

INTERSEZIONE INVERSA CONSIDERAZIONI E NOTIZIE

GIAN PIERO LE DIVELEC

Premessa

Il Prof. Bonifacino nelle note precedenti, che, presentate al VII convegno SIFET, dovevano essere pubblicate nel n. 3-1961 del Bollettino, ha esposto alcuni problemi agevolmente risolvibili con la calcolatrice e connessi in qualche modo alla intersezione inversa.

Il Geom. Francesco Albani nella nota successiva illustrerà dettagliatamente un modo d'impiegare la calcolatrice « Brunsviga 13Z Dupla » per la soluzione numerica della « intersezione inversa ».

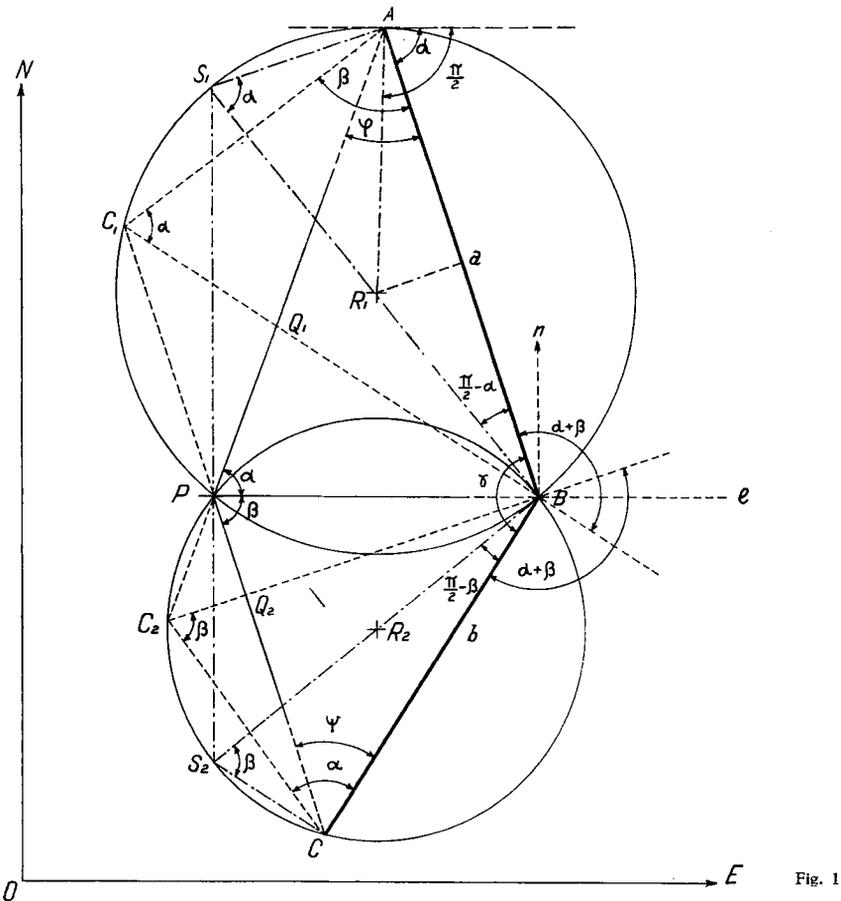
Fra i sistemi per la determinazione dei punti trigonometrici di dettaglio, l'intersezione inversa, a motivo dell'espandersi della aerofotogrammetria, è divenuto il sistema piú frequentemente usato. Esso consente infatti, senza procedere a ricognizioni e segnalazioni preventive, la raccolta immediata delle misure sufficienti ad individuare la posizione topografica di un punto scelto e riconosciuto sugli aerofotogrammi.

Il goniometro (teodolite o tacheometro) è posto in stazione sul punto da determinare: (P della fig. 1). Esso serve a rilevare le direzioni angolari (orizzontali e-o verticali) ad almeno tre punti di posizione nota (A , B e C della fig. 1). Il problema (1) sembra fosse noto ad Ipparco nel II secolo a. C. La prima soluzione pubblicata in epoca certa: 1617 è dello Snellius, un'altra soluzione fu fornita dal Collins nel 1671, la soluzione del Pothenot, che consentí anche a quest'ultimo di dare il suo nome al problema, è del 1692. Il problema appassionò e continua ad interessare gli studiosi di geometria teorica e pratica. (Vedansi le bibliografie del Bonifacino e l'elenco delle proprie pubblicazioni sull'argomento fornito dall'Albani a chiusura della sua nota. Tale elenco lo inserisce senz'altro fra gli specialisti del problema).

