

Considerazione sulla riduzione delle misure spaziali alla superficie di riferimento

G. SALVIONI

1. *Premessa.*

La misura di lunghezze nello spazio, mediante apparati che impiegano onde luminose od onde elettriche e l'uso di queste lunghezze per scopi geodetici e topografici, è oggi anche in Italia assai diffuso.

Nelle strumentazioni, appositi quadranti e schermi permettono di ottenere la misura delle lunghezze spaziali in modo molto semplice e facile.

Quando poi si vogliono usare queste misure per una rappresentazione su una prestabilita superficie di riferimento, tenendo conto dell'elevata precisione che gli strumenti sono suscettibili di dare nelle loro proprie misure, le caratteristiche da prescrivere per la valutazione degli elementi di riduzione sono di una certa accuratezza.

Questa nota è rivolta a coloro che interessandosi del problema vogliono maggiormente rendersi conto della pratica applicazione.

Si ammette, in quel che segue, come conosciuta la misura spaziale L' , tra due punti 1 e 2, lunghezza ottenuta direttamente dalle registrazioni degli apparati, moltiplicate per le relative costanti ed integrata per le rettifiche dovute alle condizioni meteorologiche.

Gli strumenti che impiegano onde luminose vengono considerati del tipo «del geodimetro» e quelli che impiegano onde elettriche vengono considerati del tipo «del tellurometro».

Con un impiego giusto e corretto degli strumenti, si possono misurare distanze massime, con gli apparati del tipo del geodimetro fino a 45 km e con gli apparati del tipo del tellurometro fino a 60 km.

Misure sperimentali, ripetute più volte ed in giorni diversi, su lunghezze varie, hanno messo in evidenza che per le varie lunghezze i valori ottenuti differiscono tra loro di qualche centimetro.

Si può quindi ammettere che, in condizioni atmosferiche e topografiche favorevoli, l'errore quadratico medio rimanga, sia con gli apparati del tipo del geodimetro, sia con quelli del tipo del tellurometro, pressochè costante.

Questo errore e (*), con apparati del tipo del geodimetro, può ritenersi eguale a $\pm 0,005$ m, e con gli apparati del tipo del tellurometro eguale a $\pm 0,05$ m.

Appena superate le brevi distanze, in cui peraltro l'impiego del geodimetro o tellurometro non sarebbe del tutto adeguato, la precisione che si ottiene con questi strumenti, supera largamente quella stabilita per gli scopi geodetici o topografici e cioè $1 : 10^6$, $1 : 4 \cdot 10^5$ e $1 : 10^5$, precisioni relative richieste rispettivamente per le basi geodetiche, per le basi calcolate e per i lati della triangolazione di I ordine.

2. Riduzione delle distanze spaziali alla superficie di riferimento.

Le distanze spaziali L' , per essere impiegate nelle normali operazioni geodetiche o topografiche devono essere ridotte alla superficie di riferimento.

La distanza ridotta G , (***) tra due punti 1 e 2, di quota rispettivamente H_1 e H_2 , di quota media $Hm = \frac{H_1 + H_2}{2}$ e aventi fra loro il dislivello Δh , è data, con sufficiente precisione, dalla espressione:

$$G = \sqrt{\frac{(L' + \Delta h) \cdot (L' - \Delta h)}{\left(1 + \frac{H_1}{R}\right) \cdot \left(1 + \frac{H_2}{R}\right)}} + \frac{L'^3}{24 R^2} \quad (1)$$

Sviluppando in serie (***) il termine sotto radice la (1) diventa:

$$G = \left[L' \left(1 - \frac{\Delta h^2}{2 L'^2} - \frac{\Delta h^4}{8 L'^4} - \frac{\Delta h^6}{16 L'^6} \dots \right) \right] \left[1 - \frac{Hm}{R} + \frac{Hm^2}{R^2} \dots \right] + \frac{L'^3}{24 R^2} \quad (2)$$

(*) In recenti misure (estate 1962) eseguite con il geodimetro, l'Istituto Geografico Militare ha ottenuto per quattro lati della sua triangolazione di I ordine:

m 27 201,35 \pm 0,004
 29 339,02 \pm 0,003
 23 582,73 \pm 0,006
 32 865,65 \pm 0,004

Le distanze sono state misurate mediante 12 osservazioni complete, in almeno quattro notti diverse. Per osservazione completa si intende l'insieme di due serie di letture allo specchio, inframmezzate da una lettura interna, per ognuna delle tre frequenze.

