

# SULLA DETERMINAZIONE NUMERICA DEI PUNTI DI APPOGGIO FOTOGRAMMETRICI USUFRUENDO, SUL PIANO DI GAUSS-BOAGA, DI PARTICOLARI PUNTI AUSILIARI

Geom. FRANCESCO ALBANI

PREMESSA.

Nel Bollettino Geodetico dell'I.G.M. del maggio 1942 lo scrivente ha mostrato la risoluzione grafica del problema di Hansen ai fini dell'orientamento della tavoletta pretoriana.

È stato cioè dimostrato come disponendo di due soli punti noti  $A$  e  $B$  ed associando al punto  $P$  di stazione un secondo punto  $Q$ , si possano determi-

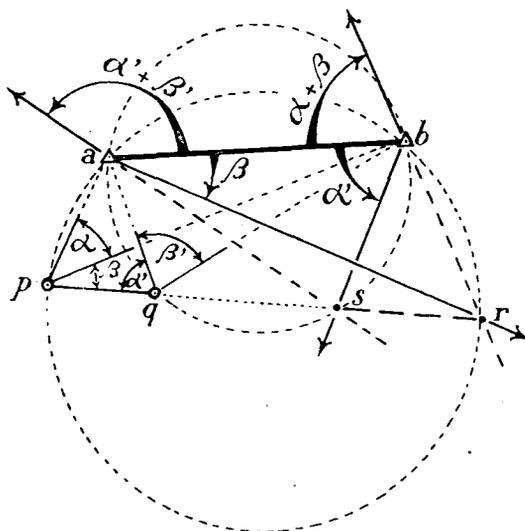


fig. 1

nare per intersezione diretta da  $A$ ,  $B$ , i due punti ausiliari corrispondenti  $R$  ed  $S$  che risultano disposti sull'allineamento  $PQ$  (fig. 1).

Gli angoli da sommare algebricamente all'azimut gaussiano  $(AB)$  e  $(BA)$ , per ottenere gli azimut gaussiani relativi ad  $R$  ed  $S$ , sono contraddistinti, sia nella figura 1 che nelle seguenti, attraverso una freccia che indica anche quale segno algebrico devono assumere rispetto ad  $(AB)$  e  $(BA)$ . Nel caso della figura 1, infatti, è  $(AR) = (AB) + \beta$  e  $(BR) = (BA) + (\alpha + \beta)$  (il segno e valore della tangente è lo stesso per angoli supplementari) e  $(AS) = (AB) - (\alpha' + \beta')$ ,  $(BS) = (BA) - \alpha'$ .

Attraverso le figure 2 e 3 sono mostrati gli altri due casi che praticamente si presentano, ed in esse sono pure messe in evidenza le rette che determinano i punti ausiliari  $r$  ed  $s$ .

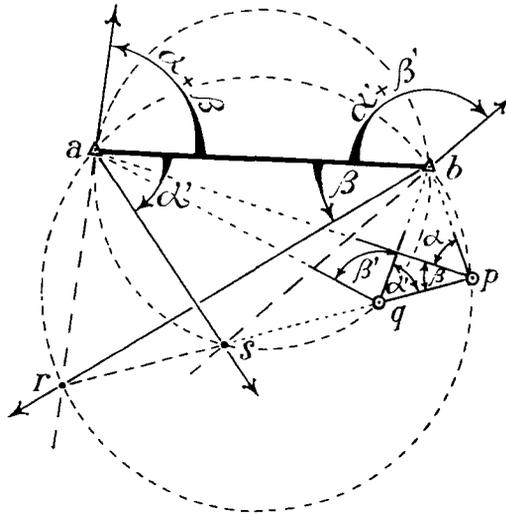


fig. 2

Prendendo in considerazione solo il punto ausiliario  $R$  le figure 1, 2 e 3 si possono sintetizzare nelle corrispondenti figure 4, 5 e 6.

