SU DI ALCUNE FORMULE GONIOMETRICHE PER TRILATERI PIANI

Dott. Valentino Tomelleri
Istituto di Topografia e Geodesia dell'Università di Roma

Riassunto

Si discutono e raffrontano, dal punto di vista dell'economia delle operazioni e della precisione, le classiche terne di Carnot e di Briggs opportunamente adattate dall'autore e da altri ad una razionale e spedita applicazione per calcolatrici meccaniche elettro-manuali.

1. In una nostra recente esperienza africana, nel deserto sahariano spagnolo, con collaboratori italiani e spagnoli, si compirono con tellurometri e teodoliti opportune operazioni miste di trilaterazione e di poligonazione al fine di rilevare non pochi particolari punti per la redazione d'una cartografia e per una suddivisione amministrativa del territorio.

Per la risoluzione goniometrica dei numerosi trilateri, in cui si decomponevano le figure polilaterali rilevate, ridotte al livello medio del mare, lo scrivente propose l'uso di alcune terne di formule classiche della trigonometria piana opportunamente trasformate per l'impiego di calcolatrici elettro-manuali.

Di esse si vuole qui brevemente trattare sia perché, in pubbliche lezioni e private conversazioni, se ne constatò l'interesse da parte di personale anche altamente qualificato, sia per poter farne un critico raffronto con altre di elegante sinteticità formale d'introduzione abbastanza recente nei calcoli geodetico-topografici (*).

2. Con le abituali notazioni, siano:

a, b, c i lati noti, opposti ai vertici A, B, C;

$p = (a + b + c)/2$ il semiperimetro;

$S = \sqrt{p(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}$ l'area;

$R = \dfrac{S}{p} = \sqrt{\dfrac{(p - a)(p - b)(p - c)}{p}}$ il raggio del cerchio inscritto ed α, β, γ gli angoli incogniti di vertici rispettivi A, B, C d'un trilatero o triangolo piano non degenere $A\ B\ C$.

((*) A. Paroli: *Procedimenti e simbologia ausiliaria nei calcoli geodetico-topografici, secondo Hausbrandt*. Rivista del Catasto e dei SS. TT. EE., nuova serie, anno XIII, 1958, n. 6, pagine 355-377.

I. - Dalle formule di duplicazione:

$$\cos\alpha = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2\,(\alpha/2),\ \text{ecc.}$$

con le relazioni di Briggs per il seno:

$$\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{bc}},\ \text{ecc.}$$

si trae immediatamente

$$\text{(I)}\quad \cos\alpha = 1 - 2\left(\frac{p}{b} - 1\right)\left(\frac{p}{c} - 1\right) = 2\left[0.5 - \left(\frac{p}{b} - 1\right)\left(\frac{p}{c} - 1\right)\right]$$

e le altre espressioni analoghe per $\cos\beta$ e $\cos\gamma$.

In un triangolo piano non degenere, poiché la somma di due lati è maggiore del terzo, il semiperimetro supera ciascun lato; per modo che è naturale il conteggio di una unità intera in meno all'atto stesso della trascrizione di ciascuno dei tre quozienti p/a, p/b, p/c, maggiori di 1, dalla calcolatrice al modulo per la registrazione immediata nelle forme $(p/a) - 1$, $(p/b) - 1$, $(p/c) - 1$.

Nei secondi membri delle (I), alla duplicazione, di più veloce compimento per via mentale che meccanica al momento stesso della scrittura sul modulo, dei prodotti $\left(\frac{p}{a} - 1\right)\left(\frac{p}{b} - 1\right)$, ecc...., deve seguire o la semplice sottrazione aritmetica di una unità per avere il coseno negativo dell'eventuale angolo ottuso o il complemento ad uno, secondo l'usuale prassi del cologaritmo decimale, per il coseno degli angoli acuti.

