_1P ed S_1Q, quindi le coordinate parziali dei due punti ausiliari: x_P, y_P, z_P; ed x_Q, y_Q, z_Q. Si trova poi, attraverso le prime due di dette coordinate, il valore dell'azimut (PQ).

Con analogo procedimento si calcolano le coordinate di P e Q, riferite però al sistema d'assi avente il semiasse positivo delle ordinate, orientato secondo la direzione del diametro 0-200^c del cerchio azimutale dello strumento in S_2. Con tali coordinate si calcola il valore dell'azimut $(PQ)^0$, riferito alla nuova direzione d'orientamento. La differenza tra (PQ) e $(PQ)^o$ fornisce il valore della correzione da apportare agli angoli di direzione misurati in S_2. Effettuata tale operazione per le direzioni S_2P ed S_2Q, si ricalcolano le coordinate di P e Q rispetto ad S_2; indicandole con x''_P, y''_P... eccetera, si otterranno le coordinate di S_2 riferite ad S_1, con le somme algebriche:

$$x_{S_2} = x_P - x''_P \; ; \; y_{S_2} = y_P - y''_P \ldots$$

È chiaro che le quote (z_{S_2}, z_P, ecc.) sono indipendenti dall'orientamento in S_2 per cui il collegamento altimetrico si ottiene più rapidamente.

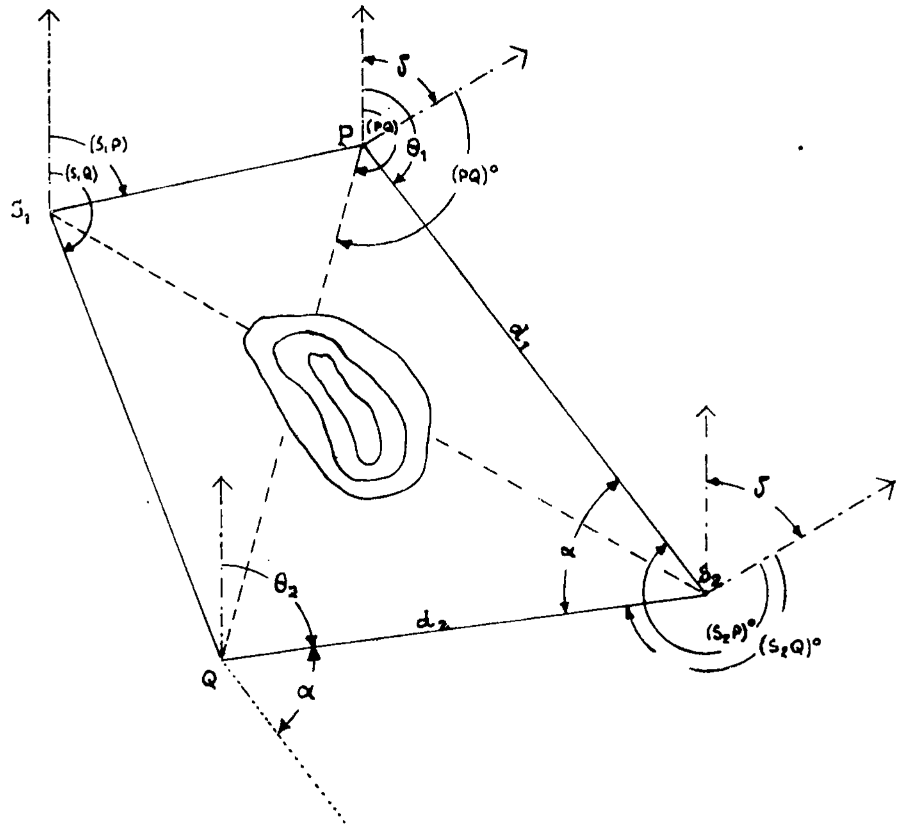

FIG. 1.

Per quanto riguarda il collegamento planimetrico, esso può ottenersi in maniera assai più rapida della precedente, con le formule ed il procedimento che seguono.

Dapprima si calcolano le coordinate di P e Q rispetto ad S_1, come nel caso che è stato esposto sopra. Chiamato con θ_1 l'azimut incognito del lato PS_2, esso potrà facilmente aversi con la equazione:

$$tg \tfrac{1}{2} \theta_1 = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - rq}}{q} \qquad 1)$$

ove si è posto:

$$m = d_2 \cos \alpha - d_1;\ p = d_2 \operatorname{sen} \alpha;\ q = x_P - x_Q - p;\ r = x_P + x_Q + p$$

noto θ_1, si otterrà subito la correzione d'orientamento:

$$\delta = \theta_1 \pm \pi - (S_2 P)^0$$

ove i simboli sono quelli della figura. Le coordinate di S_2 rispetto ad S_1 sono quindi subito calcolabili:

$$x_{S_2} = x_P + d_1 \operatorname{sen} \theta_1;\ y_{S_2} = y_P + d_1 \cos \theta_1$$

Per controllo si farà:

$\theta_2 = \theta_1 - \alpha$; e quindi si ricalcoleranno le coordinate di S_2 attraverso la distanza d_2.

Il procedimento suggerito viene giustificato con la seguente esposizione.

Sempre con i simboli della figura, risulta chiara la relazione $\theta_2 = \theta_1 - \alpha$.

Assumendo come incognita θ_1, si avrà il sistema:

$$\begin{cases} x_{S_2} = x_P + d_1 \operatorname{sen} \theta_1 \\ x_{S_2} = x_Q + d_2 \operatorname{sen} (\theta_1 - \alpha) \end{cases}$$

per cui, uguagliati i secondi membri, e sviluppato sen $(\theta_1 - \alpha)$, si ottiene l'equazione:

$$d_2 \operatorname{sen} \alpha \cos \theta_1 + (d_1 - d_2 \cos \alpha) \operatorname{sen} \theta_1 + x_P - x_Q = O$$

e tenendo conto delle posizioni precedenti m e p ed essendo:

$$\operatorname{sen} \theta_1 = \frac{2 tg\ \frac{1}{2}\theta_1}{1 + tg^2\ \frac{1}{2}\theta_1};\ \cos \theta_1 = \frac{1 - tg^2\ \frac{1}{2}\theta_1}{1 + tg^2\ \frac{1}{2}\theta_1}$$

l'equazione diventa:

$$(x_P - x_Q)\ tg^2\ \tfrac{1}{2}\theta_1 - p\ tg^2\ \tfrac{1}{2}\theta_1 - 2m\ tg\ \tfrac{1}{2}\theta_1 + x_P - x_Q + p = O$$

ed infine, per le posizioni dianzi fatte per q ed r essa si trasforma nella

$$q\ tg^2 \tfrac{1}{2}\theta_1 - 2m\ tg \tfrac{1}{2}\theta_1 + r = O$$

che risolta fornisce il valore di θ_1 attraverso la 1).

I passaggi e le operazioni successive sono già noti, e non necessitano di commento.

L'indeterminazione dovuta al segno posto davanti al radicale, nella 1), sparisce conoscendo la posizione di S_2 sul terreno.