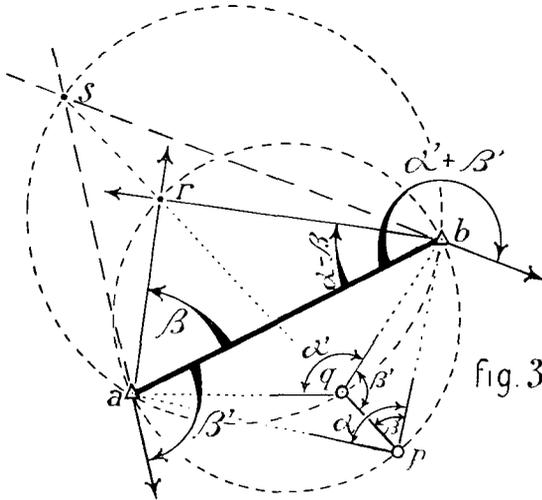


fig. 3

Sono precisamente le rette che determinano il punto ausiliario  $R$  che sostanzialmente interessano per la risoluzione del problema in oggetto, senza usufruire sul terreno della seconda stazione in  $Q$ .

In tali casi, infatti, come sarà mostrato nell'esempio numerico, l'angolo  $\beta$  si misura graficamente usufruendo di un rapportatore.

Nel Rapporto presentato in seno alla III Commissione della Federazione Internazionale dei Geometri (F.I.G.) in occasione del IX Congresso Internazionale dei Geometri tenuto a Delft dal 28 agosto al 4 settembre del 1958; è

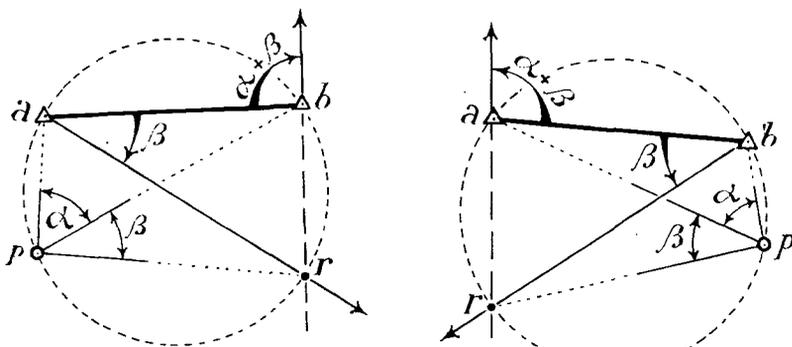


fig. 4

fig. 5

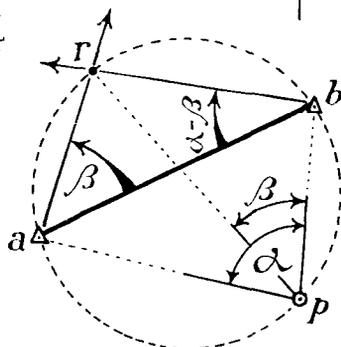


fig. 6

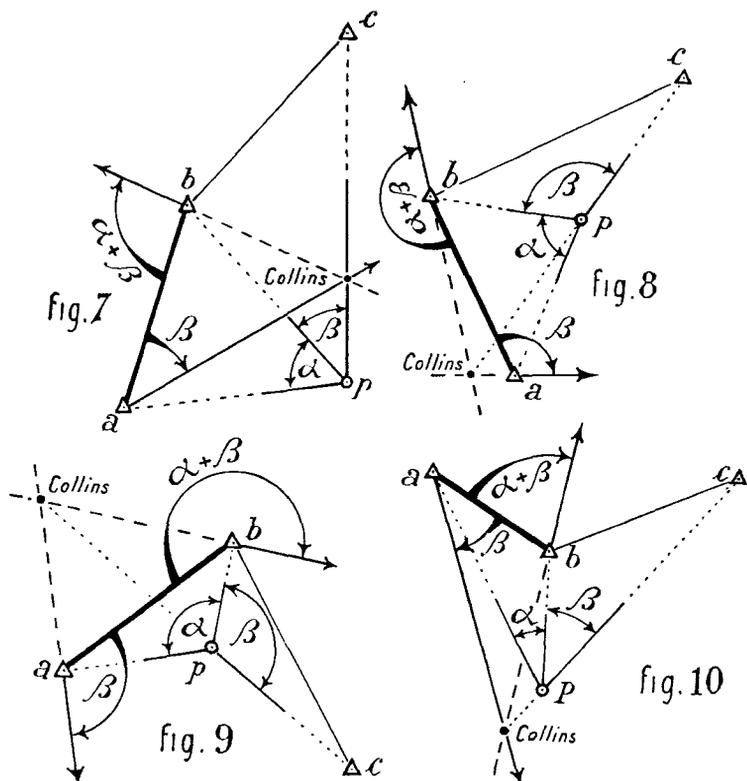
stato richiamato quanto mostrato al V Convegno Nazionale della Società Italiana di Fotogrammetria e Topografia (S.I.F.E.T.) (Palermo, 30-31 marzo e 1 aprile 1957) (1) dimostrando inoltre l'utilità d'introdurre il punto di Collins nella risoluzione del problema di Snellius.