Non pare superfluo avvertire nella stessa terna l'assenza dell'area S, e quindi dell'estrazione di radice quadrata, e la presenza, per quanto riguarda le operazioni ripetitrici con operatori diversi da 2, di tre distinte divisioni e di tre moltiplicazioni.

La terna (I) verrà in seguito ricordata come *formule di Carnot modificate perimetralmente*, in quanto esse possono pure ovviamente trarsi con le classiche manipolazioni dalle usuali:

$$\cos\alpha = 1 + \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc} - 1\right),\ \text{ecc.}$$

La modifica perimetrale qui operata sulle formule di Carnot tende ad eliminare una terna di moltiplicazioni o divisioni che si incontrerebbero nell'uso dell'aspetto classico:

$$\text{(I')}\qquad \cos\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc},\ \text{ecc...}$$

includente tre quadrati, tre prodotti misti e tre divisioni; od anche dell'altro:

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{c}\right), \text{ ecc.}$$

con sei divisioni e tre prodotti.

II. - È notorio, seppure non se ne faccia né espresso oggetto didattico né pratico uso nel calcolo logaritmo-trigonometrico, come la terna tangenziale di Briggs possa essere presentata nella forma semplice:

$$\text{(II)} \qquad \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{p-a} = \frac{R/p}{1-a/p}, \text{ ecc.}$$

$$\text{con } R/p = \sqrt{(1-a/p)\,(1-b/p)(1-c/p)}\,.$$

Tanto i secondi quanto i terzi membri delle (II) presentano, nei riguardi del loro aspetto classico, il vantaggio della comunanza dei numeratori e quindi l'obbligo di un'unica estrazione di radice quadrata: circostanze queste che dovrebbero essere sfruttate anche in sede logaritmica, ricorrendo convenientemente ai secondi membri, bastando avere una volta per tutte il $\log_{10} R$.

La radice quadrata a sua volta si consegue abbastanza velocemente, a seconda della approssimazione richiesta, utilizzando la calcolatrice ed opportune tavole numeriche di facile costruzione (**), dato che il tutto

(**) Detta $\sqrt{x}$ la radice quadrata incognita del numero noto x, eventualmente moltiplicato per una potenza pari di 10, ed n un opportuno intero, di radice quadrata $\sqrt{n}$ nota approssimata o rigorosa, prossimo ad x, dalla differenza al momento incognita: $\sqrt{x} - \sqrt{n} = \pm d$ seguono successivamente:

$$\text{(A)} \quad \sqrt{x} = \frac{x+n}{2\sqrt{n}} - \left\{\frac{d^2}{2\sqrt{n}}\right\};$$

$$\text{(B)} \quad \sqrt{x} = \frac{1}{2}\left[\frac{x+n}{2\sqrt{n}} + \frac{x}{(x+n)/(2\sqrt{n})}\right] - \left\{\frac{d^4}{4\sqrt{n}\,(x+n)}\right\}.$$

Le parentesi graffe, tanto nella (A) che nella (B), stanno a ricordare che, nella pratica applicazione di tali formule, la scelta opportuna di n permette di trascurare i termini incogniti da esse racchiusi.

Interpretando appunto tali termini incogniti come errori di approssimazione nell'assunzione di $\sqrt{x}$ pari agli altri termini noti e stabilito che l'uno $d^2/2\sqrt{n}$ o l'altro $d^4/[4\sqrt{n}\,(n+x)] \simeq d^4/8\sqrt{n^3}$, per $x \simeq n$, non debba mai essere superiore ad una quantità ε d'approssimazione prefissata costante, è facile determinare per valori ordinati di d quali siano gli argomenti interi n [$\geq (d^2/2\varepsilon)^2$ o, rispettivamente, $\geq (d/2)^2 \cdot \sqrt[3]{(d/\varepsilon)^2}$], distanziati reciprocamente e successivamente di pressoché $4d \cdot (\sqrt{n} + d)$, delle tavole a partire da un arbitrario intero n_0 quadrato esatto o meno fino a circa $100 \cdot n_0$ in corrispondenza ai quali si dovrà calcolare o $2\sqrt{n}$ o direttamente $4\sqrt{n}$ oppure gli inversi $1/(2\sqrt{n})$, $1/(4\sqrt{n})$.

