

ERRORI DOVUTI ALLA SFERICITÀ, NELLA MISURA  
DELLA COORDINATA Z SUL MODELLO OTTICO.

In quanto all'aspetto altimetrico della sfericità notiamo che con l'operazione « orizzontamento » ci mettiamo nelle condizioni geometriche di misurare le quote sul modello ottico uguali a quelle del rilevamento diretto sul terreno. Infatti orizzontando il modello ottico veniamo a misurare le quote, come nel caso terrestre a partire da un piano tangente alla sfera locale; in realtà il piano  $Z = 0$  dei punti  $a, b, c$  (che ha come corrispondente strumentale la giacitura  $XY$ ), cui abbiamo precedentemente accennato (fig. 2), è un piano secante la sfera locale ( $H = 0$ ); e quindi può apparire che la correzione vada apportata negativamente ai punti interni al triangolo  $a, b, c$ , come il punto  $O$ , e positivamente ai punti a questo esterni, come  $D$ . Ma è evidente che con una traslazione del detto piano (che strumentalmente corrisponde ad una traslazione dell'*origine* delle quote) possiamo portarlo ad essere tangente alla sfera locale; con il che avremo che tutte le correzioni di sfericità sono positive come nel caso terrestre. Nel caso fotogrammetrico il punto  $O$  di tangenza, dove la correzione è nulla, è un punto del modello situato all'interno del triangolo dei tre punti,  $A, B, C$  che sono serviti ad orizzontarlo, la sua posizione dipende dalla conformazione di questo triangolo. Sui tre punti  $A, B, C$  e su qualsiasi altro punto la correzione di sfericità da apportare è uguale a quella del caso terrestre.

Più generalmente si può osservare che il punto  $O$  di tangenza può essere scelto arbitrariamente sul modello ottico; ossia la giacitura strumentale  $XY$  può corrispondere ad uno qualsiasi dei piani tangenti alla porzione da considerare di sfera locale. Sempre, anche nel caso fotogrammetrico, la correzione  $s$  di sfericità viene data, punto per punto, dalla formula stessa del caso terrestre, che, come è noto, è

$$(I) \quad s = \frac{D^2}{12,75}$$

In essa il raggio terrestre è considerato pari a 6375 km; la correzione  $s$ , espressa in *metri*, è proporzionale al quadrato della distanza  $D$ , espressa in km, fra il punto considerato ed il punto di tangenza assunto sul piano strumentale  $XY$ .

TETTO DI VOLO AL DI SOPRA DEL QUALE È NECESSARIO  
TENERE CONTO DELLA CORREZIONE DI SFERICITÀ  
NELLA DETERMINAZIONE DELLE QUOTE.

Concludendo possiamo asserire che nella restituzione di una coppia di fotogrammi gli errori planimetrici dovuti alla sfericità terrestre sono largamente tollerabili per quanto grande possa essere sul terreno l'estensione del modello ottico; è inutile per ora considerare modelli più estesi del campo topografico in quanto, con le attuali camere grandangolari in uso, per ottenere un modello con una dimensione di 50 km sarebbe necessario portare la camera di presa a circa 30.000 metri di quota.

Invece possiamo asserire che gli errori altimetrici dovuti alla sfericità sono sensibili in un campo assai ristretto; al di fuori di tale campo bisogna quindi procedere alla correzione di tali errori, nella medesima misura che nel rilevamento terrestre.

Per determinare l'ampiezza di tale campo, si parta dalla convenzione che la correzione di sfericità debba essere apportata quando essa, in un modello, assuma un valore *massimo* uguale alla metà di quello dell'errore medio altimetrico, relativo alla quota di volo, del procedimento fotogrammetrico in tutto il suo complesso. Ciò in considerazione che il cosiddetto errore di sfericità si presenta evidentemente come un errore a carattere sistematico. Consideriamo inoltre, per semplicità, che il detto errore medio altimetrico sia lineare rispetto