È stato dimostrato, cioè, come sul piano di Gauss-Boaga l'azimut gaussiano (PC) si possa calcolare usufruendo del punto di Collins il quale si determina esclusivamente per intersezione diretta da A, B, introducendo in calcolo

(1) F. ALBANI: *I problemi dell'intersezione inversa (problema semplice e composto di Snellius e problema di Hansen) risolvibili, sul piano di Gauss-Boaga, con la sola intersezione diretta, attraverso il problema composto di Snellius risolto senza determinare il rapporto dei seni degli angoli  $x$  ed  $y$ .*

i due angoli  $\alpha$  e  $\beta$  misurati sul terreno in  $P$  rispetto ad  $A, B, C$  (figure 7, 8, 9, 10).

Poiché il punto di Collins viene determinato con un angolo d'intersezione espresso dall'ampiezza dell'angolo  $\alpha$ , nelle figure 11 e 12 è mostrato la soluzione del problema di Snellius usufruendo del punto di Collins, mantenendo inalterato il simbolismo degli elementi noti che lo determinano e cioè,  $A, B$  ed  $\alpha$ .



Per quanto su richiamato, le coordinate gaussiane del punto ausiliario  $R$  e del punto di Collins sono ottenute esclusivamente attraverso il calcolo dell'intersezione diretta, previo la determinazione dell'azimut gaussiano fra i punti noti  $A$  e  $B$ . Ciò praticamente semplifica il calcolo dell'intersezione diretta per cui trova utile impiego anche la macchina calcolatrice semplice (l'impiego della macchina calcolatrice doppia sarà illustrata in una prossima nota).

Infatti, come è noto, le coordinate gaussiane di un punto  $P$  determinato per intersezione diretta, conoscendo le coordinate gaussiane dei punti noti  $A$

e  $B$  e gli azimut gaussiani ( $AP$ ) e ( $BP$ ), possono essere ottenute risolvendo il sistema costituito dall'equazioni relative alle rette  $AP$  e  $BP$  e precisamente dal sistema:

$$E = N \operatorname{tg} (AP) \div E_A - N_A \operatorname{tg} (AP)$$

$$E = N \operatorname{tg} (BP) \div E_B - N_B \operatorname{tg} (BP)$$

per cui

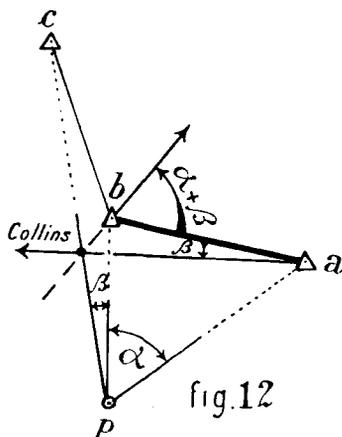
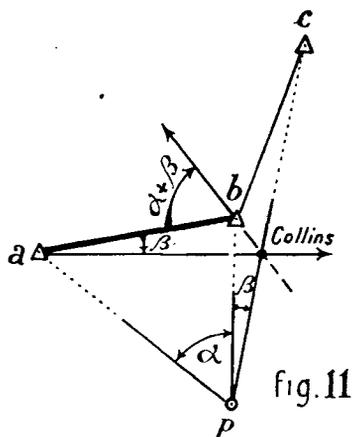
$$N_P = \frac{-(E_A - E_B) + N_A \operatorname{tg} (AP) - N_B \operatorname{tg} (BP)}{\operatorname{tg} (AP) - \operatorname{tg} (BP)}$$

