

LE POSIZIONI CONIUGATE E INVERTITE NEGLI STRUMENTI TOPOGRAFICI

Prof. CORRADO MAZZON

Istituto di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria del Politecnico di Milano

Premessa

Con i termini di posizioni coniugate e invertite i topografi intendono talune operazioni, eseguite con i loro strumenti, aventi lo scopo di eliminare certi errori sistematici strumentali. Si può rilevare però che tali espressioni sono usate spesso per varie manovre e operazioni per le quali il loro significato risulta a volte impreciso, se non ambiguo.

Accade spesso infatti che negli ambienti specializzati la proprietà del linguaggio venga lesa con l'impiego di termini, i quali si radicano talmente da divenire specifici in un certo campo, creando un gergo da iniziati. Tale gergo, essendo nato in modo anomalo, porta sovente in se stesso delle contraddizioni, che lo rendono incomprensibile agli estranei e fonte di perplessità anche per i non estranei.

Come esempio, si possono ricordare i termini di « distanza orizzontale », « distanza zenitale », « equidistanza delle linee di livello », che sono quasi dei sinonimi, anche se usati per grandezze totalmente differenti.

Ma non è tanto sulla mancanza di purezza del linguaggio che si intende richiamare l'attenzione, quanto su quel tipo di improprietà derivante soprattutto da una scarsa chiarezza nello schema delle operazioni che si eseguono, con conseguente confusione dei termini adoperati. Esempio tipico è dato appunto dalle operazioni in cui si fanno le letture nelle posizioni coniugate oppure in quelle invertite, per le quali frequentemente si usano le dizioni *capovolte*, *ribaltate*, *girate o con cerchio a sinistra e cerchio a destra*, oppure *scambiate*, *ruotate* e tante altre che si confondono tra loro, fino ad usare i termini assolutamente non compromettenti di *1^a e 2^a posizione*.

In parte simili confusioni sono state facilitate dalla scomparsa quasi totale di strumenti topografici puri, cioè atti ad eseguire un unico e ben determinato tipo di misura. I costruttori e gli utilizzatori hanno sempre voluto strumenti che possano essere impiegati per differenti operazioni, aggiungendo allo strumento primitivo qualche organo che ne estendesse le prestazioni, senza accrescerne sensibilmente il costo. Così vediamo il livello dotato di cerchio orizzontale, per essere usato quale tacheometro, e il tacheometro dotato di livella sul cannocchiale, per essere usato come livello, ecc.

Tali incroci, più o meno evidenti e giustificati, sono a volte così profondi e comuni da diventare abituali; basti pensare al teodolite moderno, dove sono innestati, felicemente e proficuamente, due strumenti primitivi: il goniometro per le misure azimutali e l'ecclimetro per quelle zenitali.

Perciò, a chiarire certe manovre e precisare il significato dei termini usati, biso-

generà rifarsi all'operazione elementare e allo strumento ideale ad essa strettamente necessario.

Occorre premettere che l'esigenza di precisione nelle misure topografiche obbliga a costruire e impiegare gli strumenti in modo tale da poter eliminare il più possibile gli effetti degli errori residui di rettifica, che inevitabilmente compaiono con l'uso. Tale possibilità è quasi esclusiva degli strumenti goniometrici, in quanto che le condizioni geometriche realizzate in essi sono suscettibili di costruzioni elementari rigorose, esatte.

Appunto per eliminare gli errori residui degli assi e degli indici, gli strumenti topografici consentono di eseguire le misure degli angoli nelle posizioni coniugate o invertite. Entrambi i sistemi erano un tempo assai diffusi, mentre ora la possibilità della inversione è stata limitata a strumenti e organi speciali, per operazioni primitive, semplici. Per gli altri si preferisce la più agevole manovra di capovolgimento, unita ad altri procedimenti operativi. [1]

Occorre ora limitare il campo di applicabilità di entrambe le operazioni al caso della misura di un angolo piano, ove le manovre risultano ben chiare e differenziate nei due casi; di conseguenza ne verrà che anche le formule finali dovranno essere due distinte e due sole, pur riferendosi alla misura di una stessa grandezza.