Il Prof. Boaga (2) segnala l'interesse e la completezza dello studio pubblicato dal Prof. Diego Fellini nel XXXII volume degli Atti dell'accademia delle scienze di Torino. Il Prof. Bartorelli (3) riassume ed elenca studi che, vent'anni fa, avevano già fornito formule risolutive adatte per la macchina « Brunswiga 13Z Dupla ». L'Ing. geog. Bencini dell'I.G.M. ha recentemente studiato un sistema di compensazione (quando i punti noti sono piú di tre) adatto per le calcolatrici elettroniche. Anche se limitiamo le nostre considerazioni ad un ambiente

ristretto (quello dei topografi italiani), non è illecita l'affermazione; il problema è ancora di attualità. È di attualità perché la sua applicazione è sempre più frequente, ma anche perché, al di là delle classiche costruzioni grafiche, quelle che oggi interessano sono le assai più sicure risoluzioni numeriche. Le quali risoluzioni numeriche si devono evolvere ed adattare alle caratteristiche degli strumenti di calcolo disponibili. Questi strumenti di calcolo sono passati dalle tavole dei logaritmi, alle calcolatrici elettroniche, dal pallottoliere alla calcolatrice elettrica, le formule devono adattarsi alle nuove possibilità e stare al passo con il nostro anelito di ridurre il tempo ed aumentare la precisione.

Lo scopo che io mi prefiggo con questa nota riepilogativa è di stimolare i lettori a mandare al nostro bollettino, come ha fatto l'Albani, quanto è a loro conoscenza sia dal punto di vista teorico, che da quello pratico sul problema dell'intersezione inversa. Sono certo che questo scambio di notizie sarà utile a tutti.



1. Considerazioni geometriche.

1.1. La posizione di P (fig. 1) è definita, con gli elementi noti, come: «il punto, che vede ad un tempo due noti segmenti sotto angoli noti». Per differenza fra le direzioni orizzontali misurate in campagna si calcolano gli angoli α e β . Il luogo geometrico dei punti che vedono il segmento AB (BC) sotto un angolo α (β) è lungo due archi di cerchio (fig. 2) uguali e situati da bande opposte del segmento AB (BC). Purché ABC e P non appartengano allo stesso cerchio, i due luoghi geometrici si intersecano nel punto B e negli altri due punti P_1 e P_2 , situati da bande opposte rispetto alla spezzata ABC . Fra i due è generalmente possibile scegliere quello che risolve il problema, purché sia nota, grosso modo, la posizione relativa di P rispetto alla spezzata ABC .

1.2. Costruiti separatamente due grafici sovrapponibili per trasparenza: quello dei punti noti e quello delle direzioni note concorrenti in P , si faccia scorrere un grafico sull'altro finché ogni punto noto giaccia sulla direzione corrispondente ed il punto P si trovi dalla banda voluta. Il problema è così risolto graficamente per *tentativi successivi*.

1.3. Utilizzando il compasso il problema è risolto con *procedimento diretto* purché si sia stabilita la posizione dei punti R_1 e R_2 della fig. 1 centri degli archi di cerchio APB e CPB . I cerchi saranno tracciati con apertura di compasso R_1B e R_2B rispettivamente. Per stabilire la posizione di $R_1(R_2)$ ricordiamo, per esempio, come:

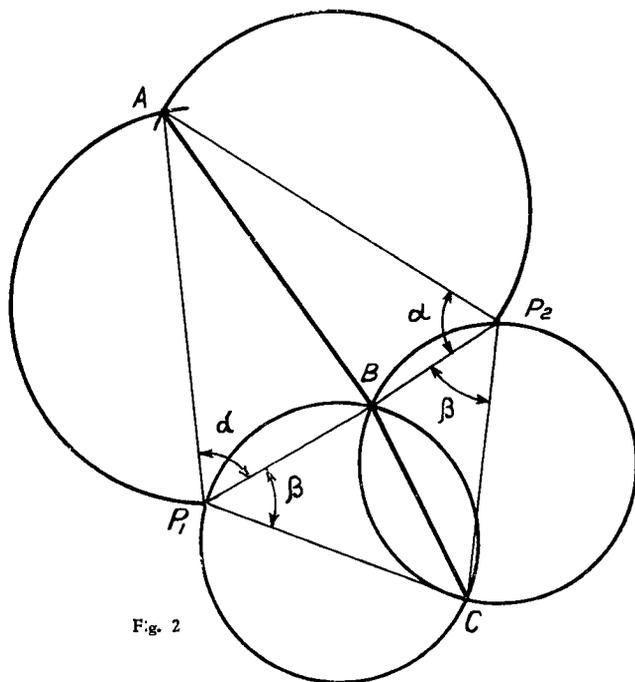


Fig. 2

1.3.1. $R_1(R_2)$ è l'incrocio della normale al mezzo di $AB(BC)$ con la normale $AR_1(CR_2)$ alla retta per $A(C)$ che forma l'angolo $\alpha(\beta)$ con $AB(BC)$ dalla banda opposta di P ;

1.3.2. la normale alla retta che forma l'angolo $\alpha(\beta)$ forma l'angolo: $\frac{\pi}{2} - \alpha, \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$ con il segmento $AB(BC)$ dalla stessa banda di P .

1.3.3. $R_1(R_2)$ è il punto di mezzo dell'ipotenusa del triangolo rettangolo in $A(C)$ avente in B l'angolo: $\frac{\pi}{2} - \alpha, \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$, della stessa banda di P . ecc.

1.4. *Senza compasso* il problema è risolto con procedimento diretto e l'uso di alcuni punti ausiliari. Le costruzioni più note sono: (fig. 1).

1.4.1. La *costruzione del Cassini*, nella quale i punti ausiliari (S_1 ed S_2) sono i terzi vertici dei triangoli rettangoli in A e C , che hanno gli angoli nel vertice comune B pari rispettivamente a $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ e $\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$. P è il piede della normale da B ad S_1S_2 . È evidente che S_1 ed S_2 appartengono ai già ricordati archi di cerchio (1-3) perché $AS_1B = \alpha$ e $CS_2B = \beta$ per costruzione. Anzi S_1 ed S_2 sono i punti diagonalmente opposti a B sui suddetti cerchi. Di conseguenza: $BPS_1 = \frac{\pi}{2}$ e BP è normale ad S_1S_2 .

1.4.2. La *costruzione del Collins*, nella quale i punti ausiliari di Collins (C_1 e C_2) sono i terzi vertici di triangoli simili costruiti sui segmenti AB e BC con angolo nel vertice comune (B) $= \pi - (\alpha + \beta)$ e rispettivamente nel vertice $A = \beta$ e nel vertice $C = \alpha$. Poiché $AC_1B = \alpha$ e $BC_2C = \beta$ per costruzione, i punti C_1 e C_2 appartengono ai consueti archi di cerchio. Il punto P è l'incrocio di CC_1 con AC_2 . Infatti: per la similitudine di ABC_1 e BC_2C , $AB : BC_2 = BC_1 : BC$; di conseguenza i triangoli ABC_2 e C_1BC , che hanno gli angoli in B eguali ($\alpha + \beta + \gamma - \pi$) e i lati adiacenti proporzionali, sono simili; ciò comporta che gli angoli BCQ_2 e Q_2C_2P , per esempio, sono eguali, il che provoca, nei due triangoli opposti al vertice in Q_2 : CQ_2B e C_2Q_2P $C_2PQ_2 = Q_2BC = \pi - (\alpha + \beta)$, e perciò anche questi triangoli sono simili; ma allora anche gli altri due triangoli opposti al vertice in Q_2 : BQ_2P e CQ_2C_2 sono simili perché hanno proporzionali i lati adiacenti all'angolo uguale di Q_2 . Tale similitudine comporta $BPC = BC_2C = \beta$, che insieme all'altra $APC = \pi - C_2PQ_2 = \alpha + \beta$ giustifica l'affermazione: « P è il punto d'incrocio fra AC_2 e CC_1 » perché $APB = \alpha$ e $CPB = \beta$.

La costruzione di Collins non richiede necessariamente la ricerca dei due punti ausiliari. Quando sia stato costruito per esempio C_1 e tracciata la C_1C poich , come abbiamo visto, i triangoli C_1BC e ABC_2 sono simili, sar  sufficiente tracciare da A la retta che forma con AB un angolo uguale a BC_1C e determinarne l'incontro con la C_1C per individuare P .