Ovviamente le tavole costruite per l'applicazione della (A) possono servire per l'applicazione della (B) con logica maggior (variabile) approssimazione.

Del tipo usufruente della (A) sono le semplici *tabelle Monroe dei fattori di divisione o di molti-*

si riduce all'effettuazione di una o due somme e di una o due moltiplicazioni o divisioni.

Notisi pure che, assieme alla estrazione di radice quadrata ed alle due moltiplicazioni del radicando di R o di R/p, sono presenti nelle (II) quattro divisioni, ed eventualmente per i terzi membri le tre ulteriori moltiplicazioni di a, b, c per $1/p$.

Qualora si desideri eliminare tre delle quattro citate divisioni (la divisione potrebbe richiedere un tempo leggermente superiore alla moltiplicazione) mutandole in altrettante moltiplicazioni per un fattore costante, conviene dare la preferenza alle tre seguenti altre:

$$\text{(II')} \qquad \operatorname{cotg}(\alpha/2) = \frac{1}{R} \cdot (p - a) \text{ , ecc...}$$

$$\text{con } \frac{1}{R} = \sqrt{\frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}} \; .$$

Quando sia noto R, il calcolo dell'area $S = R \, . \, p$,o per l'eccesso sferico o per altre esigenze, è quanto mai semplice.

III. - Le formule, di cui alla precedente citazione (*) del Pàroli, implicano la nozione di *carnottiano* $C\alpha$ *di un angolo* α di un triangolo identificabile nel termine trascendente della relativa formula di Carnot cioè si pone come definizione:

$$\begin{aligned} C\alpha &= 2bc \cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2 \\ C\beta &= 2ca \cos\beta = c^2 + a^2 - b^2 \\ C\gamma &= 2ab \cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2 \, . \end{aligned}$$

Da queste segue, dapprima, per constatazione:

$$4S = \sqrt{C\alpha \, C\beta + C\beta \, C\gamma + C\gamma \, C\alpha}$$

e di poi la terna preannunciata:

$$\text{(III)} \qquad \begin{aligned} \operatorname{cotg}\alpha &= C\alpha/4S \\ \operatorname{cotg}\beta &= C\beta/4S \\ \operatorname{cotg}\gamma &= C\gamma/4S \end{aligned}$$

plicazione per radici quadrate con argomenti interi n quadrati non perfetti compresi tra 10^2 e 10^4: con una somma ed una divisione o moltiplicazione si ottengono le prime cinque cifre operative, a sinistra, della radice quadrata richiesta con un errore (per eccesso, non ovunque costante) sempre minore di 5 unità dell'ordine della 6ª cifra. Quando poi sia necessario, l'introduzione della radice quadrata siffatta nella (B) porta, con una ulteriore somma e due divisioni di cui una per 2, ad un secondo valore della stessa affetto da un errore per eccesso minore di 3 unità dell'ordine dell'11ª cifra (a partire dalla 1ª significativa a sinistra).

Una tavola altrettanto semplice per la diretta applicazione della (B), ove appare necessario compiere due somme, due divisioni ed una divisione per 4 o moltiplicazione per 0.25, è la *tabella Reynolds - Monroe per radici quadrate*, con argomenti interi n quadrati perfetti opportuni compresi tra 10^4 e 10^6, mediante la quale si determinano le prime, a sinistra, nove cifre operative di una radice quadrata con errore (per eccesso, quasi ovunque costante) minore sempre di 4 unità dell'ordine della 10ª cifra.

di cui i carnottiani son da calcolarsi con le forme quadratiche della definizione.

