

# APPLICAZIONI DEL GEODIMETRO E DEL TELLUROMETRO NELLA GEODESIA E NELLA TOPOGRAFIA

P. BENCINI

La principale difficoltà della Geodesia operativa era costituita, nel passato, dalla misura delle distanze. Il procedimento della triangolazione fu infatti ideato dallo Snellius per ridurre al minimo le misure di lunghezza, sfruttando in loro vece le misure angolari, di effettuazione molto più facile, per le quali erano anche stati realizzati strumenti di misura dotati di precisione sorprendente per l'epoca in cui essi erano costruiti. Una necessità connessa al procedimento di triangolazione, inoltre, fu quella di scindere il rilievo in due parti nettamente distinte, planimetria e altimetria, che condusse alla considerazione di due distinte superfici di riferimento: l'ellissoide ed il geoide. Dal secolo XIX, durante il quale gli studi geodetici assunsero lo sviluppo e l'importanza che loro compete, ad oggi, il progresso tecnico è stato continuo, anche se non con il ritmo vertiginoso che si è verificato in altri campi. Quando poi sembrava che stesse per essere raggiunto un limite di precisione non superabile, e che la Geodesia fosse una scienza ormai senza possibilità di ulteriore sviluppo, nuovi orizzonti sono stati schiusi all'indagine scientifica ed alle applicazioni pratiche.

Nel campo degli strumenti per le misure angolari, dagli strumenti di dimensioni e peso quasi proibitivi per un proficuo impiego e che richiedevano un tempo lunghissimo per le operazioni di misura, si è giunti ai moderni teodoliti muniti di micrometro ottico e di cannocchiale a lunghezza costante, di peso e dimensioni molto ridotti, di agevole impiego e di precisione tale che difficilmente potrà essere aumentata.

Nel campo degli strumenti per le misure di lunghezza, il progresso è stato molto più sensibile.

Dagli apparati a spranghe per la misura delle basi, si era arrivati agli apparati a fili di invar, coi quali la misura di una base geodetica diveniva un'operazione molto più spedita ed economica: tuttavia, anche per la scarsità di zone abbastanza estese per la misura e per realizzare una ben confermata rete di sviluppo, la lunghezza delle basi geodetiche doveva necessariamente essere limitata ad una diecina di chilometri.

Con l'apparato di Väisälä fu abbandonato il concetto classico della misura, consistente nel riportare successivamente sul terreno un mezzo metrico, e fu invece utilizzata la luce come mezzo per misurare con esattezza

dei multipli di una lunghezza campione. Questo apparato però, pur consentendo una altissima precisione di misura, non può essere impiegato su lunghe distanze se non si verifica un complesso di condizioni eccezionali, per cui si sono potute misurare lunghezze appena di poco superiori agli 800 m, ed il suo uso si può ritenere limitato a costituire delle basi di taratura per fili invar.

In seguito, e come conseguenza dello sviluppo che avevano avuto durante la guerra gli studi nel campo dell'elettronica e dei mezzi radar, vi fu una numerosa serie di studi tendenti a sfruttare la misura del tempo di propagazione delle onde elettromagnetiche per la misura delle distanze.

Tralascieremo di parlare delle realizzazioni conseguite per mezzo dei radar, che esulano dall'argomento in questione, e ci limiteremo a dare alcuni accenni sulle realizzazioni conseguibili con gli strumenti sul tipo del Geodimetro e del Tellurometro.

Questi strumenti costituiscono un decisivo passo avanti per la Geodesia operativa: la misura diretta delle lunghezze, con la precisione necessaria per le operazioni geodetiche, è infatti divenuta una operazione economicamente possibile, e talvolta addirittura vantaggiosa rispetto alla triangolazione classica. Dal punto di vista della precisione, inoltre, si ha che mentre gli errori medi di misura di una lunghezza sono già di per sé inferiori a quelli che si otterrebbero calcolando la lunghezza stessa per mezzo di un lato noto e di angoli misurati, le misure sono indipendenti tra loro e non vi è propagazione di errori.

