RICERCA DELLE MIGLIORI CONDIZIONI PER LA DETERMINAZIONE DELLA DISTANZA FRA DUE PUNTI CON IL METODO DELLA INTERSEZIONE IN AVANTI

DR. ING. ENRICO VITELLI

È noto che la migliore condizione per la determinazione della *posizione* di un punto con il metodo della *intersezione in avanti* richiede che gli angoli alla base siano di $35^{\circ}\ 15'\ 50''$ (1). È tuttavia interessante osservare che la condizione di cui trattasi non è quella che corrisponde a tutte le finalità topografiche che possono richiedersi alla determinazione di un punto: è fuor di dubbio che interessando la posizione assoluta le condizioni migliori siano proprio quelle citate, ma qualora dovesse interessare il calcolo dell'*area di un triangolo* conoscendo le posizioni planimetriche di due dei suoi vertici ed avendo effettuato le osservazioni angolari nei detti punti, si dimostra che la condizione migliore, in tal caso, è quella del triangolo rettangolo per cui gli angoli alla base siano di 45° (2).

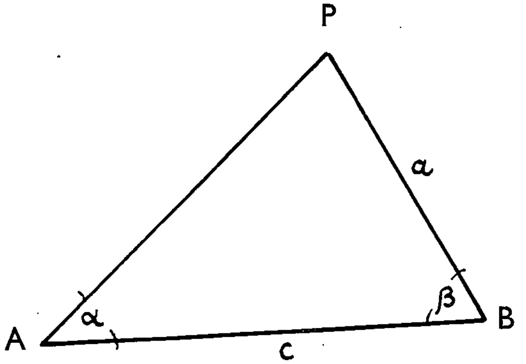

FIG. 1.

Ci domandiamo, ora, quali siano le migliori condizioni per la determinazione di una distanza compresa fra uno dei due punti assegnati ed un punto sconosciuto, operando con il metodo della « intersezione in avanti ».

Lo schema del problema è quello rappresentato in figura 1, nella quale a è il lato da determinare, A e B i punti di coordinate note ed α e β i due angoli misurati con un teodolite.

---

(1) Cfr. CICCONETTI: *Trattato di Geodesia e Topografia*, Vol. II, pag. 874.
(2) Cfr. E. VITELLI: *Analisi e critica di alcune formule per il calcolo delle aree dei triangoli*, « Rivista Catasto », n. 5-6, 1952.

Dall'applicazione del teorema dei seni si ricava che

$$a = \frac{c \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \cdot$$

Considerando la c come priva di errore e la a funzione non lineare delle quantità osservate α e β, l'espressione dell'errore medio che compete ad a è data, come è noto, dalla:

$$m_a = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial \alpha}\right)^2 m_\alpha^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial \beta}\right)^2 m_\beta^2} \tag{1}$$

ove con m_α e m_β si sono indicati gli errori medi che rispettivamente affliggono gli angoli α e β, ed espressi in radianti.

Con facili operazioni risultano

$$\frac{\partial a}{\partial \alpha} = \frac{a \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \quad ; \quad \frac{\partial a}{\partial \beta} = -\frac{a \cos(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \cdot$$

Poiché i due angoli α e β potranno considerarsi come misurati con lo stesso ordine di precisione, porremo $m_\alpha = m_\beta = m$ e pertanto la (1) diviene

$$m_a = \pm \frac{a \cdot m}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta) \cdot \operatorname{sen} \alpha} \sqrt{\operatorname{sen}^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \cos^2(\alpha + \beta)} \, .$$

L'errore medio relativo si otterrà dividendo m_a per la distanza a:

$$\mu_a = \frac{m_a}{a} = \pm \frac{m}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta) \operatorname{sen} \alpha} \sqrt{\operatorname{sen}^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \cos^2(\alpha + \beta)} \, . \tag{2}$$

Analizzando la (2) si rileva che l'errore μ_α si annullerebbe nel caso che risultasse $(\alpha + \beta) = 90^\circ$ e $\beta = 0^\circ$, ossia $\alpha = 90^\circ$ e $\beta = 0^\circ$ il che, evidentemente, corrisponderebbe al caso limite della coincidenza del lato $\overline{AB}$ con il lato $\overline{PB}$.

Ciò vuol dire, in ogni modo, che saranno da preferirsi quelle determinazioni del lato $\overline{PB}$ ottenute con la condizione che $\alpha + \beta$ sia il più vicino possibile a 90° ed α il più prossimo possibile ch'esso a 90°. Dette condizioni potranno essere realizzate abbastanza bene quando il punto di appoggio A *venga scelto* molto prossimo al punto da determinare P e sensibilmente sulla normale per P alla congiungente $\overline{PB}$.