e

$$E_P = (N_P - N_A) \operatorname{tg} (AP) \div E_A$$

oppure

$$E_P = (N_P - N_B) \operatorname{tg} (BP) \div E_B.$$



Se consideriamo fra i valori numerici assoluti delle due tangenti quello maggiore e si assume il vertice relativo quale origine della coordinata parziale  $x$ , l'espressione di  $N_P$  si può semplificare nelle:

$$x_P = \frac{-(E_A - E_B) \div x_A \operatorname{tg} (AP)}{\operatorname{tg} (AP) - \operatorname{tg} (BP)} \quad \text{[I]}$$

oppure

$$x_P = \frac{-(E_A - E_B) - x_B \operatorname{tg} (BP)}{\operatorname{tg} (AP) - \operatorname{tg} (BP)} \quad \text{[II]}$$

tenendo presente che in tali espressioni la  $x_A$  o la  $x_B$  è la coordinata parziale di  $A$  o di  $B$  rispetto a  $B$  o ad  $A$  e, di conseguenza, lo è anche la  $x_P$ .

Per il calcolo dell'espressioni semplificate [I] e [II] è necessario, quindi, conoscere sia il  $\Delta E$  fra  $A$  e  $B$  sia il  $\Delta N$  che rappresenta, in funzione del va-

lore assoluto maggiore di una delle due tangenti, la coordinata  $x$  parziale di  $A$  rispetto a  $B$  o viceversa.

Tali elementi sono già necessariamente noti sia per determinare il punto ausiliario  $R$  che il punto di Collins in quanto gli azimut gaussiani relativi ad  $R$  e Collins sono ottenuti in funzione di  $tg(AB) = \frac{\Delta E_A^B}{\Delta N_A^B}$  per cui anche la macchina calcolatrice semplice trova utile impiego nell'esecuzione di tali calcoli.

*Esempio numerico usufruendo dei punti ausiliari.*

In occasione della campagna aerofotogrammetrica in Italia Settentrionale, si è presentato il caso di un punto d'appoggio fotogrammetrico  $P$  la cui

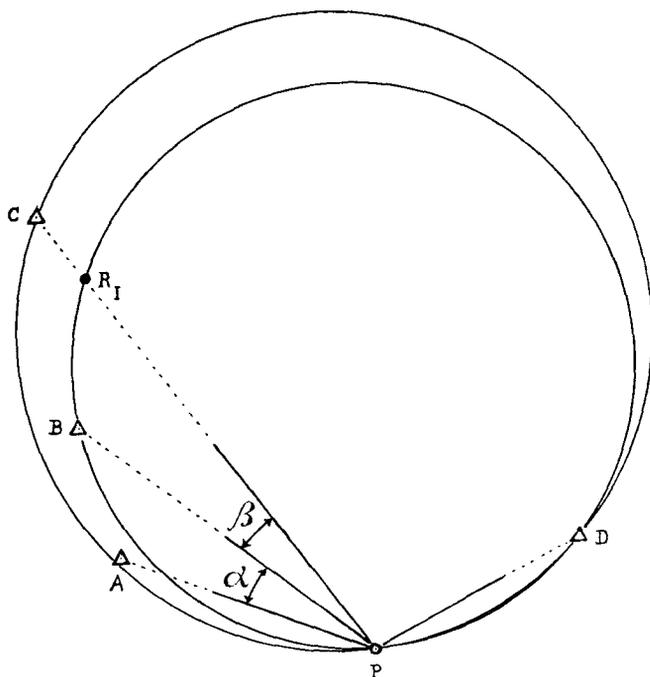


Fig. 13

determinazione dipende dalle osservazioni eseguite ai punti trigonometrici  $A, B, C, D$  che solo sono visibili da  $P$  e precisamente:

$A$	$B$	$C$	$D$
$0^{\circ}$	$17^{\circ} 00' 17''$	$32^{\circ} 40' 09''$	$133^{\circ} 06' 19''$

Riportando alla scala  $1 : 100000$  la posizione sia di  $P$  che di  $A, B, C, D$  (fig. 13) si scorge come il punto  $A$  giaccia pressoché sulla circonferenza che con-

tiene  $P, C, D$ . A sua volta i punti  $P, B, D$  giacciono su di una circonferenza che non si discosta molto dalla prima.