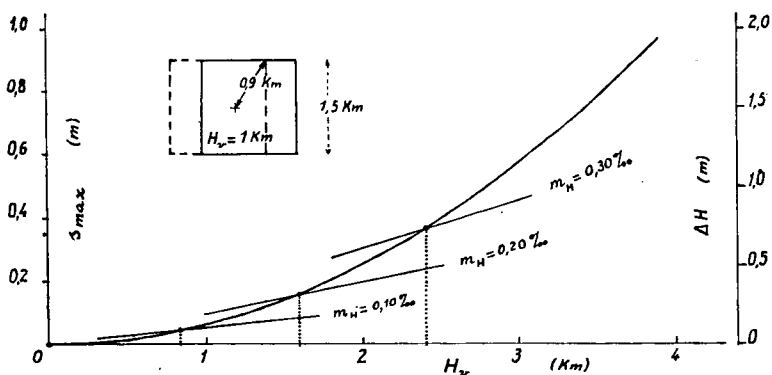


FIG. 3.

alla quota di volo, come in realtà avviene con buona approssimazione alle basse quote di volo, che come vedremo, sono quelle da considerare.

Nella figura 3 la curva rappresenta la variazione dell'errore massimo di sfericità  $s_{\max}$  (in ordinata, a sinistra, espresso in metri) che presenta un modello ottico, in funzione della quota di volo  $H_v$  (in ascissa, espressa in km); il modello ottico, che viene considerato tangente al piano strumentale  $X Y$  in un punto centrale, è formato da fotogrammi di 152 mm di focale, con  $2/3$  di sovrapposizione. Nella figura 3 stessa ognuna delle tre rette rappresenta la variazione dell'errore medio in quota  $\Delta H$  (in ordinata, a destra, espresso in metri), in funzione della quota di volo  $H_v$  (in ascissa, espressa in km), ognuna corrispondente ad una assegnata precisione del metodo fotogrammetrico; le tre precisioni considerate sono quelle aventi un errore altimetrico medio quadratico  $m_H$  di 0,10 ‰, 0,20 ‰, 0,30 ‰ della quota di volo  $H_v$ .

Siccome abbiamo considerato per le ordinate che esprimono gli errori medio altimetrici una scala metà di quella che esprime le correzioni di sfericità, il valore limite delle quote di volo, ossia il « tetto di volo » al di sopra del quale è necessario tenere conto della correzione di sfericità, lo troviamo, per ogni livello di precisione fotogrammetrica, in corrispondenza del punto di incontro

della corrispondente retta con la curva. Per le precisioni dello 0,10 ‰, 0,20 ‰, 0,30 ‰ della quota di volo, troviamo un tetto di volo di circa 820 m, 1600 m e 2400 m rispettivamente.

Come si vede questi tetti di volo sono assai bassi, tanto da dovere concludere che, con le grandi precisioni oggi realizzabili in fotogrammetria, conviene ormai tenere sempre conto della correzione di sfericità.

#### APPLICAZIONE PRATICA DELLA CORREZIONE DI SFERICITÀ ALLE QUOTE DETERMINATE FOTOGAMMETRICAMENTE.

Distinguiamo la determinazione fotogrammetrica delle quote eseguita numericamente, per collimazione di ogni punto isolato, dal tracciamento delle curve di livello. Nel primo caso la correzione di sfericità può essere apportata alle letture strumentali  $Z$  dall'operatore, volta per volta in base ad una semplice tabella numerica; nel tracciamento delle curve di livello la tolleranza è più ampia che nella determinazione numerica di punti isolati e quindi il tetto di volo è più alto; ma se questo venisse superato, la correzione da dare alla  $Z$  imposta, da parte dell'operatore, riuscirebbe, non difficile, ma di intralcio nella restituzione. Infatti l'operatore dovrebbe ogni tanto ricavare dalla detta tabella la correzione di sfericità in funzione della distanza della punta tracciante da un certo punto fisso della carta (punto di tangenza), ed applicarla alla lettura  $Z$  della quota della curva di livello che sta tracciando.