Vediamo allora come i due tipi di manovre possano essere ridotti al loro schema geometrico essenziale, in modo da mettere in evidenza le sostanziali differenze concettuali e, conseguentemente, operative e strumentali, ricorrendo per la misura di uno stesso angolo ad un unico strumento schematico completo, capace di eseguire entrambe le manovre.

Una tale generalizzazione sarà utile soprattutto dal punto di vista didattico [2], poiché essa consegue l'unificazione sostanziale e formale di molte usatissime formule, attualmente diverse a causa delle diverse convenzioni assunte caso per caso.

I due schemi geometrici di misura di un angolo piano.

Si abbiano sul piano del disegno segnati due punti A e B e si voglia determinare l'angolo θ , crescente in senso orario, fig. 1, che la direzione orientata da A a B forma con un'altra direzione orientata di riferimento, la R, fisicamente realizzabile (ad esempio la verticale rilevabile col piombino, la direzione del nord magnetico, la direzione di un asse meccanico, ecc.).

Si abbia per questo a disposizione un rapportatore d'angoli completo, idealmente privo di spessore, così congegnato: la linea di fede sia costituita da una linea (non necessariamente retta, e nel disegno, sdoppiata) indefinita, partente da un cerchietto di riferimento; il cerchio graduato, perfetto e di centro C, sia fissato in una posizione qualunque del supporto, mentre l'indice, comunque disposto, sia solidale ad un dispositivo tale che due punti di esso possano dirigersi sempre secondo la direzione di riferimento R. Per semplicità uno di questi punti sia il centro della graduazione e l'altro il punto mobile della lancia P.

Si disponga il rapportatore nella posizione iniziale, puntando col cerchietto di riferimento il punto A e con la linea di fede il punto B. Se la direzione di riferi-

mento fosse parallela alla direzione AB, l'indice segnerebbe la lettura L; se quindi la direzione di riferimento assume la sua primitiva direzione ruotando di θ , l'indice segnerà allora la lettura S tale che

$$S=L+\theta$$

Con questa relazione resta definito che la numerazione del cerchio graduato sia crescente in modo che, quando θ cresce, la lettura S cresce, cioè *sale*. Perciò si è segnato con una freccia il senso di crescita convenuto, partendo dallo zero θ della graduazione.

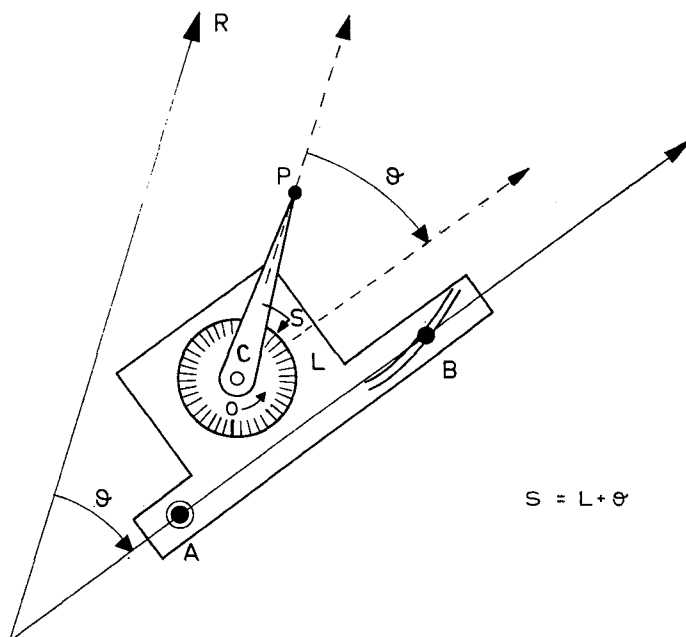


FIG. I POSIZIONE INIZIALE

Tale convenzione, che fa riferimento alle letture, evita la distinzione di graduazione sinistrorsa o destrorsa, di cerchio a sinistra o a destra, la quale, in molti strumenti esistenti, è inapplicabile.