2. Richiami di soluzioni numeriche.

2.1. *Calcolo logaritmico.* — Un procedimento per il calcolo logaritmico della posizione di P   schematizzato nel mod. 7 delle Istruzioni per le operazioni trigonometriche catastali (4) ed   descritto nei gi  citati trattati del Cicconetti (1) e del Boaga (2).

Si considerano soddisfacenti per il calcolo logaritmico le formule nelle quali si esprimono prodotti o quozienti, perch  si trasformano in somme di logaritmi. Infatti se:

$$c = a \cdot b \quad \log c = \log a + \log b \quad \log a = \log c + \text{colog } b$$

Col simbolismo delle istruzioni catastali e seguendo la fig. 1 pongo

$$M = \frac{1}{2} (\varphi + \psi) \quad N = \frac{1}{2} (\varphi - \psi)$$

  evidente $\varphi = M + N \quad \psi = M - N$

Poich  la semisomma degli angoli interni del quadrilatero $ABCP$ di cui sono noti gli angoli in $P = (\alpha + \beta)$ e in $B = \gamma$   pari a π avremo:

$$2.1.1. \quad M = \pi - \frac{1}{2} (\alpha + \beta + \gamma)$$

d'altra parte, per il teorema dei seni applicato ai due triangoli adiacenti APB e BPC si ha

$$2.1.2. \quad \frac{\text{sen } \varphi}{\text{sen } \psi} = \frac{b \text{ sen } \alpha}{a \text{ sen } \beta} = \frac{1}{\text{tang } \mu}$$

dove μ   un angolo ausiliario determinabile con gli ultimi due membri dell'eguaglianza 2.1.2.

Facendo il dividendo ed il componendo del primo ed ultimo termine della 2.1.2. si ha:

$$\frac{\text{sen } \varphi + \text{sen } \psi}{\text{sen } \varphi - \text{sen } \psi} = \frac{1 + \text{tang } \mu}{1 - \text{tang } \mu}$$

e per note trasformazioni trigonometriche:

$$\frac{\operatorname{tang} M}{\operatorname{tang} N} = \frac{\operatorname{tang} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tang} \mu}{1 - \operatorname{tang} \frac{\pi}{4} \operatorname{tang} \mu} = \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \mu \right)$$

da cui:

2.1.3. $\operatorname{tang} N = \operatorname{tang} M \operatorname{cotang} \left(\frac{\pi}{4} + \mu \right)$. Con la 2.1.1. e la 2.1.3. si determinano M ed N ed in conseguenza φ e ψ . Con la conoscenza di questi angoli si possono determinare, applicando ancora il teorema dei seni, le lunghezze incognite dei lati:

$$AP = a \frac{\operatorname{sen} (\varphi + \alpha)}{\operatorname{sen} \alpha} \quad BP = a \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \alpha} = b \frac{\operatorname{sen} \psi}{\operatorname{sen} \beta} \quad CP = b \frac{\operatorname{sen} (\psi + \beta)}{\operatorname{sen} \beta}$$

Gli angoli φ e ψ permettono di determinare gli azimut degli stessi lati, si potranno quindi calcolare le variazioni delle coordinate da aggiungere alle coordinate già note dell'altro estremo. Se, ad esempio, ϑ_{AB} è l'azimut della BA l'azimut della BP è $\vartheta = \vartheta_{AB} + (\alpha + \varphi) - \pi$

$$N_P = N_B + \overline{BP} \cos \vartheta$$

$$E_P = E_B + \overline{BP} \operatorname{sen} \vartheta$$

Il calcolo logaritmico è alquanto laborioso e lungo.