(**) K. RINNER: *Über die Reduktion grosser elektronisch gemessener Entfernungen*. Zeitschrift für Vermessungswesen. Heft 2 Februar 1956.

(***) G. BOAGA: *Trattato di geodesia e topografia*, vol. I, parte I, cap. I, pag. 47 e seguenti. CEDAM, Padova 1948.

Non è vero. Per forti distinzioni e per piccole distanze bisogna tener conto anche dei termini alla 6^a per cui

107

Trascurando i termini il cui contributo è insignificante, si ha più semplicemente:

$$G = L' - \frac{\Delta h^2}{2L'} - \left(L' - \frac{\Delta h^2}{2L'} \right) \frac{Hm}{R} + \frac{L'^3}{24R^2} \quad (3)$$

Il termine

$$C_1 = - \frac{\Delta h^2}{2L'} - \frac{\Delta h^4}{8L'^3} - \frac{\Delta h^6}{16L'^5} \quad (4)$$

rappresenta il contributo per la riduzione all'orizzonte; il termine:

$$C_2 = - \left(L' - \frac{\Delta h^2}{2L'} \right) \frac{Hm}{R} \quad (5)$$

rappresenta il contributo per la riduzione al livello del mare. Chiamando poi $L = L' - \frac{\Delta h^2}{2L'}$ la distanza ridotta all'orizzonte, la (5) diventa:

$$C_2 = - \frac{L Hm}{R}; \quad (6)$$

il termine

$$C_3 = \frac{L'^3}{24 R^2} \quad (7)$$

rappresenta infine il contributo per la riduzione alla geodetica.

Si può esaminare ora quale deve essere l'errore nelle grandezze Δh , Hm ed R che compaiono nelle espressioni C_1 , C_2 , C_3 .

È certamente corretto e giusto stabilire che il valore dell'errore di C_1 , C_2 e C_3 sia eguale o inferiore a quello con cui è stata determinata la lunghezza spaziale L' .

In altre parole si tratta di determinare quale errore possono avere le grandezze Δh , Hm ed R perché l'assunto sopra citato sia soddisfatto.

3. Analisi di C_1 , C_2 , C_3 .

I dati che sotto si riportano, si riferiscono ad apparati del tipo del geodimetro, per i quali, come è stato precedentemente detto, si è stabilito un errore quadratico medio $e = \pm 0,005$ m.

Per gli apparati del tipo del tellurometro per i quali è stato posto

$e = \pm 0,05$ m, i dati si possono ottenere, in quel che segue, moltiplicando per 10 quelli avuti per il geodimetro.

a) Esame di C_1 .

Differenziando, rispetto a Δh , il termine $C_1 = -\frac{\Delta h^2}{2L'}$ che rappresenta la riduzione all'orizzonte della distanza spaziale, si ottiene:

$$dC_1 = -\frac{\Delta h d\Delta h}{L'} \quad (7)$$

Posto $dC_1 = 0,005$ m, cioè eguale all'errore della misura spaziale, si ha:

$$m \ 0,005 = \frac{\Delta h d\Delta h}{L'} \text{ m} \quad (8)$$

o anche:

$$\Delta h = \frac{0,005 L'}{d\Delta h} \text{ m} \quad (9)$$

Nella tavola I che segue, fissati diversi valori di distanze e diversi valori dell'errore nei dislivelli, sono riportati i valori massimi compatibili dei dislivelli stessi.

