A PROPOSITO DELLA COMPENSAZIONE DELLE POLIGONALI

ALFREDO PAROLI

SOMMARIO – *Vengono esaminati e raffrontati alcuni procedimenti applicati per la compensazione lineare delle poligonali, con particolare riguardo al sistema in uso nel Catasto italiano.*

Nella compensazione delle poligonali d'appoggio ai rilievi topografici non trovano applicazione (salvo casi del tutto eccezionali) i metodi rigorosi, basati sulla teoria dei minimi quadrati e che forniscono simultaneamente i valori più convenienti delle correzioni da apportare agli angoli e lati misurati. L'impiego di tali metodi, non necessario in relazione agli scopi della poligonazione ed al grado di precisione richiesto da essa, comporterebbe infatti un onere molto notevole, specialmente quando l'operatore debba calcolare un grande numero di poligonali, come avviene nei rilevamenti estesi, ad es. in quelli catastali.

Per maggiore celerità si preferisce perciò ricorrere a procedimenti semirigorosi o empirici (giustificati per lo più mediante considerazioni di carattere geometrico) nella cui applicazione, *considerando che la misura degli angoli è indipendentemente da quella dei lati*, si ritiene lecito scindere la compensazione in due successive fasi, compensando cioè separatamente dapprima l'errore di chiusura angolare δ, indi l'errore di chiusura lineare δl.

Nella presente nota riteniamo non inopportuno esaminare brevemente alcuni di tali procedimenti nei riguardi concettuali e nel pratico impiego, effettuando altresì un raffronto comparativo fra essi, con particolare riferimento al sistema di compensazione lineare, adottato nelle poligonazioni del Catasto italiano.

I. – COMPENSAZIONE ANGOLARE.

Facciamo riferimento alla poligonale generica di n vertici (compresi gli estremi), collegante due vertici assegnati P_1 e P_n, di coordinate note $(x_1\ y_1)$ e $(x_n\ y_n)$ attraverso i vertici intermedi $P_2, P_3 \ldots, P_{n-1}$. E chiamiamo (fig. 1):

$l_1 = \overline{P_1 P_2}$, $l_2 = \overline{P_2 P_3}$, $l_{n-1} = \overline{P_{n-1} P_n}$ i successivi lati;

$\alpha_1 = A\hat{P}_1 P_2$ *l'angolo di apertura* (misurato fra il primo lato l_1 e la direzione di orientamento $\overline{P_1 A}$ ad un punto noto A, esterno alla poligonale);

$\alpha_n = P_{n-1} \hat{P}_n B$ *l'angolo di chiusura* (misurato fra l'ultimo lato l_{n-1} e la direzione $P_n B$ ad un punto noto B, pure esterno alla poligonale);

$\alpha_2 = P_1 \hat{P}_2 P_3$; $\alpha_3 = P_2 \hat{P}_3 P_4$; ... $\alpha_{n-1} = P_{n-2} \hat{P}_{n-1} \cdot P_n$ gli angoli misurati fra i successivi lati;

x_2, y_2; x_3, y_3, ... x_{n-1}, y_{n-1} le coordinate non compensate dei vertici intermedi,

$x_2' \ y_2'$; $x_3' \ y_3'$ ecc. le corrispondenti coordinate compensate.

Intendiamo che la poligonale sia stata determinata secondo la prassi del Catasto [1], cioè misurando tutti i lati e tutti gli angoli sopra indicati, e che siano

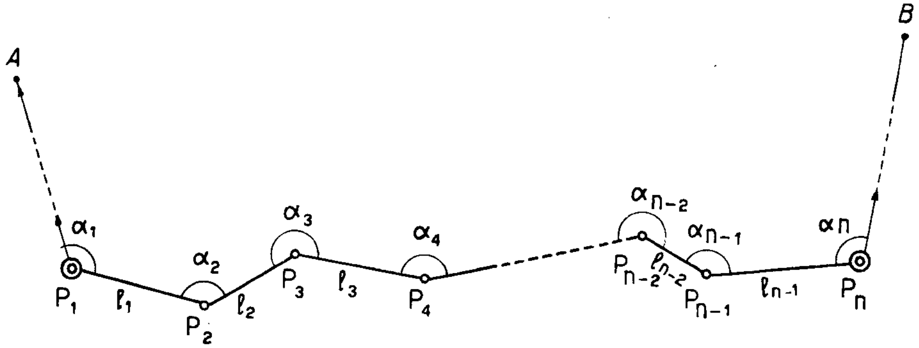

FIG. 1.

assegnati i valori degli angoli di direzione $\theta_0 = (P_1 A)$ della visuale d'orientamento e $\theta_n = (P_n B)$ della visuale di chiusura [2].