2.2. Calcolo con la costruzione del Cassini.

Per questo e per i successivi supponiamo che l'origine delle coordinate sia passata in B . Fra il sistema cartografico (EN) ed il nuovo sistema (en) sussistono le relazioni:

$$E = e + E_B \quad N = n + N_B$$

poiché $S_1AB = S_2CB = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{e_{s_1} - e_a}{AS_1} = - \frac{n_a}{AB} \quad \frac{n_{s_1} - n_a}{AS_1} = \frac{e_a}{AB}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{AS_1}{AB} = - \frac{e_{s_1} - e_a}{n_a} = \frac{n_{s_1} - n_a}{e_a}$$

$$\frac{e_{s_2} - e_c}{CS_2} = \frac{n_c}{CB} \quad \frac{n_{s_2} - n_c}{CS_2} = - \frac{e_c}{CB}$$

$$\operatorname{cotg} \beta = \frac{CS_2}{CB} = \frac{e_{s_2} - e_c}{n_c} = \frac{n_c - n_{s_2}}{e_c}$$

e quindi le coordinate planimetriche dei punti ausiliari sono:

$$2.2.1. \quad S_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} e_{s_1} = e_a - n_a \cotg \alpha \\ n_{s_1} = n_a + e_a \cotg \alpha \end{array} \right. \quad S_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} e_{s_2} = e_c + n_c \cotg \beta \\ n_{s_2} = n_c - e_c \cotg \beta \end{array} \right.$$

l'azimut ϑ della BP normale a S_1S_2 ed il complemento dell'azimut di S_1S_2 vale:

$$2.2.2. \quad \text{tang } \vartheta = \frac{n_{s_1} - n_{s_2}}{e_{s_2} - e_{s_1}} = \frac{n_{s_1} - n_p}{e_p - e_{s_1}} = \frac{n_p - n_{s_2}}{e_{s_2} - e_n}$$

Con la valutazione di ϑ le coordinate di P sono determinabili in due modi.

Con il sistema ideato da Schlötzer (5) il quale, sostituendo nelle (2.2.2.) ad e_p la sua espressione in funzione di n_p e di $\text{tang } \vartheta$, dà le formule risolutive:

$$2.2.3 \quad P \equiv \left\{ \begin{array}{l} n_p = \frac{n_{s_1} + e_{s_1} \text{ tang } \vartheta}{1 + \text{tang}^2 \vartheta} = \frac{n_{s_2} + e_{s_1} \text{ tang } \vartheta}{1 + \text{tang}^2 \vartheta} \\ e_p = n_p \text{ tang } \vartheta \end{array} \right.$$

Oppure con il sistema piú noto, forse perché descritto nelle istruzioni divulgate con la calcolatrice « Brunswiga 13Z dupla », che danno P per intersezione da B con azimut ϑ e da S_1 con azimut $\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)$.

Le formule, che con la suddetta macchina consentono l'uso dell'eguagliamento (come verrà meglio chiarito dall'Albani), sono:

$$2.2.4. \quad e_p = e_{s_1} + n_{s_1} \cotang \vartheta - n_p \cotang \vartheta = n_p \text{ tang } \vartheta$$

richiedono la lettura sulle tavole numeriche del valore della cotangente dal valore noto di tangente, ovvero il calcolo della cotangente di ϑ dopo quello della tangente.

2.3. Calcolo con la costruzione di Collins.

La nota del Bartorelli (3) faceva cenno ad una soluzione che partendo dalla determinazione di un punto di Collins determina P per intersezione da B e da C . Nella nota attuale dell'Albani si troveranno i dettagli per l'uso della calcolatrice doppia con questo metodo. Dalla fig. 1 si osserva che se l'azimut di AB è ϑ_{AB} noto, di conseguenza quello di AC_1 , è $\vartheta_{AC_1} = \vartheta_{AB} + \beta$ e quello di BC_1 è $\vartheta_{BC_1} = \vartheta_{AB} + \alpha + \beta$

applicando le formule d'intersezione si calcola le coordinate di C_1 con la

$$2.3.1. \quad e_{c_1} = n_{c_1} \operatorname{tang} \vartheta_{BC_1} = e_A - n_A \operatorname{tang} \vartheta_{AC_1} + n_{c_1} \operatorname{tang} \vartheta_{AC_1}$$

si può allora calcolare l'azimut della CC_1 con:

$$2.3.2. \quad \operatorname{tang} \vartheta_{CC_1} = \frac{e_c - e_{c_1}}{n_c - n_{c_1}}$$

e l'azimut ϑ della BP con la (2.3.3.) $\vartheta = \vartheta_{CC_1} - \beta$

ed applicando di nuovo la formula dell'intersezione diretta da C e da B le coordinate di P

$$e_p = n_p \operatorname{tang} \vartheta = e_c - n_c \operatorname{tang} \vartheta_{cc_1} + n_p \operatorname{tang} \vartheta_{cc_1}$$