La risoluzione del problema di Snellius è pertanto possibile usufruendo solo di  $A, B, C$  introducendo in calcolo però gli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  dell'ordine di  $17^\circ$  e  $15^\circ$ .

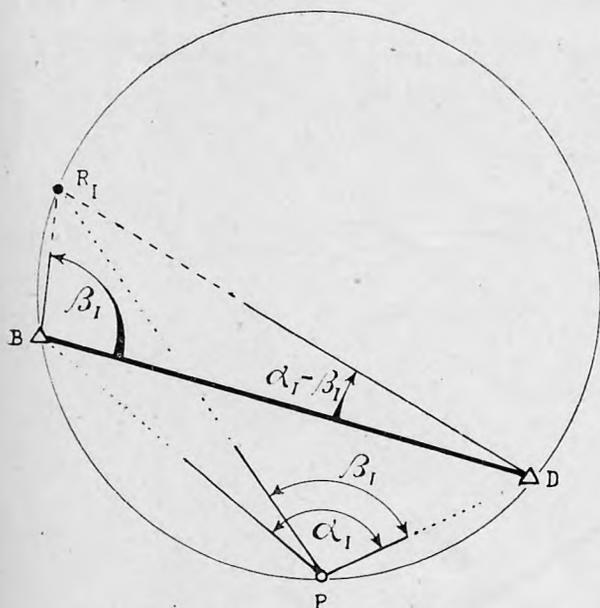


Fig. 14

prossimazione all'azimut gaussiano ( $PC$ ), anche se la distanza  $PR_I$  è circa 6 volte la  $\overline{R_I C}$ .

Il punto ausiliario  $R_I$  è determinato per intersezione diretta da  $B, D$  (fig. 14) seguendo lo schema rappresentato dalla figura 6, tenendo presente che in tale particolare caso anche l'angolo  $\beta_I$  risulta osservato in quanto la direzione  $PR_I$  è la direzione  $PC$ . I calcoli sono stati eseguiti direttamente in campagna impiegando la calcolatrice «Curta» mostrata in fig. 15 (dimensioni: 6,5 cm per 9 cm) <sup>(1)</sup> ed usufruendo delle relazioni semplificate I e II.



Fig. 15

<sup>(1)</sup> CURTA (System Curt Herzstark, Made in Liechtenstein by Contina Ltd. Mauren).

Attraverso le coordinate gaussiane di  $B$ ,  $D$  rispettivamente:

$$B \begin{cases} 1 & 689 & 227,18 & \text{m} \\ 5 & 161 & 063,08 & \text{m} \end{cases} \quad D \begin{cases} 1 & 699 & 143,54 & \text{m} \\ 5 & 158 & 682,73 & \text{m} \end{cases}$$

risulta noto l'azimut gaussiano  $(BD) = 103^\circ 29' 53''$  e reciproco, e di conseguenza risultano noti gli azimut gaussiani  $(BR_I) = (BD) - \beta_I = 103^\circ 29' 53'' - 100^\circ 26' 10'' = 3^\circ 03' 43''$  e  $(DR_I) = (DB) \div (\alpha_I - \beta_I) = 283^\circ 29' 53'' + 15^\circ 39' 52'' = 299^\circ 09' 45''$ .