Il Geodimetro ed il Tellurometro (si usa qui il nome Tellurometro perché questo apparecchio è stato il primo in ordine di tempo ad avere pratica applicazione, ma si vuol comprendere con questo nome anche gli altri apparati che usano lo stesso principio di funzionamento, quali, ad es., l'Electrotape della Cubic Corporation ed il Terrameter della Wild) sono strumenti che, in ultima analisi, hanno un principio di funzionamento assai simile: la principale differenza tra i due strumenti, che, come vedremo, ne condiziona l'uso, è che il primo usa come onda portante un raggio luminoso, ed il secondo un'onda elettromagnetica.

Il principio di funzionamento di questi apparecchi e le modalità di misura sono già stati descritti; ciò che invece interessa qui è illustrare i loro campi di applicazione.

Il Geodimetro consente di effettuare misure con un ordine di precisione che è paragonabile a quello delle basi geodetiche; esso però ha delle caratteristiche che non ne permettono un uso sistematico. Anzitutto, ha peso e dimensioni che, pur essendo accettabilissimi, non consentono per l'apparato master il trasporto a spalla, per cui l'impiego deve essere limitato ai luoghi raggiungibili con automezzo; in secondo luogo, poiché la misura viene fatta per mezzo di raggi luminosi, il suo impiego è possibile solo di notte. Queste

condizioni, quindi, fanno escludere tutti i punti in alta montagna, sui quali anche se fosse possibile portare lo specchio della stazione secondaria non sarebbe possibile la permanenza dell'operatore, e fanno escludere anche molti centri abitati, nei quali l'illuminazione degli edifici e delle vie potrebbe disturbare notevolmente le operazioni di misura. In linea teorica, la luce non modulata non interferisce nella misura: essa però crea un disturbo di un livello tale da soffocare il segnale modulato. L'uso del Geodimetro non è quindi possibile di giorno, oppure nella luce crepuscolare, e riesce molto difficoltoso, o addirittura impossibile, nelle notti di plenilunio o quando vi siano luci artificiali abbastanza intense che arrivino al ricevitore.

Per il suo funzionamento, l'apparato necessita di corrente alternata con una potenza di circa 250 watt, il che esclude l'uso di accumulatori ed implica l'alimentazione a mezzo della rete luce, oppure mediante un buon gruppo elettrogeno capace di erogare la potenza necessaria con una sufficiente stabilità in frequenza ed in tensione. Un gruppo elettrogeno di questo genere ha necessariamente un peso ed un ingombro non indifferenti.

La misura, come è noto, è basata sulla valutazione del tempo impiegato da un raggio luminoso emesso dall'apparato master, posto su un estremo della distanza da misurare, per ritornare all'apparato emittente dopo essere stato riflesso da uno specchio posto sull'altro estremo della distanza stessa. Gli specchi risponditori sono di tre tipi: piano, sferico, a prismi. L'apparato master emette un fascio luminoso che, teoricamente formato da raggi paralleli, è in pratica un cono di piccolissima apertura, per cui lo specchio riceve una buona percentuale dell'energia emessa. Lo specchio piano, la cui superficie riflettente è lavorata otticamente, riflette la luce ricevuta rinviando un fascio luminoso avente la stessa divergenza del fascio incidente: si ha così la minore perdita possibile di energia, ma è necessario che lo specchio sia accuratamente puntato ed il puntamento deve venire continuamente rettificato perché le stesse variazioni che si verificano nel coefficiente di rifrazione atmosferica, sensibili soprattutto nel senso zenitale, fanno sì che il fascio riflesso non colpisca più la parte ricevente dell'apparato master. Con lo specchio sferico il fascio incidente viene riflesso in forma di fascio conico con angolo di apertura di circa 30': si ha così una maggiore dispersione dell'energia emessa, ma l'intensità di luce che ritorna all'apparato master è più stabile, e non è, in generale, necessario rettificare il puntamento durante la misura. Lo specchio a prismi, composto di elementi riflettenti variamente orientati, rimanda un fascio di luce con un angolo di apertura molto grande, per cui si ha una perdita di energia assai sensibile, ma il puntamento risulta molto facilitato e non è necessaria alcuna sorveglianza durante il tempo di misura. La quantità di energia che deve essere ricevuta di ritorno dall'apparato master per l'effettuazione della misura è assai piccola: lo strumento infatti indica una buona sensibilità anche quando la luce ri-