2.4. Calcolo col procedimento di Galkiewicz.

Nello studio piú volte citato il Bartorelli (3) segnò le formule del Galkiewicz (6) che si dimostrano adatte per il calcolo con la macchina normale e con le calcolatrici elettroniche. Fra l'altro questo procedimento è usato dal nostro IGM (Mod. 597-T). Dalla fig. 1 si ricava che l'equazione della retta BP è $e_p = n_p \operatorname{tang} \vartheta$

$$\begin{aligned} \text{quella della retta } AP & \text{ è } e_a - e_p = (n_a - n_p) \operatorname{tang} (\vartheta - \alpha) \\ \text{quella della retta } CP & \text{ è } e_c - e_p = (n_c - n_p) \operatorname{tang} (\vartheta + \beta) \end{aligned} \quad 2.4.1$$

Poiché:

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} (\vartheta - \alpha) &= \frac{\operatorname{tang} \vartheta - \operatorname{tang} \alpha}{1 + \operatorname{tang} \vartheta \operatorname{tang} \alpha} \\ \operatorname{tang} (\vartheta + \beta) &= \frac{\operatorname{tang} \vartheta + \operatorname{tang} \beta}{1 - \operatorname{tang} \vartheta \operatorname{tang} \beta} \end{aligned}$$

le ultime due equazioni (2.4.1.) possono scriversi:

$$\begin{aligned} (e_a - e_p) (1 + \operatorname{tang} \vartheta \operatorname{tang} \alpha) &= (n_a - n_p) (\operatorname{tang} \vartheta - \operatorname{tang} \alpha) \\ (e_c - e_p) (1 - \operatorname{tang} \vartheta \operatorname{tang} \beta) &= (n_c - n_p) (\operatorname{tang} \vartheta + \operatorname{tang} \beta) \end{aligned}$$

che per la prima: $e_p = n_p \operatorname{tang} \vartheta$ divengono:

$$\begin{aligned} e_a(1 + \operatorname{tang} \vartheta \operatorname{tang} \alpha) - e_p \operatorname{tang} \vartheta \operatorname{tang} \alpha &= n_a(\operatorname{tang} \vartheta - \operatorname{tang} \alpha) + n_p \operatorname{tang} \alpha \\ e_c(1 - \operatorname{tang} \vartheta \operatorname{tang} \beta) + e_p \operatorname{tang} \vartheta \operatorname{tang} \beta &= n_c(\operatorname{tang} \vartheta + \operatorname{tang} \beta) - n_p \operatorname{tang} \beta \end{aligned}$$

sommando alla prima moltiplicata per $\cotang \alpha$ la seconda moltiplicata per $\cotang \beta$ si ha:

$$\text{tang } \vartheta = \frac{e_a \cotang \alpha + e_c \cotang \beta + (n_a - n_c)}{n_a \cotang \alpha + n_c \cotang \beta + (e_c - e_a)} \quad 2.4.2.$$

la conoscenza di ϑ consente di calcolare $\text{tang } (\vartheta - \alpha)$ e $\text{tang } (\vartheta + \beta)$ e quindi sostituendo l'espressione di e_p della prima nella 2^a e nella 3^a delle (2.4.1.) si calcola in doppio modo

$$2.4.3. \quad n_p = \frac{e_a - n_a \text{ tang } (\vartheta - \alpha)}{\text{tang } \vartheta - \text{tang } (\vartheta - \alpha)} = \frac{e_c - n_c \text{ tang } (\vartheta + \beta)}{\text{tang } \vartheta - \text{tang } (\vartheta + \beta)}$$

e con la conoscenza di ϑ , $\vartheta - \alpha$, $\vartheta + \beta$ e n_p con le (2.4.1.) si ha modo di calcolare e_p .

3. Procedimenti di compensazione.

È buona consuetudine che alla determinazione della posizione di P concorrano misure in quantità sovrabbondante rispetto alle indispensabili. Le già ricordate istruzioni catastali (4) stabiliscono per esempio al par. 13: «L'uso della intersezione inversa è ammesso in via eccezionale sempre che vengano assunti quattro punti di appoggio opportunamente disposti per una buona determinazione». A motivo degli inevitabili errori di misura le misure sovrabbondanti, se utilizzate tutte, danno molteplici posizioni del punto da determinare. Se gli scostamenti fra le varie posizioni sono ammissibili converrà scegliere come posizione *compensata* del punto, cioè come posizione più probabile una posizione intermedia fra le determinate. La scelta sarà fatta con criterio. Si tratta di adottare il «procedimento di compensazione» più conveniente.