In definitiva, la determinazione dei tre angoli con la (III) contempla l'esecuzione di tre quadrati, di almeno due altre moltiplicazioni nel radicando di $4S$, una estrazione di radice quadrata con una o due divisioni, la divisione $\frac{1}{4S}$ e le tre moltiplicazioni finali della costante $\frac{1}{4S}$ per i carnottiani.

3. Da quanto esposto nel precedente numero, ci sembrano indiscutibilmente preferibili le formule (I) di Carnot modificate perimetralmente, tanto nella 1ª quanto nella 2ª forma, alle altre ricordate terne ed alle formule di Carnot (I') nell'aspetto ordinario, e queste ultime alla terna dei carnottiani, tutte le volte che di un trilatero si debbano determinare almeno due angoli. Anzi, l'esigenza d'una garanzia contro errori di qualsiasi specie ed entità obbligherebbe, anche quando vi fossero delle condizioni di verifica attestanti la bontà probabile del calcolo, ad una ripetizione con gli stessi, o meglio altri, mezzi e metodi; per questo appunto ci sembra sia conveniente il ricorso alle (I) anche nel caso della determinazione di un solo angolo allo scopo di usufruire della normale verifica angolare euclidea, senza ripetere due volte il medesimo calcolo.

Infine, anche tenendo conto che le (III) riguardano gli angoli del triangolo nella loro effettiva entità mentre le (II) e (II') le corrispondenti metà, ci sembra senz'altro preferibile la terna (II') alla (III), pure quando fosse richiesta l'area S, perché, alla parità delle operazioni tra le une e le altre, le prime operano in genere su numeri più piccoli; e per questa stessa assenza di quadrati e minorità di radicandi [si ricordi essere $(4S)^2 = R^2 \,.\, 16\, p^2$] ed operatori, anche se a delle moltiplicazioni delle (III) fanno riscontro alcune divisioni delle (II), ci pare che le (II) nell'aspetto dei loro secondi membri possano stare alla pari per convenienza di calcolo e semplicità con le formule dei carnottiani (III).

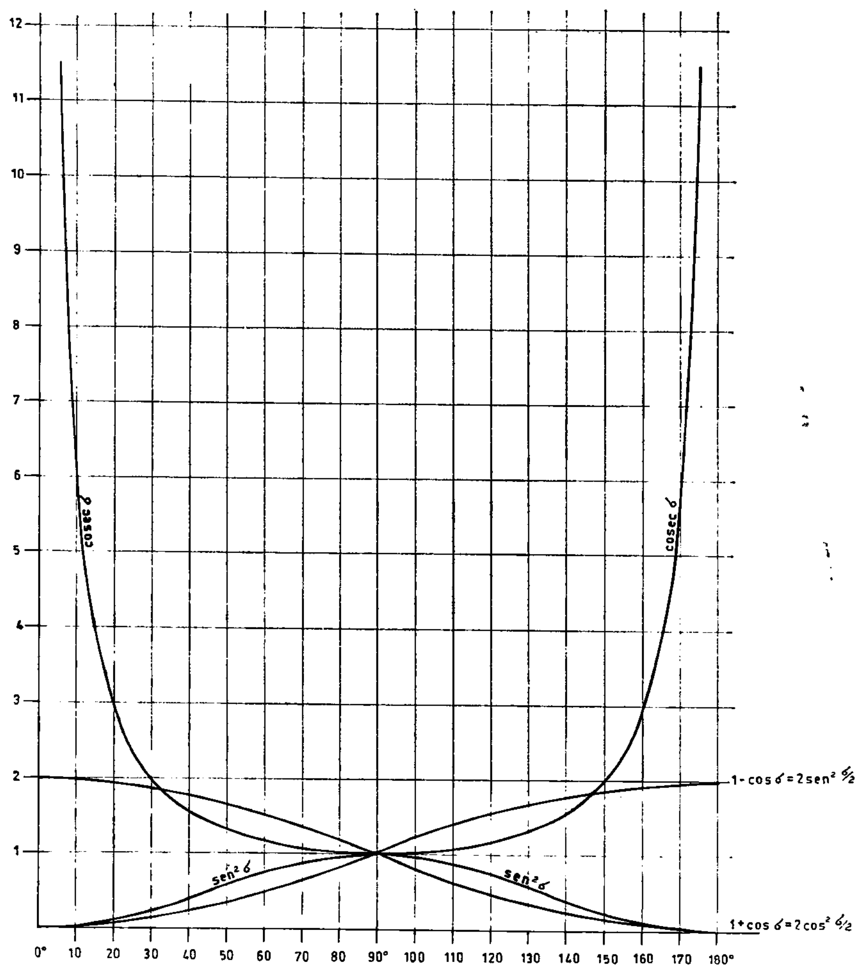
Per quanto concerne la precisione della determinazione degli angoli del trilatero, è da dire che, a motivo della reciproca equivalenza teorica delle quattro terne presentate, gli errori quadratici medi $m\alpha$, $m\beta$, $m\gamma$ angolari saranno in ogni caso