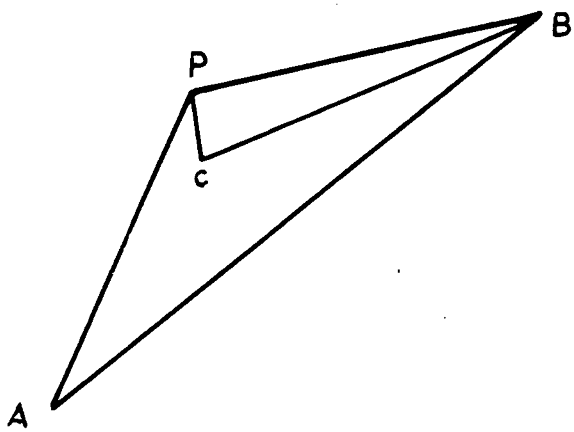

FIG. 2.

A conferma di quanto sopra esposto si è proceduto alla seguente applicazione numerica:

Di 4 punti A, B, P, C, (vedi fig. 2) sono state assegnate le coordinate:

$$\begin{cases} X_A = 5.000 \text{ m.} \\ Y_A = 6.000 \text{ m.} \end{cases} \quad \begin{cases} X_B = 10.000 \text{ m.} \\ Y_B = 13.000 \text{ m.} \end{cases} \quad \begin{cases} X_P = 9974{,}83 \\ Y_P = 7732{,}27 \end{cases} \quad \begin{cases} X_C = 9074{,}84 \text{ m.} \\ Y_C = 7736{,}59 \text{ m.} \end{cases}$$

in modo che rispondano alle seguenti condizioni:

1) nel triangolo PAB gli angoli α e β risultano entrambi di $35^{\circ}\ 15'\ 50''$, che corrisponde al caso più favorevole per la determinazione di P col metodo della intersezione in avanti;

2) Il punto C è situato molto prossimo a P e sensibilmente ubicato sulla normale alla direzione PB, come dalle osservazioni fatte.

Considerato, quindi, il punto P di posizione ignota, se ne sono calcolate le coordinate, nonché la distanza $\overline{PB}$, sia appoggiandolo alla base AB, sia alla base CB, aumentando, in entrambi i casi, gli angoli alla base di un ipotetico errore di $4'',4$.

Nella tabella sono stati riportati i risultati ottenuti dai calcoli e – allo scopo di effettuare un utile raffronto – sono stati calcolati, sia per la distanza $\overline{PB}$ che per la posizione del punto P, gli *errori medi relativi*.

Tali errori medi sono stati calcolati nel seguente modo:

a) per la distanza $\overline{PB}$

$\mu_{\overline{PB}} = \dfrac{\Delta_{\overline{PG}}}{\overline{PB}}$ ove con $\Delta_{\overline{PB}}$ viene indicata la differenza fra il valore esatto della distanza e quello calcolato con riferimento alla base $\overline{AB}$ e alla base $\overline{CB}$.

b) per la posizione di P

$$\mu_P = \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\overline{CB}} \quad \text{se riferito alla base } \overline{CB}\,;$$

$$\mu_P = \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\overline{AB}} \quad \text{se riferito alla base } \overline{AB}\,.$$

Base	$\Delta_{\overline{PB}}$ m	Δx m	Δy m	$\mu_{\overline{PB}}$	μ_P
$\overline{CB}$	— 0,018	— 0,11	— 0,11	$34 \cdot 10^{-7}$	$29 \cdot 10^{-6}$
$\overline{AB}$	— 0,081	+ 0,02	+ 0,08	$154 \cdot 10^{-7}$	$95 \cdot 10^{-7}$

I risultati ottenuti, che sono riassunti nella tabella soprariportata, dimostrano, sia pure nella modestia delle differenze, effettivamente:

1) che un errore commesso sugli angoli alla base fa sentire la sua influenza nel calcolo delle coordinate in misura più modesta se detti angoli sono prossimi al valore citato di $35^\circ\ 15'\ 50''$.

2) che il medesimo errore, ai fini del calcolo della distanza $\overline{PB}$, fa sentire meno la sua influenza se il triangolo è conformato in modo di avere in B un angolo assai piccolo e in C un angolo prossimo a 90°.

VERSAMENTO DELLE QUOTE SOCIALI

I signori Soci che non abbiano ancora effettuato il versamento della quota sociale per l'anno 1959 o che, eventualmente, siano in ritardo con tale versamento anche per il decorso anno, sono pregati di provvedere al riguardo, con cortese sollecitudine.