L'angolo di direzione (non compensato) del lato l_i generico è perciò espresso da:

$$[1] \qquad \theta_i = \theta_{i-1} + \alpha_i + 180^\circ = \theta_0 + \sum_1^i \alpha_i + (i-1)\, 180^\circ.$$

Nei procedimenti semirigorosi o empirici che stiamo considerando, la compensazione angolare viene costantemente effettuata secondo la ben nota prassi, ossia applicando a ciascuno degli n angoli misurati la correzione $-\frac{\delta}{n}$, pari al quoziente, cambiato di segno, fra l'errore δ di chiusura angolare e il numero dei vertici.

---

(1) Vedasi la recente « Istruzione sulla poligonazione », pubblicata dalla Direzione Generale del Catasto (Istituto Poligrafico dello Stato, Roma 1953).

(2) Trattasi perciò del tipo di poligonale che i francesi denominano *cheminement enquadré et doublement orienté* (*au depart et à l'arrivée*).

I valori compensati degli angoli α_i e degli angoli di direzione θ_i sono perciò, rispettivamente:

$$[2] \qquad \alpha_i' = \alpha_i - \frac{\delta}{n}$$

$$[3] \qquad \theta'_i = \theta'_{i-1} + \alpha_i + 180^o - \frac{\delta}{n} = \theta_o + \sum_1^i \alpha_i + (i-1)\,180^o - i\,\frac{\delta}{n}\,.$$

Pure costantemente, nei procedimenti considerati, con gli angoli di direzione così compensati ed i valori misurati dei rispettivi lati l_i si calcola linearmente la poligonale i cui errori di chiusura δx, δy secondo i due assi risultano notoriamente

$$[4] \qquad \begin{cases} \delta x = (x_n - x_1) - \sum\limits_1^{n-1} \Delta X_i \\ \delta y = (y_n - y_1) - \sum\limits_1^{n-1} \Delta Y_i \end{cases}$$

dove

$$[5] \qquad \Delta X_i = l_i \cos \theta_i \; ; \qquad \Delta Y_i = l_i \operatorname{sen} \theta_i \,.$$

La compensazione lineare della poligonale può essere eseguita con uno dei sistemi che qui appresso indichiamo, mediante i quali le correzioni vengono apportate alle proiezioni ΔX_i e ΔY_i dei singoli lati sugli assi coordinati.

II. – Compensazione lineare mediante ripartizione proporzionale.

Trattasi del procedimento di compensazione più noto, nel quale si *considerano reciprocamente indipendenti gli errori* δx, δy, cioè le componenti dell'errore di chiusura δl (considerazione che, per altro, non è immune da arbitrarietà).

Per effettuare la compensazione, si determinano i rapporti

$$[6] \qquad p_x = \frac{\delta x}{\sum\limits_1^{n-1} |\Delta X_i|} \qquad \text{e} \qquad p_y = \frac{\delta y}{\sum\limits_1^{n-1} |\Delta Y_i|}$$

fra le componenti dell'errore lineare di chiusura e le somme dei *valori assoluti* delle ΔX_i, ΔY_i rispettivamente; indi alle singole ΔX_i, ΔY_i si applicano le correzioni $-p_x \cdot \Delta X_i$, $-p_y \cdot \Delta Y$, ottenendo i valori corretti

$$[7] \qquad \begin{cases} \Delta X_i' = \Delta X_i - p_x \cdot \Delta X_i \\ \Delta Y_i' = \Delta Y_i - p_y \cdot \Delta Y_i \end{cases}$$

Le *coordinate compensate* dei successivi vertici si ricavano perciò da quelle – pure compensate – del vertice precedente con le note formule ricorrenti:

[8]
$$\begin{cases} x'_i = x'_{i-1} + \Delta X'_{i-1} = x'_{i-1} + \Delta X_{i-1} - p_x \cdot \Delta X_{i-1} \\ y'_i = y'_{i-1} + \Delta Y'_{i-1} = y'_{i-1} + \Delta Y_{i-1} - p_y \cdot \Delta Y_{i-1} \end{cases}$$
$$(i = 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ n)$$

Come controllo, le coordinate x'_n, y'_n ottenute mediante le [8] per il vertice P_n di chiusura debbono risultare uguali ai valori x_n, y_n dati.