Ma per sollevare l'operatore dalle dette operazioni, è necessario ormai che ogni moderno apparato di restituzione abbia la possibilità di correggere automaticamente della sfericità le coordinate  $Z$  misurate dal suo coordinatometro, in modo da fornire direttamente alla lettura le quote vere dei punti.

#### IL CORRETTORE AUTOMATICO NISTRI DI SFERICITÀ.

Il correttore automatico Nistri di sfericità (brevetto italiano n. 565.360 del 19 dicembre 1956) può essere applicato allo « elettronumeratore Nistri » e quindi non solo al Fotostereografo Nistri mod. BETA/2, di cui l'elettronumeratore fa parte, ma anche a qualsiasi strumento restitutore nel quale la misura delle coordinate venga effettuata da viti. Infatti l'elettronumeratore Nistri può essere applicato a tali restitutori mediante un « el-comando Nistri ». Naturalmente il correttore può essere applicato anche all'« elettroregistratore Nistri ».

L'elettronumeratore Nistri offre alla lettura, sui suoi tre contatori, le coordinate  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  misurate sul coordinatometro del restitutore, trasformate in metri (o in piedi inglesi) sul terreno secondo il rapporto di scala del modello ottico. Il correttore che ci accingiamo a descrivere corregge automaticamente la coordinata  $Z$  di ogni punto collimato dalla marca nello strumento restitutore, in funzione del quadrato della distanza di detto punto da un punto parti-

lare del modello ottico, al quale si attribuisce correzione  $s$  uguale a zero; ossia dal punto in cui, arbitrariamente, si considera che il piano  $XY$  del coordinatometro sia tangente alla sfera locale. Si può assumere per tale punto di tangenza un punto qualsiasi  $O$  ( $M, N$ ), che conviene scegliere nella zona centrale del modello ottico, corrispondente alle letture  $M, N$  sui contatori di coordinate  $X$  e  $Y$ .

Un punto qualsiasi del modello di coordinate  $X + M, Y + N$  dista quindi dal punto  $O$  di

$$D = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

in modo che la sua correzione in quota dovuta alla sfericità è

$$s = \frac{X^2 + Y^2}{12,75},$$

con  $s$  in metri ed  $X, Y$  in km.

Il dispositivo è formato dei seguenti organi che sono rappresentati schematicamente nella figura 4, dove per semplicità, non sono rappresentati i supporti degli assi e le guide delle aste.

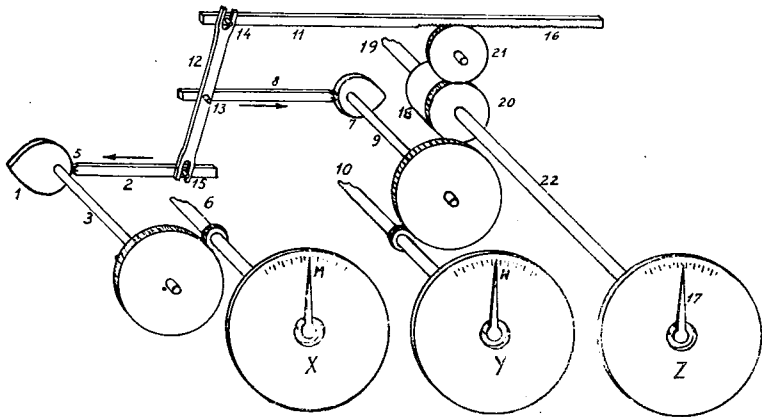


FIG. 4.

1) Un eccentrico 1 ed un'asta 2. L'asta può subire traslazioni sul suo asse in funzione delle rotazioni dell'eccentrico 1 intorno all'asse 3 su cui è montato; la posizione dell'asta è così determinata dal contatto continuo (in virtù di una molla non rappresentata in figura) della rotella 5 sul contorno dell'eccentrico. Il contorno dell'eccentrico risponde all'equazione, in coordinate polari ( $r$  = raggio vettore,  $\alpha$  = anomalia)

$$r = c + h \alpha^2$$

in cui  $c$  ed  $h$  sono costanti arbitrarie positive.