flessa dallo specchio non è visibile ad occhio nudo, e possono essere misurate distanze notevoli anche con atmosfera non molto limpida. Una condizione necessaria, data la limitatissima ampiezza del fascio luminoso emesso, è che dopo il puntamento l'apparato master non subisca spostamenti angolari, tranne quelli eventualmente necessari per rettificare il puntamento in seguito a variazioni dell'indice di rifrazione. È quindi opportuno che agli estremi della distanza da misurare vi siano dei solidi basamenti su cui fissare gli apparati.

La portata utile per la misura è maggiore di quanto si potrebbe immaginare: dagli operatori dell'I.G.M. sono state misurate agevolmente, anche con lo specchio a prismi, distanze di quasi 33 km, e dalla constatazione delle condizioni in cui sono state effettuate le operazioni, si può ritenere che con lo specchio piano sia possibile superare notevolmente i 40 km, sia pure in un tempo più lungo dell'ordinario a causa della difficoltà di mantenere puntato lo specchio.

La misura di una distanza, consistente in dodici serie di misure con le tre frequenze, può essere effettuata in tre o quattro notti di lavoro, il che significa che in media, tenuto conto delle notti con condizioni atmosferiche avverse, occorre preventivare una diecina di giorni; l'approssimazione ottenibile può essere valutata in un milionesimo della distanza stessa, oltre ad un errore costante di  $\pm 1,5$  cm. Il confronto con il tempo e la spesa occorrenti per misurare una distanza di uguale lunghezza con un apparato a fili di invar, ammettendo che la misura fosse possibile, dà una idea del progresso conseguito.

L'esperienza raggiunta all'Istituto Geografico Militare ha consigliato di stabilire le seguenti modalità operative: la squadra di misura è composta da due operatori, uno per la stazione master e l'altro per lo specchio, ciascuno dei quali dispone di un automezzo da ricognizione con una Roulotte a rimorchio. La dotazione strumentale è costituita, oltre che dal Geodimetro e da due gruppi elettrogeni per l'alimentazione, da due apparati radio rice-trasmittitori, due teodoliti, due elioscopi, una stadia orizzontale ed altri mezzi metrici, due binocoli, una macchina calcolatrice, un piccolo gruppo elettrogeno per la carica delle batterie delle Roulottes, un baracchino smontabile entro cui sistemare l'apparato master. Completano la squadra i due autisti ed un radiomontatore.

Per la misura, viene costruito ad un estremo un solido pilastro in calcstruzzo avente una sezione di  $60 \times 60$  cm<sup>2</sup> ed un'altezza di circa 40 cm, su cui fissare l'apparato master: poiché, in generale, gli estremi delle distanze da misurare sono punti trigonometrici di 1° ordine sui quali esiste un pilastrino per la stazione trigonometrica, la nuova materializzazione viene fatta fuori centro e vengono accuratamente misurati gli elementi di riduzione. Intorno al pilastro viene montato il baracchino, fissato a mon-

tanti cementanti nel terreno, avente la parte anteriore amovibile ed un'ampiezza sufficiente a contenere lo strumento e l'operatore il quale durante la misura sta seduto dietro l'apparato. Questo durante la giornata di inizio della misura viene fissato al pilastro per mezzo di un sostegno provvisto di viti di bloccaggio, e viene accuratamente puntato ad un elioscopio posto sull'altro estremo. Per tutta la durata della misura lo strumento non viene più tolto dal pilastro, il che è consentito dal fatto che per mezzo della Roulotte è possibile il soggiorno sul luogo, per cui per iniziare le operazioni di misura è sufficiente accendere l'apparato e rettificare il puntamento mediante spostamenti micrometrici fino ad ottenere la massima intensità del segnale di risposta.