Le correzioni complessive $dx_i = x'_i - x_i$, $dy_i = y'_i - y_i$ che, col procedimento sopra accennato, risultano applicate alle coordinate x_i, y_i del vertice generico per ricavarne quelle compensate, hanno perciò i valori

[9]
$$dx_i = p_x \sum_{2}^{i}{}_r \left| x_r - x_{r-1} \right|, \qquad dy_i = p_y \sum_{2}^{i}{}_r \left| y_r - y_{r-1} \right|,$$

cioè *sono proporzionali alle somme dei valori assoluti* delle proiezioni (sugli assi x e y rispettivamente) dei lati compresi fra il vertice iniziale P_1 e quello P_i considerato.

III. – Compensazione lineare mediante ripartizione parallela.

Più razionale del precedente è l'altro procedimento meno noto e che indichiamo qui appresso. Calcolando linearmente la poligonale, con gli angoli di direzione compensati secondo la [3] ed i lati misurati, per il vertice generico P_i si ottengono le coordinate provvisorie:

[10]
$$x_i = x_1 + \sum_{1}^{i-1}{}_r \Delta X_r\,, \qquad y_i = y_1 + \sum_{1}^{i-1}{}_r \Delta Y_r$$

e per il vertice di chiusura

[11]
$$x^o_n = x_1 + \sum_{1}^{n-1}{}_r \Delta X_r\,, \qquad y^o_n = y_1 + \sum_{1}^{n-1}{}_r \Delta Y_r\,.$$

I valori [11] rispetto alle coordinate *assegnate* x_n, y_n del vertice P_n presentano evidentemente scarti uguali alle componenti dell'errore di chiusura lineare, cioè

[12]
$$\delta x = x^o_n - x_n\,, \qquad \delta x = y^o_n - y\,.$$

Alle coordinate x^o_n, y^o_n corrisponde perciò sul terreno un punto P^o_n, prossimo a P_n ma non coincidente con esso. La distanza tra tali punti $\overline{P_n P^o_n} = \delta l$ rappresenta ovviamente l'errore lineare di chiusura (segmento orientato).

Per effetto degli scarti [12] *l'asse della poligonale*, ossia la retta $P_1 P_n$ congiungente i vertici estremi, subisce pertanto una rotazione ε ed una variazione di lunghezza $\Delta = \overline{P_1 P_n^o} - \overline{P_1 P_n}$.

La rotazione e la variazione di lunghezza suddette possono essere eliminate ruotando di $-\varepsilon$ l'asse della poligonale ed applicando inoltre alla lunghezza $\overline{P_1 P_n^o}$ un allungamento o accorciamento percentuale s (ossia *una variazione di scala* $1 + s$) in modo che si abbia

$$[13] \qquad \overline{P_1 P_n^o}\,(1 + s) = \overline{P_1 P_n}\ .$$

Se ci riferiamo alla poligonale (anziché al suo asse), potremo pervenire al medesimo risultato ruotando di $-\varepsilon$ i singoli lati ed applicando a ciascuno

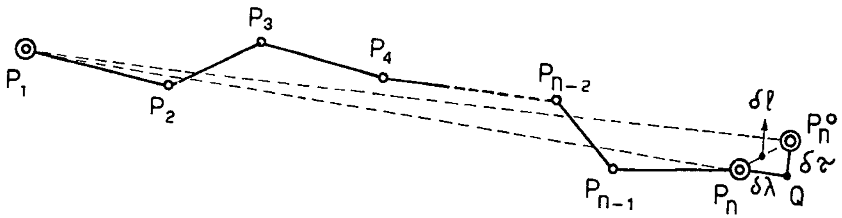

Fig. 2.

di essi la detta variazione di scala $(1 + s)$; nel qual modo δx, δy (e quindi l'errore di chiusura lineare δl) verranno ripartiti fra tutti i successivi vertici.

L'accennato procedimento consiste perciò in una *ripartizione parallela dell'errore* δl (1).

Indichiamo con $\delta\lambda = \overline{P_n Q}$ (vedasi fig. 2) la componente dell'errore di chiusura δl secondo l'asse della poligonale (*errore longitudinale di chiusura*), con $\delta\tau = \overline{Q P_n^o}$ la componente nella direzione perpendicolare all'asse (*errore trasversale*).