Tavola I - Δh per apparati del tipo del geodimetro.

Distanze in Km	Dislivello in m per $d\Delta h = \pm 0,5$ m	Dislivello in m per $d\Delta h = \pm 1$ m	Dislivello in m per $d\Delta h = \pm 1,5$ m	Dislivello in m per $d\Delta h = \pm 2$ m	Dislivello in m per $d\Delta h = \pm 4$ m	Dislivello in m per $d\Delta h = \pm 6$ m
5	50	25	16,5	12,5	6	4
10	100	50	33,3	25	12,5	8,5
15	150	75	50	37,5	18,7	12,5
20	200	100	66,6	50	25	16,6
25	250	125	83,3	62,5	31,2	20,8
30	300	150	100	75	37,5	25
35	350	175	116,6	87,5	43,5	29,1
40	400	200	133,3	100	50	33,3
45	450	225	150	112,5	56,2	39

Per gli apparati del tipo del tellurometro per la distanza di 60 km, si ha rispettivamente avendo posto $e = \pm 0,05$ m.

60	—	3000	2000	1500	750	500
----	---	------	------	------	-----	-----

b) Esame di C_2 .

Differenziando, rispetto ad Hm ed a R , il termine $C_2 = -L \frac{Hm}{R}$, che rappresenta la riduzione della distanza orizzontale al livello del mare, si ottiene:

$$dC_2 = -\frac{L}{R} dHm + \frac{1}{R^2} L Hm dR \quad (10)$$

Esaminando separatamente i termini del secondo membro, dal primo, ponendo dC_2 eguale a 0,005 m si ha:

$$dHm = \frac{0,005 R}{L} m \quad (11)$$

espressione che dà l'errore ammissibile nella quota media.

Nella tabella II, prefissato per R il valore di 6370 km, per varie distanze, viene dato l'errore in Hm .

Tabella II - dHm per gli apparati del tipo del geodimetro.

Distanze in Km . . .	5	10	15	20	25	30	35	40	45
Errore in Hm - in m	± 6	± 3	± 2	$\pm 1,50$	$\pm 1,30$	± 1	$\pm 0,90$	$\pm 0,80$	$\pm 0,70$

Alla distanza di 60 km, per gli apparati del tipo del tel urometro, con ($e = \pm 0,05$ m), l'errore nella quota media può raggiungere ± 5 m.

Dal secondo termine nello stesso modo si ricava:

$$= \frac{0,005 R^2}{L Hm} m \quad (12)$$

Questa espressione dà l'errore ammissibile in R .

Una prima valutazione, mostra che, per una quota media di 1000 metri e una distanza di 45 km, l'errore in R per gli apparati del tipo del geodimetro è $\pm 4,5$ km.

Per gli apparati del tipo del telluometro, ($e = \pm 0,05$ m), alla quota media sempre di m 1000 e una distanza di 60 km, l'errore in R può essere ± 34 km.

Mentre per gli apparati del tipo del telluometro ($e = \pm 0,05$ m) è sempre sufficiente prendere $R = 6370$ km, per gli apparati del tipo del geodimetro ($e = \pm 0,005$ m), ciò non è sempre possibile e anzi in qualche caso non è neppure sufficiente considerare il valore $R = \sqrt{\rho N}$, calcolato per la latitudine media della distanza.

La tavola III che sotto si riporta prova quanto sopra.

Latitudine	azimut α		$R = \sqrt{\rho N}$ Km	$R\alpha - R$ Km
	$\alpha = 0, R\alpha = \rho$ Km	$\alpha = 90^\circ R\alpha = N$ Km		
47°	6370	6390	6380	10
42°	6364	6388	6376	12
37°	6359	6386	6372	14

Nella tavola IV, per varie distanze e varie quote medie, si è riportato il valore ammissibile dell'errore dR in R cioè $dR < 10$ km.