All'altro estremo, lo specchio viene sistemato, in generale, sul pilastrino della stazione trigonometrica mediante un basamento che può accogliere i tre tipi di specchio. Quando le condizioni atmosferiche lo consentono, anche lo specchio viene lasciato in sito; tuttavia, anche se viene tolto, il nuovo puntamento è una cosa agevole, e in ogni caso una misura non viene mai effettuata con un solo tipo di specchio. I due operatori durante la misura devono essere in continuo contatto radio, al fine di prendere i necessari accordi sulle operazioni da eseguire: rettifiche di puntamento, rilevamento delle condizioni meteorologiche, inizio e fine della serie di misure, ecc. La radio, inoltre, costituisce pressoché il solo mezzo di comunicazione tra le due parti della squadra operativa, in quanto normalmente i due operatori non hanno occasione di incontrarsi. È perciò essenziale che il funzionamento degli apparati radio sia assicurato, per la qual cosa è prevista la presenza di un radiomontatore pronto ad intervenire.

Quanto è stato fin qui esposto circa le caratteristiche di impiego del Geodimetro indica di per sé le applicazioni di cui lo strumento è suscettibile: il suo precipuo uso in Geodesia è la misura di lati della triangolazione di 1° ordine destinati a costituire altrettante basi geodetiche. Si ha così il vantaggio di una precisione maggiore, in quanto il lato della triangolazione viene misurato direttamente e non attraverso una rete di sviluppo, e di un costo molto minore.

L'impiego del Geodimetro per l'effettuazione di una rete di trilaterazione non è, in generale, possibile perché sarà ben difficile che i vertici progettati posseggano i requisiti necessari illustrati sopra, ed inoltre il tempo richiesto sarebbe troppo grande. In casi particolari, infine, il Geodimetro potrebbe essere usato per poligoni geodetiche di alta precisione.

In particolari lavori di ingegneria vi è talvolta la necessità di misurare una o due basi per il dimensionamento di una rete trigonometrica: anche in tali casi il Geodimetro sostituisce vantaggiosamente il metodo tradizionale, poiché in minor tempo si ottiene una misura più precisa, ed inoltre vi può essere la possibilità di effettuare la misura di una sola distanza che

unisca due punti alle estremità della rete, con un ulteriore vantaggio di precisione nelle lunghezze dei lati calcolati.

Il Tellurometro presenta caratteristiche di impiego totalmente differenti: anzitutto, l'apparecchiatura è estremamente più maneggevole e non offre grandi difficoltà per il trasporto a spalla; il tempo di misura, inoltre, è molto più breve e l'alimentazione può essere effettuata mediante batterie di accumulatori. Tutto ciò rende possibile uno snellimento della squadra operativa ed una rapidità di lavoro molto notevole.

Il principio di funzionamento è sostanzialmente identico a quello del Geodimetro: la distanza viene valutata misurando il tempo impiegato da un'onda elettromagnetica, anziché luminosa, a percorrere in andata e ritorno la distanza tra la stazione primaria e la secondaria. L'influenza delle condizioni atmosferiche pone inoltre meno limitazioni alle possibilità di misura di quanto non accada col Geodimetro: la foschia o la nebbia non recano infatti alcun disturbo, e neppure la pioggia, almeno fino a quando non raggiunga una certa intensità. Per contro, la natura del terreno situato tra i due estremi della distanza da misurare ha una grande importanza, almeno per misure con precisione adeguata alle necessità geodetiche.

