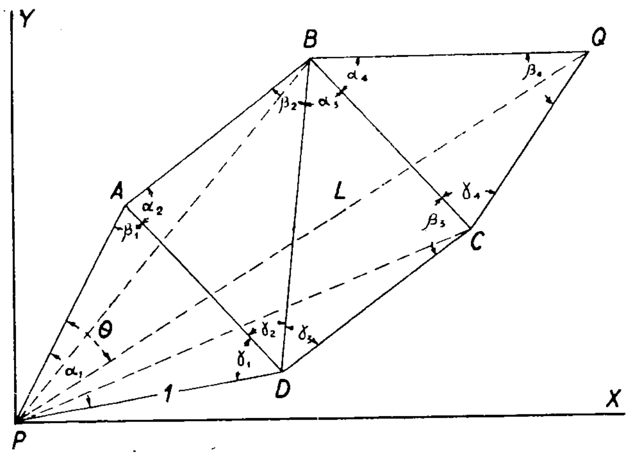
CONSIDERAZIONI SUL PROBLEMA DELLA CATENA DI TRIANGOLI FRA DUE PUNTI DI POSIZIONE NOTA

DOTT. ING. SERGIO FARULLI

In considerazione del notevole interesse che nei vari Trattati di Topografia viene generalmente attribuito al problema cosidetto della « catena di triangoli fra due punti noti » (detto anche della inserzione di punti fra due di coordinate note), riteniamo di qualche utilità – soprattutto a scopi culturali – muovere anzitutto alcune osservazioni nei riguardi del procedimento che per detto problema espone il Prof. Baggi nel suo noto testo adottato presso la Scuola d'Ingegneria di Torino [1], e ciò perché il procedimento, pur provenendo da una così autorevole fonte, non ci sembra del tutto regolare.

Infine, e sempre allo scopo di contribuire ad una migliore conoscenza dell'argomento, risolveremo per altra via lo stesso problema della catena, curando nel contempo di porre in opportuno risalto la diversità del nostro procedimento rispetto a quelli ordinariamente riportati negli anzidetti Trattati.



Ecco intanto – testualmente – quanto il Baggi afferma:

« Il miglior metodo consiste nel costruire una rete di triangoli aventi per vertici i punti P, A, B, D, C, Q e nel misurare tutti gli angoli α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2; α_3, β_3, γ_3; ..... di questi triangoli. Siccome è nota la distanza PQ, ma non è noto il valore di un lato per poter calcolare tutti gli altri lati della rete, si dia ad uno di essi, per es.: PD, un valore arbitrario (per es.: l'unità) e fatta la compensazione angolare di ciascun triangolo, cioè ripartendo l'errore di chiusura di ciascun triangolo in parti

[1] Ing. VITTORIO BAGGI, « Topografia », U.T.E.T., Anno 1937.

uguali per ciascuno dei tre angoli, si calcolino i lati di tutti i triangoli. Indi si calcolino, per mezzo di triangoli di cui sono noti due lati e l'angolo compreso, le distanze PB, ... e PQ e siasi ottenuto $PQ = l$.

Se con L indichiamo la distanza nota dei punti P e Q, il valore vero del lato PD sarà $= \frac{L}{l}$. Tutti gli altri lati si otterranno moltiplicando i valori ottenuti nel calcolo provvisorio per il rapporto $\frac{L}{l}$, ovvero aggiungendo ai loro logaritmi la quantità $\log L - \log l$.

Per il calcolo delle coordinate bisogna distinguere due casi:

a) *I punti* P *e* Q *sono visibili tra loro.* In questo caso si potrà misurare l'angolo $APQ = \theta$, il quale sottratto dall'angolo (PQ) che la retta PQ fa con l'asse delle y dà l'angolo che la PA fa con l'asse delle y. Si potrà calcolare anche (PD), che sarà $= (PA) + \alpha_1$.

b) *I punti* P *e* Q *non sono visibili.* Converrà assumere come asse delle x il lato PD del primo triangolo, e come asse delle y la perpendicolare ad esso nella origine P; si calcoleranno rispetto a questi assi le coordinate dei vertici $A, B, C, \ldots\ldots Q$. Calcolate le coordinate di Q rispetto a questo nuovo sistema di assi si calcolerà l'angolo che la PQ fa con PD, e quindi l'angolo θ che la PQ fa con PA; si è così ridotti al caso precedente ».

