SUGLI ELEMENTI AUSILIARI OCCORRENTI PER LA DETERMINAZIONE DEL PUNTO A VERTICE DI PIRAMIDE

Dott. Ing. SERGIO FARULLI

Date le coordinate dei punti A, B, C, nonché gli angoli α e β, il calcolo degli angoli x e y occorrenti per la determinazione del punto P viene – come è noto – effettuato mediante le seguenti formule:

$$x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y)$$

$$y = \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{2}(x-y),$$

in cui i termini $\frac{1}{2}(x+y)$ e $\frac{1}{2}(x-y)$ si calcolano come segue:

$$\frac{1}{2}(x+y) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \hat{B});$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x-y) = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(x+y)\operatorname{tang}(45^\circ - \lambda),$$

ove l'angolo ausiliario λ si ottiene ponendo

$$\frac{1}{\operatorname{tang}\lambda} = \frac{b \operatorname{sen}\alpha}{a \operatorname{sen}\beta}.$$

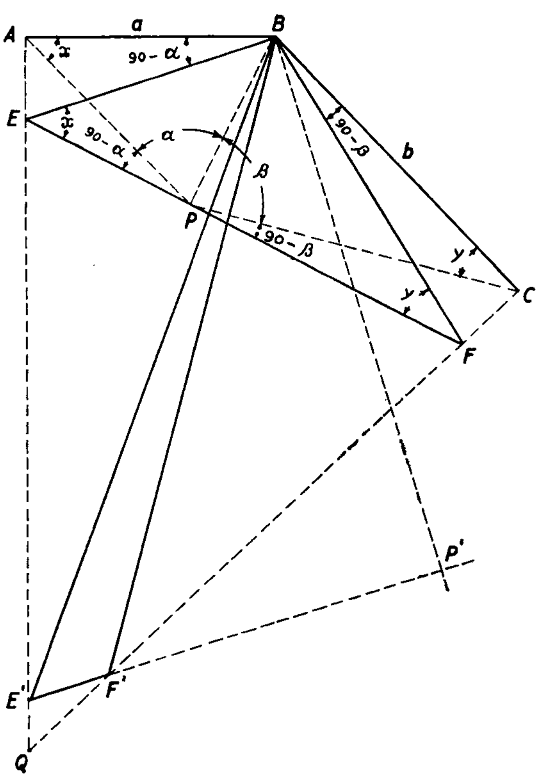

Fig. 1.

L'insieme di tali formule costituisce in sintesi il classico procedimento che di solito si riscontra nei vari trattati di Topografia per la risoluzione del cosidetto problema di Snellius; procedimento che è caratterizzato dalla presenza del predetto angolo ausiliario λ.

Premesso quanto sopra si considerino due punti ausiliari E e F tali che si abbia

$$\overline{BE} = \frac{a}{\cos(90-\alpha)}$$

$$\overline{BF} = \frac{b}{\cos(90 - \beta)}$$

$$(BE) = (BA) - (90 - \alpha)$$

$$(BF) = (BC) + (90 - \beta),$$

ove (BA), (BE), (BF) e (BC) sono rispettivamente gli azimut fra il punto B e i punti A, E, F, C.

Le coordinate degli stessi punti E e F (come in figura) potranno allora essere espresse come segue:

$$X_E = X_B - \overline{BE} \cos (BE)$$

$$Y_E = Y_B - \overline{BE} \operatorname{sen} (BE)$$

$$X_F = X_B - \overline{BF} \cos (BF)$$

$$Y_F = Y_B + \overline{BF} \operatorname{sen} (BF).$$

È evidente che in tali condizioni i tre punti E, P, F verranno a trovarsi su di una stessa retta, risultando il lato BP normale sia al lato EP sia al lato PF [1].

Gli angoli risolventi x e y potranno perciò essere calcolati – oltreché col classico procedimento al quale in principio abbiamo accennato – anche con le seguenti formule:

$$x = (EB) - (EF)$$

$$y = (FB) - (FE)\ ,$$

ove l'azimut (EF) sarà ricavato mediante le coordinate dei punti E e F.