Col Geodimetro, la natura del terreno non influisce sulla propagazione dei raggi luminosi né li riflette; le onde emesse del Tellurometro costituiscono un fascio conico che ha un'ampiezza di alcuni gradi: la parte di esso che urta sul terreno può con facilità venire riflessa e giungere all'apparato secondario sovrapponendosi alla parte ricevuta direttamente e da questo essere rinviata all'apparato principale. Analoghi fenomeni accadono anche sul percorso di ritorno, per cui alla stazione master la misura del tempo di propagazione viene alterata per effetto delle onde riflesse. Anche anomalie locali del campo magnetico terrestre possono avere influenza sulla misura.

Il fenomeno della riflessione assume caratteristiche diverse a seconda della lunghezza d'onda, e quindi della frequenza, dell'onda portante emessa. La misura, pertanto, viene effettuata modulando i segnali su portanti di frequenze diverse, dieci o dodici, uniformemente intervallate tra loro. Poiché l'alterazione prodotta dalle riflessioni ha un andamento sinusoidale, essa potrebbe venire del tutto eliminata qualora si potessero ottenere i valori distribuiti in un intero periodo. Il criterio seguito nella pratica per giudicare dell'attendibilità della misura è appunto questo: riportati in diagramma come ordinate i valori dei tempi relativi alle varie frequenze impiegate, se il grafico ottenuto ha un andamento all'incirca sinusoidale la misura è considerata attendibile e come valore viene assunto quello corrispondente all'asse della sinusoidale; l'approssimazione è data dallo scostamento tra il valore assunto ed il valore effettivo di questo asse. Se invece dal diagramma non risulta individuabile il periodo della sinusoidale, la misura non può essere depurata dagli effetti delle riflessioni e deve essere ripetuta in condizioni

diverse: talvolta è sufficiente spostare anche di poco uno dei due apparati, mentre in altri casi la natura del terreno è tale che questo si comporta come un vero e proprio specchio, causando riflessioni multiple i cui effetti non è possibile eliminare, come avviene, ad esempio, quando lungo il percorso si trova un'estesa superficie coperta da acqua. L'approssimazione che si può ottenere col Tellurometro, considerando come valore della misura la media di almeno sei determinazioni, ognuna effettuata con dodici frequenze e con un regolare diagramma, eseguite in almeno due giornate diverse, è valutabile ad una quantità fissa di  $\pm 5$  cm, oltre ad una quantità dipendente dalla distanza, valutabile a tre milionesimi della distanza stessa. La precisione, quindi, è di poco inferiore a quella di un lato calcolato mediante una rete di sviluppo di una base geodetica; in ogni caso, però, non si ha propagazione di errore da un lato ad un altro, ed in definitiva si ottiene una precisione nelle lunghezze superiore a quella che potrebbe derivare dal calcolo di una triangolazione. Con questo strumento, inoltre, si possono agevolmente misurare distanze di 80 km ed oltre.

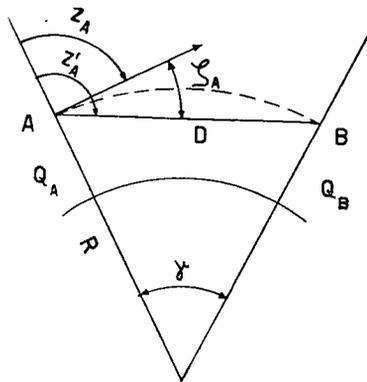
Da quanto è stato finora detto, risulta che l'applicazione tipica del Tellurometro per scopi geodetici è la trilaterazione. Tutti i luoghi accessibili per le misure col teodolite, infatti, lo sono anche per le misure tellurometriche, e con una adeguata organizzazione di apparati, ognuno dei quali può funzionare sia come stazione primaria che come secondaria, le operazioni di misura possono venire effettuate in un tempo molto più breve, e quindi con maggiore economia, in quanto non sussistono più gli impedimenti causati dalla scarsa visibilità. Il tempo occorrente per una misura sulle dodici frequenze è di circa mezz'ora.