L'asse 3 dell'eccentrico 1 è collegato all'asse 6 di rotazione del contatore delle coordinate  $X$ ;

a) in un rapporto  $q$  arbitrario, ma tale che per tutte le escursioni  $X$  sul modello ottico l'asse 3 compia meno di una rotazione completa;

b) in una determinata fase, in modo cioè che i due assi 6 e 3, quando si trovano in corrispondenza del valore  $\alpha = 0$  della rotazione di 3, si abbia sul contatore  $X$  la lettura  $M$  del punto di origine  $O$ .

Allora per tutti i punti del modello ottico, che hanno ascissa  $X + M$ , la traslazione  $t_x$ , subita dall'asta 2 quando l'eccentrico 1 ruota dalla posizione

$$\alpha_0 = 0 \quad (\text{coordinata } M \text{ sul contatore})$$

alla posizione

$$\alpha = \frac{X}{q d} 2 \pi \quad (\text{coordinata } X + M \text{ sul contatore})$$

è uguale alla differenza fra il raggio vettore

$$r = c + h \alpha^2 = c + h \frac{X^2}{q^2 d^2} 4 \pi^2$$

e quello

$$r_0 = c + h \alpha_0 = c$$

ossia a

$$t_x = \frac{4 \pi^2}{q^2 d^2} h X^2 \quad ;$$

in questa formula  $d$  rappresenta la lunghezza in km, sul terreno, rappresentata da un giro completo dell'indice del contatore delle  $X$ .

Quindi la traslazione dell'asta 2 è proporzionale al quadrato delle ascisse  $X$  dei punti, rispetto al centro  $O$ , secondo il rapporto

$$h \frac{4 \pi^2}{q^2 d^2}$$

2) Un eccentrico 7 ed un'asta 8, parallela a quella 2. Essi sono in tutto analoghi ai precedenti nella disposizione e nel funzionamento, ad eccezione dei seguenti elementi:

a) che l'eccentrico 7 è calettato su un asse 9 che è collegato, sempre secondo il medesimo rapporto  $q$ , all'asse 10 del contatore delle coordinate  $Y$ ;

b) che il senso della traslazione dell'asta 8, quando il raggio vettore dell'eccentrico 7 passa dal minimo al massimo, è opposto a quello della traslazione dell'asta 2, quando per l'eccentrico 1 si verifica la medesima circostanza;

c) che delle costanti arbitrarie, corrispondenti a quelle  $c$  ed  $h$  dell'eccentrico 1, la prima nell'eccentrico 7 è ancora arbitraria, mentre l'altra deve essere scelta uguale alla metà di  $h$ .

Pertanto le traslazioni  $t_Y$  dell'asta 8 saranno

$$t_Y = \frac{2 \pi^2}{q^2 d^2} h Y^2.$$

Quindi la traslazione dell'asta 8 è proporzionale al quadrato delle ordinate  $Y$  dei punti, rispetto al centro  $O$ , secondo il rapporto

$$h \frac{2 \pi^2}{q^2 d^2}.$$

3) L'asta 11, parallela alle aste 2 ed 8 e la leva 12. La prima è disposta in modo che l'asse dell'asta 8 sia ad uguale distanza da quelli delle aste 11 e 2, e che possa subire una traslazione parallela a se stessa; la leva 12 al centro è imperniata su un perno 13, fisso all'asta 8; le sue estremità portano due espansioni in cui possono scorrere, senza giuoco, i due perni 14 e 15, portati rispettivamente dall'asta 11 e dall'asta 2.

Il dispositivo ha la proprietà di indurre all'asta 11 traslazioni che sono la somma algebrica della traslazione dell'asta 2 e del doppio della traslazione dell'asta 8. Infatti per una traslazione dell'asta 2 il movimento dell'asta 11 ha il fulcro della leva 12, sul pernio 13, da cui i perni 14 e 15 distano sempre ugualmente; mentre per una traslazione dell'asta 8, tale fulcro si trova sul pernio 15, che dista da quello 14 costantemente del doppio di quanto dista quello 13.