Il Baggi dunque – ai fini del calcolo delle coordinate – afferma la necessità di distinguere se i punti P e Q siano – o no – visibili fra loro.

Ebbene – a nostro avviso – una tale distinzione di casi non ha ragione di aver luogo.

Vediamone il perché.

Le misure degli angoli dei vari triangoli APD, ADB .....BQC, vengono, com'è noto, sottoposte alla cosidetta compensazione col noto criterio secondo il quale l'errore di chiusura di ogni triangolo viene ripartito in parti uguali nei suoi tre angoli.

Ne nascerà così una ben determinata figura geometrica in cui la posizione della congiungente i punti estremi P e Q rispetto ad un qualsiasi lato della figura stessa (e quindi rispetto anche al lato PA) dipenderà in definitiva, oltreché da tutte le osservazioni angolari eseguite, anche dal criterio con cui si procede alla compensazione degli inevitabili errori di ogni triangolo.

Sul terreno – invece – la posizione della PQ rispetto a PA dipende soltanto dalle « vere » posizioni dei vertici P, Q e A; cioè, in concreto, da tre punti *stabilmente fissati* sul terreno stesso.

Pertanto, ove si proceda – come fa il Baggi nel « caso a » – alla diretta misura dell'angolo θ si otterrà un valore che in generale non potrà uguagliare quello del corrispondente angolo contenuto nella figura determinata dagli angoli compensati, e ciò perché tale diretta misura comporta osservazioni angolari su direzioni formate dalle anzidette « vere » posizioni dei vertici A, P, Q.

L'angolo θ, dunque, non può che essere « *dedotto* » - mediante opportuni procedimenti di calcolo trigonometrico – dall'insieme degli angoli compensati formanti la figura geometrica dalla quale esso nasce unendo i punti estremi P e Q.

Da tutto ciò discende che il problema della catena di triangoli deve essere risolto indipendentemente dalla esistenza - o meno - della visibilità fra i punti P e Q.

In effetti, ciò che il Baggi consiglia di fare nel « caso b » deve essere applicato anche nel caso in cui i punti P e Q siano visibili fra loro.

A questo proposito giunge però opportuna una ulteriore osservazione.

Se si considerano i valori provvisori dei lati PA, AB e BQ che il Baggi ottiene in precedenza dal calcolo della intera rete dei triangoli (assegnando un valore arbitrario – ad esempio: l'unità – al lato PD), e con tali valori si determinano le coordinate X_Q Y_Q del punto Q nello stesso sistema di assi considerato nel predetto « caso b », si potrà evidentemente scrivere:

$$\text{tang } Q\hat{P}D = \frac{Y_Q}{X_Q}\ ; \qquad l = \frac{X_Q}{\cos\, Q\hat{P}D} = \frac{Y_Q}{\text{sen}\, Q\hat{P}D}\ .$$

Il valore l (e conseguentemente il rapporto $\frac{L}{l}$) può dunque ottenersi in modo molto semplice e rapido, una volta calcolato l'angolo che la PQ fa con PD, ovviando così alla risoluzione alquanto laboriosa dei triangoli PAB e PBQ; risoluzione della quale si serve appunto il Baggi per la determinazione del detto valore l onde calcolare il rapporto $\frac{L}{l}$ occorrente per passare dai valori provvisori dei lati PA, AB..... ai corrispondenti valori definitivi.

Altro procedimento atto a risolvere lo stesso interessante problema consiste nel dedurre il valore definitivo del lato BQ direttamente dalla distanza nota PQ mediante gli angoli $B\hat{P}Q$ e $B\hat{Q}P$ determinabili col metodo da noi esposto nel n. 3, anno 1958 di questo Bollettino, e nel risolvere poi tutti i triangoli della catena avvalendosi dello stesso lato BQ nonché di tutti gli angoli misurati e compensati.

Vediamo come occorre procedere:

Si misurano tutti gli angoli dei vari triangoli della catena e si provvede nei consueti modi alla loro compensazione.

Si considera poi il primo quadrilatero $PABD$; se ne uniscono i vertici