3.1. Nel caso di risoluzione grafica del problema (fig. 1) il punto compensato potrebbe essere il baricentro fra le varie soluzioni trovate. Baricentro che in pratica viene stabilito ad occhio.

3.2. Il procedimento di compensazione conveniente per la risoluzione numerica logaritmica (2.1.) è quello schematico nel Mod. 7a delle istruzioni catastali (4) e descritto dal Boaga (2). Le equazioni che servirono per il calcolo (2.1.1. e 2.1.2.) possono essere scritte così:

$$3.2.1. \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta + \gamma + \varphi + \psi = 2\pi \\ \frac{a \text{ sen } \beta \text{ sen } \varphi}{b \text{ sen } \alpha \text{ sen } \psi} = 1 \end{array} \right.$$

α e β sono le misure affette da errori — $x\alpha$ e — $x\beta$.

φ e ψ sono elementi dedotti dai procedimenti che subiscono, se α e β sono corrette dei loro errori, correzioni $x\varphi$ e $x\psi$, se $t\alpha$, $t\beta$, $t\varphi$, $t\psi$ sono le differenze tabulari dei logaritmi dei vari seni dalle 3.2.1. si ha

$$x\varphi + x\psi = - (x\alpha + x\beta)$$

$$t\varphi x\varphi - t\psi x\psi = t\alpha x\alpha - t\beta x\beta$$

$$3.2.2. \quad \begin{cases} x\varphi = \frac{t\alpha - t\psi}{t\psi + t\varphi} x\alpha - \frac{t\beta + t\psi}{t\psi + t\varphi} x\beta = m' x\alpha + n' x\beta \\ x\psi = - \frac{t\alpha + t\varphi}{t\psi + t\varphi} x\alpha + \frac{t\beta - t\varphi}{t\psi + t\varphi} x\beta = m x\alpha + n x\beta \end{cases}$$

Applicando il teorema dei seni al quadrilatero $PBCD$ si ha l'equazione di condizione:

$$3.2.3. \quad \frac{b \operatorname{sen} (\beta + \psi) \operatorname{sen} \varepsilon}{c \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} (\varepsilon + \delta - \psi)} = 1$$

invece: (posto: $\gamma' = \beta + \psi$ e $\delta' = \varepsilon + \delta - \psi$)

$$3.2.4. \quad 0 \neq \log \frac{b \operatorname{sen} (\beta + \psi) \operatorname{sen} \varepsilon}{c \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} (\varepsilon + \delta - \psi)} = \Delta$$

poiché $x\gamma' = x\beta + x\psi = mx\alpha + (n + 1) x\beta$

$$x\delta' = x\varepsilon - x\psi = - mx\alpha - nx\beta + x\varepsilon$$

dalla (4.2.4.) si ottiene:

$$t\gamma' [mx\alpha + (n + 1)x\beta] + t\varepsilon x\varepsilon - t\beta x\beta - t\delta' (x\varepsilon - mx\alpha - nx\beta) = \Delta$$

e quindi posti:

$$m = - \frac{t\alpha + t\varphi}{t\psi + t\varphi} \quad n = \frac{t\beta - t\varphi}{t\psi + t\varphi} \quad p = t\gamma' + t\delta' \quad q = t\gamma' - t\beta \quad r = t\varepsilon - t\delta'$$

$$a_1 = pm \quad a_2 = q + pn \quad a_3 = r$$

$$I = \frac{-\Delta}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

si hanno le soluzioni che soddisfano le condizioni dei minimi errori quadratici:

$$x\alpha = + a_1 I \quad x\beta = + a_2 I \quad x\varepsilon = + a_3 I$$

3. 3. Un procedimento di compensazione empirico assai frequentemente adoperato nei calcoli che forniscono le coordinate del punto incognito consiste nello scegliere come coordinate definitive quelle medie di tutte le calcolate che non si scostano, oltre certi limiti, dalla media.