Tavola IV.

$\begin{matrix} \text{Hm} \\ \text{L} \\ \text{Km} \end{matrix}$	0,5 Km	0,6 Km	0,7 Km	0,8 Km	0,9 Km	1 Km
10	40,6	33,8	28,9	25,3	22,5	20,3
20	20,3	16,9	14,5	12,7	11,9	10,1
30	13,5	11,2				
40	10,1					
45	—					

Per i casi che non rientrano nella tavola IV, occorre calcolare il raggio di curvatura e ciò si ottiene in modo molto semplice ricorrendo alla formula di Eulero (*)

$$R = \frac{N\rho}{\rho \operatorname{sen}^2 \alpha + N \operatorname{cos}^2 \alpha} \quad (13)$$

(*) G. BOAGA: *Trattato di geodesia e topografia*, vol. I, cap. III, pag. 141 e seguenti CEDAM, Padova 1948.

Ove N e ρ rappresentano rispettivamente i valori della gran normale e del raggio di curvatura del meridiano, nel punto centrale della distanza da ridurre, mentre α è l'azimut della distanza da ridurre.

c) Esame di C_3 .

Differenziando rispetto ad R il termine $C_3 = \frac{L'^3}{24R^2}$, che rappresenta la riduzione alla geodetica, si ottiene:

$$dC_3 = - \frac{L'^3}{24} \cdot \frac{2}{R^3} \cdot dR \quad (14)$$

Posto $dC_3 = 0,005$, come nei casi precedenti, si ha:

$$dR = \frac{0,005 \cdot 12 \cdot R^3}{L'^3} \text{ m} \quad (15)$$

Per $L' = 45$ km, massima distanza per gli apparati del tipo del geodimetro, si ha che il valore di R può essere preso con un errore di ± 16 km e quindi si può porre, $R = 6370$ km.

4. Stazioni fuori centro.

La necessità che si debbano eseguire stazioni fuori centro è rara e si verifica in generale solo per le misure con apparecchi del tipo geodimetro, la cui trasmittente ha un certo ingombro ed un certo peso.

Non si possono dare consigli per la misura degli elementi di riduzione al centro, poiché ogni caso è da considerarsi come particolare a se stante.

La precisione necessaria nella misura dell'eccentricità che comporta l'uso di campioni lineari opportunamente tarati e la conoscenza di una altimetria notevolmente precisa fra i piani di paragone tra il centro e l'ex centro, fanno sì che ogni caso debba essere prima ben studiato in tutti i suoi particolari ed in tutte le sue esigenze.

Quando ci si trovi di fronte a misure combinate di lunghezze ed angoli, cioè quando le lunghezze misurate devono servire come elemento di dimensione lineare in triangolazioni o poligonalari, si potrebbe ricorrere all'artificio di ridurre le misure angolari, eventualmente fatte nel centro, all'ex centro, eseguire tutti i calcoli sulla superficie di riferimento scelta ed infine trasportare le coordinate dall'ex centro al centro.

5. *Conclusioni.*

a) Il dislivello fra i punti da misurare deve essere il piú piccolo possibile.

b) Le quote dei punti devono essere note, nei casi normali, con un errore di $\pm 0,5 \div 1$ m.

c) Il raggio R di curvatura deve essere calcolato, nei casi piú sfavorevoli.

Queste condizioni possono essere raggiunte con facilità in zone ove si operi per la prima volta ed ove non si debba tener conto di lavori precedenti, in quanto esse possono essere messe come pregiudiziali nel programma dei lavori stessi.

Quando invece le misure debbono servire come controllo di lavori già eseguiti, deve essere fatta un'accurata scelta dei punti, ubicazione, accesso, possibilità di lavorare in centro, ed infine una accurata indagine sulla precisione delle quote e sulla sicura ubicazione dei piani di paragone, cioè una accurata indagine di archivio ed una pre-ricognizione.