Pertanto per qualsiasi punto  $P (X + M, Y + N)$  abbiamo che l'asta 11 subisce una traslazione

$$t_D = t_X + 2t_Y = \frac{4 \pi^2}{q^2 d^2} h X^2 + 2 \frac{2 \pi^2}{q^2 d^2} h Y^2$$

$$2) \quad t_D = \frac{4 \pi^2}{q^2 d^2} h D^2$$

Di conseguenza la traslazione dell'asta 11 è, per ogni punto, proporzionale al quadrato della distanza del punto stesso dal centro  $O$ , secondo il rapporto  $4 \pi^2 h / q^2 d^2$ ; quindi le traslazioni  $t_D$  dell'asta 11 sono atte a rappresentare le correzioni sfericità  $s$  che, in funzione delle formule (1) e (2), risultano essere

$$3) \quad s = \frac{q^2 d^2}{51 \pi^2 h} t_D.$$

Infine la cremagliera 16 ricavata sull'asta 11 è destinata a trasformare le traslazioni  $t_D$  in correzioni (sempre positive) da addurre all'indice rotante 17 del numeratore  $Z$  inserendo sull'asse di rotazione 19 un differenziale 18, comandato dalla corona dentata 20 su cui ingrana la cremagliera 16, o direttamente o attraverso altri ingranaggi 21; le caratteristiche della corona dentata

e degli altri ingranaggi sono destinati a dare il rapporto necessario fra la traslazione dell'asta 11 e la rotazione dell'asse 19, ed il giusto senso di rotazione a questo asse in modo che, per distanze  $D$  crescenti, la correzione  $s$  risulti positiva sul quadrante.

Indichiamo con  $u$  (in metri) il dislivello rappresentato da una rotazione completa dell'indice 17 sul quadrante, e con  $v$  il raggio della corona dentata 20. Si tenga inoltre presente che, come è noto, nel differenziale 18, ruotando di  $180^\circ$  la corona 20, si provoca una rotazione completa dell'indice rotante 17. Pertanto per introdurre sul contatore delle quote la correzione  $u$  la cremagliera 16 deve subire la traslazione  $t_u = 2 \pi v / 2 = \pi v$ , nel caso che tale cremagliera ingrani direttamente sulla corona dentata 20; se invece fra cremagliera 16 e corona dentata 20 è inserito il rapporto  $p$  avremo:

$$t_u = \pi v p$$

Facendo, nella formula (3),  $s = u$  e quindi  $t_D = t_u$  abbiamo

$$t_u = u \frac{51 \pi^2}{q^2 d^2} h,$$

da cui

$$vp = u \frac{51 \pi}{q^2 d^2} h,$$

ed infine

$$p \frac{v}{h} = u \frac{51 \pi}{q^2 d^2},$$

che ci consente assegnare le costanti arbitrarie  $p$ ,  $v$  ed  $h$  in relazione alla precisione ed ai limiti di impiego che deve avere il dispositivo, ed a necessità d'ordine costruttivo.

La correzione è veramente automatica in quanto, imposta la quota vera su di un punto collimato sul modello ottico e disposti nella posizione origine i due eccentrici del correttore, in corrispondenza di detto punto, da questo momento in poi la quota che si legge collimando con la marca un qualsiasi punto del modello è già corretta di sfericità.

Ovviamente l'automaticità della correzione comporta anche che sul contatore delle quote si abbia una variazione dell'indicazione quando, pur rimanendo immobile il pedale  $Z$  (ossia inalterata la  $Z$  sul coordinatometro del restitutore) si agisce lungamente ai volantini  $X$  ed  $Y$  (ossia al variare della planimetria sul modello ottico); ciò porta di conseguenza che nel tracciamento delle curve di livello si debba ogni tanto riportare, la lettura sul contatore delle quote, al valore intero della quota stessa, agendo al volantino  $Z$ ; questo azzeramento da eseguire ogni tanto non è un inconveniente data la lentezza della correzione e la più ampia tolleranza altimetrica nel tracciamento delle curve di livello.