3.4. Un altro procedimento di compensazione che si adatta nell'ultimo caso e che è particolarmente idoneo quando si impieghi la calcolatrice elettronica è quello della « alterazione delle coordinate ». Supponiamo di aver determinato col quadrilatero $ABCP$ i valori e_p n_p delle coordinate di P :

dalla 2.4.1. si ha:

$$3.4.1. \quad \begin{cases} e_p \cos \vartheta - n_p \sin \vartheta = 0 \\ (e_a - e_p) \cos (\vartheta - \alpha) - (n_a - n_p) \sin (\vartheta - \alpha) = 0 \\ (e_c - e_p) \cos (\vartheta + \beta) - (n_c - n_p) \sin (\vartheta + \beta) = 0 \end{cases}$$

e si dispone di una osservazione sovrabbondante a D poiché l'azimut di DP è $\vartheta + \beta + \varepsilon$ dovrà essere:

$(d_a - e_p) \cos (\vartheta + \beta + \varepsilon) - (n_d - n_p) \sin (\vartheta + \beta + \varepsilon) = 0$ a motivo degli errori di osservazione invece esso sarà diverso da 0 ed uguale a $-\Delta$ apportando una correzione x_e e x_n alle coordinate l_p ed n_p avremo

$$\begin{aligned} x_e \cos \vartheta - x_n \sin \vartheta &= v_1 \\ x_e \cos (\vartheta - \alpha) - x_n \sin (\vartheta - \alpha) &= v_2 \\ x_e \cos (\vartheta + \beta) - x_n \sin (\vartheta + \beta) &= v_3 \\ x_e \cos (\vartheta + \beta + \varepsilon) - x_n \sin (\vartheta + \beta + \varepsilon) + \Delta &= v_4 \end{aligned}$$

perché $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 = \text{minimo}$ dovrebbe essere

$$3.4.2. \quad \begin{cases} x_e [\cos^2] - x_n [\sin \cdot \cos] = -\Delta \cos (\vartheta + \beta + \varepsilon) \\ -x_e [\sin \cdot \cos] + x_n [\sin^2] = \Delta \sin (\vartheta + \beta + \varepsilon) \end{cases}$$

$$3.4.3. \quad \begin{cases} x_e = \Delta \frac{\sin (\vartheta + \beta + \varepsilon) [\sin \cdot \cos] - \cos (\vartheta + \beta + \varepsilon) [\sin^2]}{[\sin^2] [\cos^2] - [\sin \cdot \cos]^2} \\ x_n = \Delta \frac{\sin (\vartheta + \beta + \varepsilon) [\cos^2] - \cos (\vartheta + \beta + \varepsilon) [\sin \cdot \cos]}{[\sin^2] [\cos^2] - [\sin \cdot \cos]^2} \end{cases}$$

e se i punti sono più di quattro le 3.4.2. divengono:

$$3.4.4. \quad \begin{aligned} x_e [\cos^2] - x_n [\sin \cdot \cos] &= -[\Delta \cos (\vartheta + \beta + \varepsilon)] \\ -x_e [\sin \cdot \cos] + x_n [\sin^2] &= [\Delta \sin (\vartheta + \beta + \varepsilon)] \end{aligned}$$

e le 3.4.3. variano in conseguenza.

BIBLIOGRAFIA

- (1) G. CICONETTI: *Trattato di Geodesia e Topografia*. Vallardi, Milano 1938.
- (2) G. BOAGA: *Trattato di Geodesia e Topografia*. Cedam, Padova 1948.
- (3) U. BARTORELLI: *Sulla soluzione numerica dei principali problemi di topografia planimetrica mediante l'impiego delle moderne macchine calcolatrici doppie*. Rivista del Catasto e dei SS.TT.EE., 1941-5.
- (4) DIREZIONE GENERALE DEL CATASTO E DEI SS.TT.EE.: *Istruzioni per le operazioni trigonometriche*. Roma, Poligrafico, 1951.
- (5) La soluzione del Prof. SCHLÖTZER è stata pubblicata nel n. 20, 1935, di « Allgemcine Vermessung Nachrichten ».
- (6) La soluzione del Prof. GALKIEWICK fu presentata nella « Rivista del Catasto e dei SS.TT.EE. » 1937-1, pag. 82 dal Prof. BOAGA.