$$m\alpha = \pm \frac{a}{2S} \sqrt{m^2{}_a + \cos^2\gamma \,.\, m^2{}_b + \cos^2\beta \,.\, m^2{}_c}$$

e analoghe per $m\beta$ e $m\gamma$, indicando con m_a, m_b, m_c gli errori quadratici medi rispettivi dei lati a, b, c.

Ne segue la successione d'uguaglianze:
$m_\sigma = \operatorname{cosec}\sigma \,.\, m_{COS} = (1 + \cos\sigma) \,.\, m_{tg} = (1 - \cos\sigma) \,.\, m_{ctg} = \operatorname{sen}^2\sigma \,.\, m_{CTG}$
per $\sigma = \alpha, \beta, \gamma$ ordinatamente, nelle quali appaiono gli errori quadratici medi m_{COS}, m_{CTG}, del coseno e della cotangente dell'angolo σ considerato' assieme agli m_{tg}, m_{ctg}, della tangente e della cotangente della metà $\sigma/2$ dello stesso, che competono ai secondi membri delle terne (I), (III), (II), (II').

La figura adiacente presenta i diagrammi dei quattro coefficienti $\operatorname{cosec}\sigma$, $\operatorname{sen}^2\sigma$, $1 + \cos\sigma$ ed $1 - \cos\sigma$, che intervengono nelle precedenti, inversamente proporzionali agli errori quadratici medi ad essi accoppiati.



Da qui, per il logico adeguamento dell'approssimazione delle tavole di valori naturali delle funzioni goniometriche all'errore quadratico medio delle funzioni stesse, la teorica necessità di consultazione di tavole con diverso numero di decimali a seconda della terna impiegata ed, a rigore, dell'entità dell'angolo incognito.

Si constata essere ad esempio (per graduazione sessagesimale):

	cosec σ	$1 + \cos\sigma$	$1 - \cos\sigma$	$\text{sen}^2\,\sigma$
$\sigma = 30^\circ$	2.00	1.87	0.13	0.25
$= 45^\circ$	1.41	1.71	0.29	0.50
$= 60^\circ$	1.15	1.50	0.50	0.75
$= 90^\circ$	1.00	1.00	1.00	1.00
$= 120^\circ$	1.15	0.50	1.50	0.75
$= 150^\circ$	2.00	0.13	1.87	0.25

Solo nei casi, quindi, piuttosto eccezionali, di angoli convessi differenti da 0° e 180° per non più di 30°, l'uso della terna (I) dei coseni dotrebbe comportare, esigendolo la precisione, il ricorso a tavole ad approssimazione dieci o più volte maggiore con densità d'argomenti essa pure eventualmente maggiore di quella delle tavole della cotangente destinate alle formule (III) dei carnottiani.