Non bisogna però ritenere che il procedimento di triangolazione sia una cosa ormai sorpassata e l'insistere nel suo impiego sia una negazione del progresso ed un indice di non volersi adattare ai tempi nuovi: come sempre, la via giusta è la via di mezzo. Dovendo progettare una rete di trilaterazione, infatti, sarà ben difficile che tutti i lati possano essere situati in terreno adatto alle misure tellurometriche: sarà quindi opportuno misurare le lunghezze di quei lati sui quali la misura possa avere il grado di precisione voluto, e completare con misure angolari il numero di elementi misurati necessari per il calcolo; misure angolari sovrabbondanti, inoltre, offrono ulteriori possibilità di compensazione, per cui è in ogni caso utile unire i due procedimenti. Naturalmente i metodi di compensazione di questo genere di misure risultano notevolmente variati rispetto allo schema classico: tuttavia le moderne macchine calcolatrici elettroniche permettono di far passare in seconda linea le difficoltà di calcolo.

La grande praticità di impiego del Tellurometro e la estrema rapidità di misura rendono vantaggioso il suo uso anche per la determinazione dei punti trigonometrici di ordine inferiore e per rilievi topografici. In quest'ul-

timo caso, poi, è sufficiente eseguire le determinazioni di distanza effettuando una sola serie di misure con un numero ridotto di frequenze, in quanto gli errori prodotti dal non eliminare completamente gli effetti delle riflessioni consentono una precisione che è largamente sufficiente allo scopo. Il procedimento da seguire sarà ancora una combinazione di misure angolari e di lunghezza, e consisterà nel determinare i punti per mezzo delle loro coordinate polari: da un punto di stazione verranno misurate le direzioni, azimutali e zenitali, ai punti da determinare, e quindi mediante il Tellurometro verranno misurate le distanze. Il giro d'orizzonte azimutale, ovviamente, dovrà venire orientato per permettere il calcolo degli azimut. Allo scopo di evitare errori grossolani, oppure per procedere ad una compensazione delle misure, sarà opportuno che ogni punto venga determinato da almeno due punti noti; si potranno anche costituire delle reti di trilaterazione secondarie, appoggiate a punti di coordinate note, analogamente a quanto viene fatto per le triangolazioni di ordine inferiore.

Per il calcolo di riduzione al geode delle distanze misurate, sia col geodimetro che col Tellurometro, è necessario che siano note le quote degli estremi delle distanze stesse; nelle misure di carattere geodetico, data la lunghezza dei lati misurati, il problema altimetrico viene, generalmente, risolto per altra via; nelle trilaterazioni di raffittimento o nei rilievi di carattere topografico, in cui le distanze sono al massimo dell'ordine di grandezza dei dieci chilometri, possono essere agevolmente fatte determinazioni di livellazione trigonometrica misurando l'angolo zenitale del lato misurato col Tellurometro. Questo procedimento, anzi, permette la determinazione del dislivello per via trigonometrica anche tra punti non determinati in planimetria, come accade, ad es., quando occorre collegarsi ad un caposaldo della livellazione geometrica, di cui generalmente non sono note le coordinate. L'impostazione del problema è assai semplice: assumendo come riferimento la superficie della sfera locale, siano (fig. 1) A e B i due punti di cui si vuol determinare il dislivello, e D la loro distanza misurata.