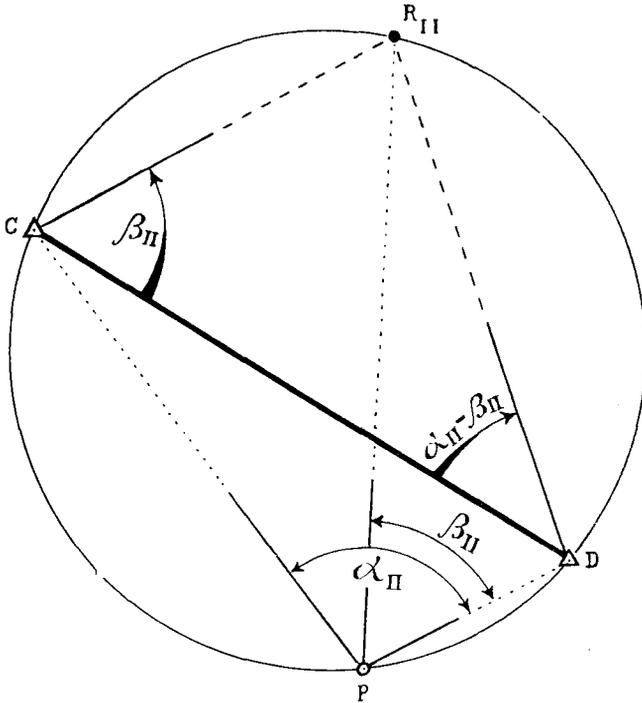


Fig. 16

Attraverso le coordinate gaussiane di  $R_I$  e cioè: 1 689 390,96 m, 5 164 124, 89 m, risulta noto l'azimut gaussiano  $(PC) = 323^\circ 16' 46''$  (le coordinate gaussiane di  $C$  sono: 1 688 504, 30 m e 5 165 313,54 m), e, quindi, risulta noto l'azimut gaussiano dell'origine di  $290^\circ 36' 37''$ .

Le coordinate gaussiane medie del punto d'appoggio  $P$  divengono: 1 694 983,17 m  $\pm$  3 cm e 5 156 627,95 m  $\pm$  1 cm.

Con tale calcolo è stato mostrato il caso pratico di risoluzione del problema di Snellius usufruendo del punto ausiliario  $R_I$  in sostituzione del punto di Collins.

Per ottenere un ulteriore controllo si può usufruire di un secondo punto ausiliario  $R_{II}$  prescelto, questa volta, sulla circonferenza che contiene  $P$ ,  $C$ ,  $D$

(fig. 15) in modo che il problema di Snellius sia risolto nelle migliori condizioni, e precisamente usufruendo di  $R_{II}$ ,  $R_I$  ed  $A$  (fig. 17).

La direzione  $PR_{II} = 72^\circ 30' 00''$  si ottiene attraverso la misura grafica a mezzo di un rapportatore.

Con riferimento alla figura schematica 6, viene in tal caso determinato l'azimut gaussiano  $(CD) = 121^\circ 55' 58''$  (e reciproco) per cui risultano noti gli azimut gaussiani  $(CR_{II}) = (CD) - \beta_{II} = 121^\circ 55' 58'' - 60^\circ 36' 19'' = 61^\circ 19' 39''$  e  $(DR_{II}) = (DC) + (\alpha_{II} - \beta_{II}) = 301^\circ 55' 58'' + 39^\circ 49' 51'' =$

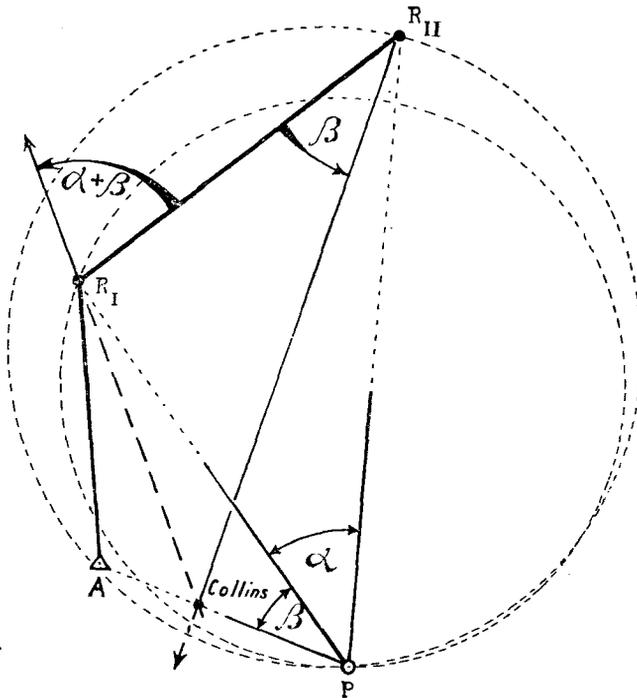


Fig. 17

$341^\circ 45' 49''$  e, quindi, le coordinate gaussiane di  $R_{II}$  e cioè: 1 695 667,99 m, 5 169 231,08 m.