Ottenuti gli angoli x e y si potranno risolvere i due triangoli rettangoli BEP e BFP; il che consentirà di dedurre in triplice modo le coordinate del punto P.

La determinazione analitica degli angoli risolventi x e y, sia che venga effettuata col procedimento classico, sia col procedimento che ad esso abbiamo fatto seguire, comporta dunque la necessità di avvalersi di elementi a carattere ausiliario.

Nel procedimento classico si tratta di elementi ausiliari aventi vero e proprio carattere analitico e cioè gli angoli ausiliari di tipo λ ricavabili dalla

$$\frac{1}{\operatorname{tang} \lambda} = \frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a \operatorname{sen} \beta}\ .$$

(1) Si tenga presente che BE e BF sono diametri delle circonferenze rispettivamente circoscritte ai triangoli ABP e BCP.

Nel secondo procedimento non si hanno elementi ausiliari di tipo analitico ma in loro vece si riscontrano elementi ausiliari di carattere geometrico (quali i punti E e F, che col punto B, formano il triangolo ausiliario $B\,E\,F$).

Appare comunque opportuno osservare che il secondo procedimento dà luogo a formule estremamente semplici.

In esso – infatti – riscontriamo soltanto le comunissime formule che servono al passaggio delle coordinate da un punto ad un altro mediante la loro distanza e relativo azimut; nonché quelle che consentono il calcolo dell'azimut fra due punti una volta che siano note le loro coordinate.

Altro vantaggio di ordine pratico dovuto alla introduzione degli elementi ausiliari E e F consiste nel poter accertare con notevole facilità se sussistano – o meno – le condizioni geometriche atte a consentire una buona determinazione del punto P.

È ovvio che per dar luogo a idonee determinazioni del punto P occorrerà non soltanto che le coordinate dei punti E e F abbiano il dovuto grado di precisione, ma che i punti stessi risultino anche abbastanza distanti fra loro.

A maggior chiarimento si prolunghino i cateti $A\,E$ e $C\,F$, e su tali prolungamenti si consideri una qualsiasi coppia di punti dello stesso tipo dei punti E e F: ad esempio la coppia di punti ausiliari E' e F', molto prossimi al punto di incontro Q di detti prolungamenti.

Tenendo presente quanto innanzi abbiamo detto per la terna dei punti E, F, P, ne consegue che il punto generico P' corrispondente alla nuova coppia di punti $E'\,F'$ si otterrà prolungando la congiungente degli stessi punti $E'\,F'$ e abbassando su tale prolungamento la perpendicolare dal punto B.

È evidente allora, come in tali condizioni, anche un piccolo errore contenuto ad esempio nelle coordinate di F' possa apportare variazioni molto ragguardevoli nella posizione di P' (data appunto la vicinanza dei punti E', F').

Concludendo, anziché ricorrere al consueto esame delle cosidette visuali composte dello Jordan (1), nonché dell'angolo sotto il quale si intersecano le circonferenze circoscritte ai triangoli $A\,B\,P$ e $B\,C\,P$ (esame che di solito si effettua quando si risolva il problema di Snellius col procedimento classico), converrà semplicemente accertare:

1) che i triangoli rettangoli $A\,B\,E$ e $B\,C\,F$ risultino di conformazione atta a consentire una buona determinazione dei punti E e F;

2) che la base ausiliaria $E\,F$ non risulti mai inferiore a ciascuno dei lati $B\,E$ e $B\,F$ (il che assicura che il punto P da determinare cada entro la stessa base $E\,F$).

È ovvio infine che il problema risulterà indeterminato nel caso in cui i punti ausiliari E e F siano coincidenti (nel caso cioè che entrambi assumano la posizione del punto Q indicato in figura).

---

(1) Esse hanno – com'è noto – per espressioni $\frac{PA \times PB}{AB}$, $\frac{PB \times PC}{BC}$, e non debbono superare certi limiti.