Poiché la differenza di lunghezza fra $\overline{P_1 P_n^o}$ e $\overline{P_1 P_n}$ è molto piccola, posto in approssimazione $D = \overline{P_1 P_n^o} = \sim \overline{P_1 P_n^o}$ si avranno per $\delta\lambda$ e $\delta\tau$ le espressioni

$$[14] \qquad \delta\lambda = D \cdot s, \qquad \delta\tau = D \cdot \varepsilon\ .$$

(1) Come è noto, il punto P ubicato sopra una retta r passante per un altro punto A fisso, per lieve errore δ d'orientamento di tale retta subisce uno spostamento trasversale $\delta . \overline{AP}$ (misurato perpendicolarmente ad $\overline{AP}$), il quale nel calcolo dell'errore medio di P può essere considerato come derivante da uno spostamento parallelo di r (Cfr. Jordan W., *Handbuch der Vermessungskunde.*

Vedasi anche E. Daubresse, *Topographie des grands levés et plans géneraux*, Bruxelles, Imprimérie Denis, 1941.

mentre è evidentemente

$$\delta\lambda^2 + \delta\tau^2 = D^2 (s^2 + \varepsilon^2) = \delta l^2 . \tag{15}$$

Analiticamente, se Θ è l'angolo di direzione dell'asse della poligonale nella posizione $P_1 P_n^o$, le componenti di D secondo gli assi coordinati saranno

$$x_n^o - x_1 = D \cos \Theta \; ; \qquad y_n^o - y_1 = D \operatorname{sen} \Theta \, .$$

Portando a coincidere P_n^o con P_n mediante la rotazione e la variazione di scala sopra accennata, si avrà

$$\left\{ \begin{aligned} x_n - x_1 &= D (1 + s) \cos (\Theta + \varepsilon) \\ y_n - y_1 &= D (1 + s) \operatorname{sen} (\Theta + \varepsilon) \end{aligned} \right. . \tag{16}$$

Per determinare i valori incogniti s ed ε, osserviamo che se nelle [16] si sviluppano in serie il seno e il coseno limitatamente ai termini del prim'ordine e si eseguono i prodotti trascurando i termini d'ordine superiore, si ottiene

$$\left\{ \begin{aligned} x_n - x_1 &= (x_n^o - x_1) + (y_n^o - y_1)\, \varepsilon + (x_n^o - x_1)\, s \\ y_n - y_1 &= (y_n^o - y_1) - (x_n^o - x_1)\, \varepsilon + (y_n^o - y_1)\, s \, , \end{aligned} \right. \tag{17}$$

ovvero, nello stesso grado d'approssimazione, sostituendo x_n, y_n ad x_n^o, y_n^o nei termini a fattore ε ed s e tenendo conto delle [12],

$$\left\{ \begin{aligned} \delta x &= -(y_n - y_1)\, \varepsilon - (x_n - x_1)\, s \\ \delta y &= (x_n - x_1)\, \varepsilon - (y_n - y_1)\, s \, . \end{aligned} \right. \tag{18}$$

Per determinare le incognite ε ed s basta perciò risolvere il sistema di equazioni lineari [18], nei cui secondi membri sono note le differenze fra parentesi Si ottengono i valori cercati

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\delta y\, (x_n - x_1) - \delta x\, (y_n - y_1)}{(x_n - x_1)^2 + (y_n - y_1)^2} \\ s &= \frac{-\delta x\, (x_n - x_1) - \delta y\, (y_n - y_1)}{(x_n - x_1)^2 + (y_n - y_1)^2} \, , \end{aligned} \right. \tag{19}$$

i cui denominatori sono uguali a D^2.

Calcolati ε e s, le correzioni da applicare alle coordinate x_i, y_i del vertice generico si ottengono con le

[20] $$\begin{cases} dx_i = -(y_i - y_1)\,\varepsilon - (x_i - x_1)\,s \\ dy_i = (x_i - x_1)\,\varepsilon - (y_i - y_1)\,s \;. \end{cases}$$

Il procedimento suindicato è praticamente assai semplice, riducendosi all'applicazione delle [19] e delle [20].

Infatti mediante le [19] si calcolano ε ed s, indi con le [20] si ottengono le correzioni dx_i, dy_i da applicare ai singoli vertici P_i. *Tale calcolo è tuttavia alquanto più lungo di quello occorrente per il procedimento precedente.*

Aggiungiamo qualche altra osservazione, che ci occorrerà fra breve.