La risoluzione del problema di Snellius con  $R_{II}$ ,  $R_I$  ed  $A$  (fig. 17) dà luogo al punto di Collins che giace pressoché a metà distanza fra  $A$  e  $P$ . L'azimut gaussiano  $(PA)$  di  $290^\circ 36' 33''$ , cioè in tal caso l'azimut dell'origine, differisce di  $4''$  rispetto al valore ottenuto con  $R_I$  per cui le coordinate gaussiane di  $P$  subiscono una variazione di 0,22 m in  $E$  e 0,00 in  $N$ .

Praticamente, quindi, trattandosi di un punto di appoggio fotogrammetrico, le due soluzioni coincidono.

Con tale esempio numerico rimane ancora una volta dimostrato il grande vantaggio di poter eseguire i calcoli numerici sul piano di Gauss-Boaga.

È possibile infatti, come su mostrato, realizzare delle soluzioni con estrema semplicità che sarebbe impossibile ottenere operando sulla sfera locale.

In particolare, in questa nota, è mostrato come sia possibile determinare esclusivamente per intersezione diretta dei particolari punti ausiliari, che possono essere prescelti usufruendo di un grafico al 100000, i quali permettono di risolvere il problema di Snellius anche se i punti noti a disposizione non sono ubicati nelle migliori condizioni, e soprattutto permettono di eseguire i calcoli d'intersezione diretta eliminando gli angoli acuti per cui il problema di Snellius risulta generalizzato al massimo grado e le direzioni ai punti noti possono sempre essere ottenute eseguendo solo due strati (1).

Dato l'approssimazione ammessa per i punti d'appoggio fotogrammetrici, le direzioni misurate in campagna si sono ritenute quali direzioni gaussiane.

Comunque è stato più volte richiamato l'attenzione che il calcolo per ridurre le direzioni ellissoidiche osservate in direzioni gaussiane osservate è di immediata e semplice esecuzione (2), per cui eseguendo i calcoli sul piano di Gauss-Boaga non vi è più limite fra campo topografico e campo geodetico in quanto tutti i calcoli dipendono dalla sola applicazione della trigonometria piana e della geometria bidimensionale.

Se le direzioni ellissoidiche su riportate fossero state ottenute osservando punti trigonometrici distanti anche 30-40 km (naturalmente dalla media di un numero superiore di strati) i calcoli di cui sopra sarebbero stati condotti con la stessa semplicità previo la riduzione di tali direzioni ellissoidiche nelle corrispondenti direzioni gaussiane.

(1) È necessario tener presente che il punto ausiliario  $R_{II}$  è stato prescelto graficamente sulla circonferenza  $PCD$  verificando, sempre graficamente, che il punto di Collins venga determinato per lo meno a metà distanza fra  $A$  e  $P$  dato che il valore dell'azimut gaussiano (Collins- $A$ ) lo si attribuisce all'azimut gaussiano ( $PA$ ).

Poiché la direzione  $PR_{II}$  è misurata graficamente usufruendo di un rapportatore arrotondandola al mezzo grado od al grado, è evidente che la posizione di  $R_{II}$  definita attraverso il calcolo non coinciderà con quella grafica prefissata, e, di conseguenza, analogamente avverrà per il punto di Collins.

È altrettanto evidente, però, che l'eventuale spostamento di 2 o 300 metri del punto di Collins non altera l'approssimazione prevista per ( $PA$ ), per cui è sufficiente usufruire di un grafico alla scala 1 : 100000 per prefissare i vari punti ausiliari necessari e misurarli graficamente al grado le loro direzioni.

(2) G. BOAGA: *Trattato di Geodesia e Topografia*. CEDAM, Padova, Vol. I, parte IV cap. III da pag. 556 e pag. 568 e cap. VI da pag. 614 a pag. 630.