Siano  $Q_A$ ,  $Z'_A$ ,  $Q_B$ ,  $Z'_B$ , le quote e le distanze zenitali vere dei punti  $A$  e  $B$  rispettivamente, supponendo che la quota  $Q_A$  sia nota; siano inoltre  $R$  il raggio della sfera locale e  $\gamma$  l'angolo tra le verticali dei due punti. Si hanno allora le seguenti relazioni:

$$(1) \quad \begin{cases} R + Q_A = \frac{D}{\text{sen } \gamma} \text{sen } Z'_B \\ R + Q_B = \frac{D}{\text{sen } \gamma} \text{sen } Z'_A \end{cases}$$

onde, sottraendo membro a membro,

$$Q_B - Q_A = \frac{D}{\text{sen } \gamma} (\text{sen } Z'_A - \text{sen } Z'_B)$$

e dessendo  $Z'_B = \pi - (Z'_A - \gamma)$ , onde  $\text{sen } Z'_B = \text{sen } (Z'_A - \gamma)$ , e ponendo  $\text{sen } \gamma = \gamma$

$$(2) \quad Q_B - Q_A = 2 \frac{D}{\text{sen } \gamma} \text{sen } \frac{\gamma}{2} \cos \left( Z'_A - \frac{\gamma}{2} \right) = D \cos \left( Z'_A - \frac{\gamma}{2} \right)$$

Detta  $Z_A$  la distanza zenitale apparente dal punto  $A$ , e  $\zeta_A$  la correzione di rifrazione, posto, secondo l'ipotesi gaussiana,

$$Z'_A = Z_A + \zeta_A; \quad \zeta_A = \frac{K}{2} \gamma$$

ove  $K$  è il coefficiente di rifrazione, la (2) diviene

$$Q_B - Q_A = D \cos \left( Z_A - \frac{1-K}{2} \gamma \right)$$

e, sviluppando in serie di Taylor e trascurando le potenze dell'incremento superiori alla prima

$$Q_B - Q_A = D \left( \cos Z_A + \frac{1-K}{2} \text{sen } Z_A \gamma \right)$$

Dalla prima delle (1), tenuto conto della relazione tra  $Z'_B$  e  $Z'_A$ , si ha, a meno di termini dell'ordine di grandezza  $\frac{D^2}{R^2} \cos Z_A$ :

$$\gamma = \frac{D \text{sen } Z_A}{R + Q_A} = \frac{D}{R} \left( 1 - \frac{Q_A}{R} \right) \text{sen } Z_A$$

da cui

$$(3) \quad Q_B - Q_A = D \cos Z_A + \frac{1-K}{2R} D^2 \operatorname{sen}^2 Z_A \left(1 - \frac{Q_A}{R}\right)$$

La formula potrebbe venire ulteriormente elaborata, ponendo in forma diversa il secondo termine che figura al secondo membro onde analizzare il contributo delle varie quantità, ma la cosa può formare oggetto di una trattazione a parte, non essendo questo lo scopo della presente nota. Ciò che invece interessa qui è fare un raffronto circa le precisioni conseguibili con questo metodo e con il procedimento classico della livellazione trigonometrica. Le formule per il calcolo sono nei due casi (trascurando il termine che contiene  $\frac{Q}{R}$ ):

$$(3') \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_B - Q_A = D \cos Z_A + \frac{1-K}{2R} D^2 \operatorname{sen}^2 Z_A \\ Q_B - Q_A = D' \operatorname{ctg} Z_A + \frac{1-K}{2R} \frac{D^2}{\operatorname{sen}^2 Z_A} \end{array} \right.$$

ove con  $D'$  si è indicata la distanza tra i due punti considerata sulla superficie della sfera.