L'angolo ω formato dall'errore δl con l'asse della poligonale, tenuto conto delle [14], si calcola con la

[21] $$tg\ \omega = \frac{\delta\tau}{\delta\lambda} = \frac{\varepsilon}{s}\,,$$

e l'angolo di direzione φ di δl è perciò

[22] $$\varphi = \Theta - \omega\,.$$

Quadrando e sommando le [20], lo spostamento che mediante l'applicazione di esse viene attribuito al vertice P_i risulta

[23] $$dl_i^2 = D_i^2\ (s^2 + \varepsilon^2)\,,$$

se con D_i si indica la distanza $D_i = \sqrt{(x_i - x_1)^2 + (y_i - y_1)^2}$ fra il vertice P_i e quello iniziale P_1.

Dividendo membro a membro la [23] e la [15] si ottiene

[24] $$dl_i = \delta l\ \frac{D_i}{D}\,.$$

La tangente dell'angolo di direzione φ_i di dl_i è espressa dal rapporto dei valori [20], cioè

$$tg\ \varphi_i = \frac{dy_i}{dx_i} = \frac{(y_i - y_1)\,s - (x_i - x_1)\,\varepsilon}{(x_i - x_1)\,s + (y_i - y_1)\,\varepsilon}$$

o, dividendo ambo i termini dell'ultimo membro per $(x_i - x_1)\, s$ e indican[do] con θ_i l'angolo di direzione della congiungente $P_1 P_i$,

$$[25] \qquad tg\, \varphi_i = \frac{tg\, \theta_i - tg\, \omega}{1 + tg\, \theta_i\, tg\, \omega} = tg\, (\theta_i - \omega)\, .$$

L'angolo di direzione φ_i della correzione dl_i relativa al vertice P_i è perci[ò] uguale a quello θ_i della congiungente il vertice iniziale P_1 con P_i, diminuit[o] dell'angolo ω.

IV. – Compensazione lineare applicata nel Nuovo Catasto [1].

Nel Nuovo Catasto italiano, compensata angolarmente la poligonale con le [2], [3] ed effettuato il relativo calcolo lineare ottenendo le componenti δx, δy dell'errore di chiusura lineare δl mediante le [4], si determinano i rapporti

$$[26] \qquad q_x = \frac{\delta x}{\sum_1^{n-1} l_i} = \frac{\delta x}{L}\, ; \qquad q_y = \frac{\delta y}{\sum_1^{n-1} l_i} = \frac{\delta y}{L}\, ;$$

nelle quali $L = \sum_1^{n-1} l_i$ è lo *sviluppo totale* della poligonale (somma delle lunghezze dei lati).

Indi alle proiezioni ΔX_i, ΔY_i del lato l_i generico si applicano rispettivamente le correzioni

$$q_x\, l_i = \delta x\, \frac{l_i}{L}\, , \qquad q_y\, l_i = \delta y\, \frac{l_i}{L}\, ,$$

(1) L'adozione di tale sistema di compensazione fu motivata con considerazioni di carattere intuitivo (vedasi Boll. Uff. della Direzione Generale del Catasto, anno 1924, normale 64, pag. 307), riguardanti due inconvenienti che hanno luogo con l'applicazione di correzioni proporzionali alle singole *coordinate parziali* (vedasi punto II del presente articolo) e cioè:

1) quando una poligonale ha andamento generale sensibilmente parallelo ad uno degli assi e soltanto uno o pochissimi lati inclinati rispetto ad esso, si vengono ad attribuire correzioni minime o nulle ai lati paralleli all'asse e quasi tutta la correzione viene applicata ai lati inclinati;

2) effettuando la compensazione col citato criterio le correzioni complessive, applicate ai vari lati, a parità di errore di chiusura della poligonale, variano col variare dell'inclinazione di quest'ultima rispetto agli assi coordinati; ciò che è irrazionale.

Gli inconvenienti sopra accennati vengono praticamente eliminati effettuando la compensazione mediante correzioni proporzionali alle lunghezze dei singoli lati (anziché alle singole coordinate parziali).

così che le correzioni apportate alle coordinate del vertice generico P_i risultano

$$[27] \qquad \begin{cases} dx_i = q_x \sum_{1}^{i-1} {}_r\, l_r = dx \cdot \dfrac{L_i}{L} \\[2ex] dy_i = q_y \sum_{1}^{i-1} {}_r\, l_r = dy \cdot \dfrac{L_i}{L} \end{cases} ,$$

chiamando L_i lo sviluppo del tratto di poligonale compreso fra il vertice iniziale P_1 e quello P_i considerato.

Dalle [27], quadrando e sommando ed estraendo la radice quadrata, si ottiene

$$[28] \qquad dl_i = \delta l \, \frac{L_i}{L} ,$$

espressione dello spostamento del vertice P_i per effetto della compensazione lineare.