Ci proponiamo di esaminare l'entità dell'errore nel dislivello causato da errori nell'angolo zenitale e nella distanza: differenziamo perciò le due relazioni (3') considerando come variabili una volta  $Z_A$  ed una volta  $D$ . Si ha, indicando con  $\Delta$  il dislivello

$$\left\{ \begin{array}{l} d\Delta = \left( -D \operatorname{sen} Z_A + \frac{1-K}{R} D^2 \operatorname{sen} Z_A \cos Z_A \right) dZ_A \\ d\Delta = \left( -\frac{D'}{\operatorname{sen}^2 Z_A} - \frac{1-K}{R} \frac{D^2}{\operatorname{sen}^2 Z_A} \operatorname{ctg} Z_A \right) dZ_A \end{array} \right.$$

od anche, ponendo nei due casi, in via di approssimazione,  $D \cos Z_A = \Delta$  e  $D' \operatorname{ctg} Z_A = \Delta$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\Delta = D \operatorname{sen} Z_A \left( -1 + \frac{1-K}{R} \Delta \right) dZ_A \\ d\Delta = \frac{D'}{\operatorname{sen}^2 Z_A} \left( -1 - \frac{1-K}{R} \Delta \right) dZ_A \end{array} \right.$$

Queste relazioni mostrano che nel caso della distanza misurata col Tellurometro l'errore nella distanza zenitale provoca un errore nel dislivello proporzionale al prodotto  $D \operatorname{sen} Z_A$ , mentre nel secondo caso esso è proporzionale a  $\frac{D'}{\operatorname{sen}^2 Z_A}$  ed essendo  $\operatorname{sen} Z_A \leq 1$  quest'ultima quantità non è mai minore della prima, tenendo presente che è, all'incirca,  $D \operatorname{sen} Z_A = D'$ . In quanto al termine entro parentesi, si ha che per dislivelli positivi il primo caso è più vantaggioso, mentre per dislivelli negativi lo è il secondo; il contributo di questo termine, d'altra parte, è assai piccolo.

Circa l'effetto prodotto da un errore nella distanza, si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\Delta = \left( \cos Z_A + \frac{1-K}{R} D \operatorname{sen}^2 Z_A \right) dD \\ d\Delta = \left( \operatorname{ctg} Z_A + \frac{1-K}{R} \frac{D'}{\operatorname{sen}^2 Z_A} \right) dD' \end{array} \right.$$

e, con le posizioni fatte precedentemente,

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\Delta = \left( \frac{\Delta}{D} + \frac{1-K}{R} D \operatorname{sen}^2 Z_A \right) dD \\ d\Delta = \left( \frac{\Delta}{D'} + \frac{1-K}{R} \frac{D'}{\operatorname{sen}^2 Z_A} \right) dD' \end{array} \right.$$

L'errore in distanza provoca un errore di cui una parte è proporzionale al dislivello ed un'altra alla distanza, ed entrambi i coefficienti di proporzionalità nel primo caso sono minori che nel secondo; la stessa quantità  $dD$ , inoltre, nel secondo caso è maggiore che nel primo poiché la distanza viene calcolata dalle coordinate planimetriche dei punti  $A$  e  $B$ , ed ha una precisione certamente minore di quella derivante dalla misura diretta.

Da quanto è stato esposto risulta il vantaggio che si ottiene, anche rispetto alla precisione, nella livellazione trigonometrica con l'impiego del Tellurometro. Lo stesso procedimento classico dei rilievi geodetici, però, consistente nel separare il problema planimetrico da quello altimetrico, può darsi che stia per essere mutato radicalmente. Mentre, infatti, da un lato sono sempre più numerosi gli studi teorici nel campo della « Geodesia in tre dimensioni », dall'altro siamo appena agli inizi nello studio e nella sperimentazione dei nuovi strumenti di misura delle distanze. È facile prevedere che il progresso non si arresterà al

punto raggiunto, ma che si avranno strumenti ancora più perfezionati e di maggiore portata. Si può prevedere che il problema verrà affrontato mediante trilaterazioni nello spazio determinando contemporaneamente le tre coordinate dei punti, e che la Geodesia, lungi dall'essere una disciplina senza ulteriori possibilità di sviluppo, trarrà dai nuovi mezzi di indagine i più ampi frutti.