Dividendo la seconda delle [27] per la prima, può inoltre ricavarsi l'angolo di direzione φ_i di dl_i con la relazione

$$[29] \qquad tg\, \varphi_i = \frac{dy_i}{dx_i} = \frac{\delta y}{dx} = tg\, \varphi = tg\, (\Theta - \omega) .$$

La [28] e [29] dicono perciò che lo spostamento subìto dal vertice generico P_i in dipendenza della compensazione lineare è proporzionale allo sviluppo del tratto di poligonale compreso fra il vertice stesso e quello iniziale P_1 e che tale spostamento ha, per tutti i vertici, la medesima direzione, uguale a quella dell'errore di chiusura δl della poligonale.

V. – Raffronti e conclusioni.

Notiamo anzitutto che, nei riguardi applicativi, tutti e tre i procedimenti sopra considerati sono ammissibili e pressoché equivalenti, giacché tutti e tre conducono ad una ripartizione, praticamente soddisfacente, degli errori δx e δy (e quindi dell'errore di chiusura lineare δl) fra i vari vertici della poligonale.

Aggiungiamo che qualora δx e δy siano molto piccoli basterebbe ripartirli a vista, con segno cambiato, fra le proiezioni ΔX_i e ΔY_i dei vari lati l_i o di alcuni di essi saltuariamente scelti.

Concettualmente il primo procedimento (*ripartizione proporzionale di δx e δy*) non può considerarsi ineccepibile, giacché in esso (come abbiamo accennato) si suppongono indipendenti l'uno dall'altro gli errori δx e δy; ipotesi non rispondente alla realtà.

Tale procedimento presenta il vantaggio di una facile e celere applicazione numerica.

Il secondo procedimento tiene conto della reciproca dipendenza degli errori δx e δy e quindi, come metodo semi-rigoroso, deve essere considerato corretto e pienamente ammissibile.

La sua applicazione numerica, tuttavia, risulta alquanto più laboriosa rispetto al metodo precedente.

Infine il terzo procedimento (cioè quello del Nuovo Catasto italiano) anche esso, come il primo procedimento, è implicitamente basato sull'ipotesi (arbitraria) che δx e δy siano fra loro indipendenti.

Osserviamo tuttavia che le relazioni [28] e [29], (esprimenti la grandezza e direzione dello spostamento dl_i subíto dal vertice generico P_i per effetto della compensazione) hanno *la stessa forma* delle analoghe relazioni [24] e [25], che forniscono i medesimi elementi nel caso del secondo procedimento.

Dalla [24] si passa infatti alla [28] sostituendo al rapporto $\frac{D_i}{D}$ *fra le distanze dei vertici* P_i *e* P_n *da quello iniziale* P_1, l'analogo rapporto $\frac{L_i}{L}$ *fra lo sviluppo del tratto* $P_1\,P_i$ *della poligonale e lo sviluppo totale di essa.*

Parimenti dalla [25] si ottiene la [29] sostituendo l'angolo di direzione θ_i della retta congiungente $P_1\,P_i$ (cioè della distanza D_i) con l'angolo di direzione Θ della congiungente i vertici estremi $P_1\,P_n$ (cioè di D_i).

Il terzo procedimento conduce perciò a risultati tanto più vicini a quelli ottenibili col secondo, quanto più il rapporto generico $\frac{L_i}{L}$ e l'angolo Θ siano prossimi, rispettivamente, al corrispondente rapporto $\frac{D_i}{D}$ ed all'angolo θ_i.

Ciò si verifica approssimativamente qualora la poligonale non si discosti troppo dal proprio asse (come è prescritto dalle Istruzioni del Catasto), ovvero anche quando essa sia abbastanza uniformemente sinuosa rispetto ad esso, oppure il suo andamento segua, *grosso modo*, quello di una curva rivolgente la concavità verso l'asse della poligonale e rispetto ad esso presenti una freccia non eccessivamente notevole ecc.

Riguardo all'applicazione numerica il procedimento catastale risulta altrettanto agevole e rapido che il primo procedimento sopra considerato.

Si può concludere che il procedimento di compensazione lineare in uso nel Catasto italiano realizza praticamente, in via approssimata e nel modo più semplice, il secondo dei metodi considerati (cioè quello di ripartizione parallela e lo realizza con approssimazione tanto maggiore, quanto più l'andamento della poligonale (pur non essendo rettilineo) risulti abbastanza regolare e prossimo al relativo asse.