Perciò, per ottenere θ dalla relazione precedente, basterebbe conoscere L: ma, per determinare esattamente questo, bisognerebbe che la linea di fede fosse una retta perfetta passante sempre per A, che fosse possibile dirigerla secondo R, che il centro graduato e l'indice di lettura fossero perfettamente solidali rispettivamente alla linea di fede e alla lancetta P, tutte condizioni in pratica non rispettate. La determinazione di L può farsi in modo approssimativo e transitorio, ricorrendo ad esempio ad un angolo noto, ma, a sua volta, questo deve pur essere determinato originalmente in modo autonomo. Bisognerà allora cercare di ripetere l'operazione di misura introducendo una simmetrizzazione, tale da eliminare gli errori strumentali da cui è affet-

ta la lettura L. In tale schema, oltre alla posizione iniziale, si hanno due sole possibilità di usare il rapportatore:

- 1) Ruotare intorno alla congiungente AB e assumere la posizione coniugata di fig. 2;

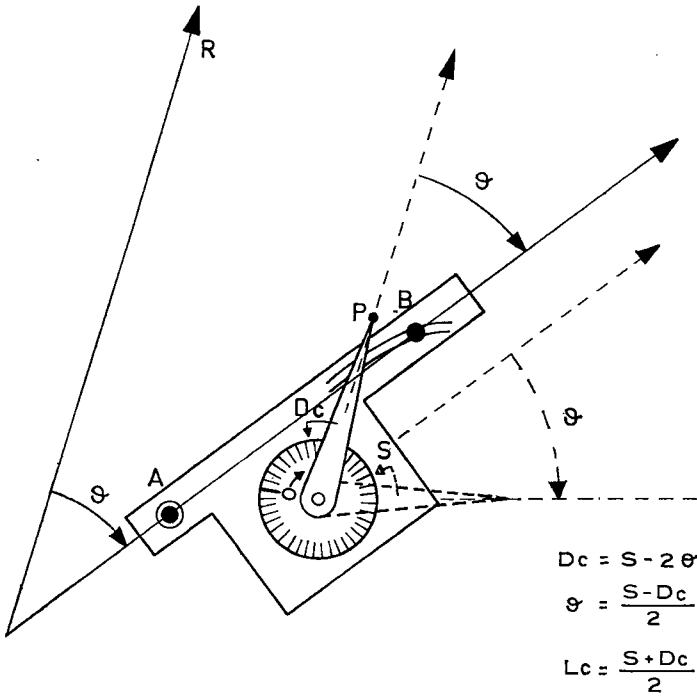


FIG. 2 POSIZIONE CONIUGATA

- 2) Invertire gli estremi sui punti A e B e assumere la posizione invertita di fig. 3. Da tali rappresentazioni la differenza sostanziale tra le due manovre risulta bene evidente.

Vediamo ora quali valori assumano le nuove letture nei due casi, allorché la lancia P si volge nuovamente nella direzione R.

Le letture nelle seconde posizioni vengono chiamate D perché, secondo la convenzione già assunta, quando l'angolo θ della direzione orientata AB *decrece*, anche le letture D, eseguite nella seconda posizione, *decregono*.

Allora per la *posizione coniugata*, l'indice, per riassumere la direzione R, ruoterà di θ verso le letture decrescenti e si avrà:

$$D_c = S - 2\theta$$

e quindi

$$\theta = \frac{S - D_c}{2}$$

Quale conseguenza piú rimarchevole si ha che le due letture S e D_c saranno *uguali*, quando la congiungente AB sarà *parallela* alla R .

Invece *per la posizione invertita* l'indice, per riassumere la direzione R , ruoterà di $180^\circ - 2\theta$ verso le letture crescenti e si avrà [3]

$$D_i = S + 180^\circ - 2\theta$$

e perciò

$$\theta = 90^\circ - \frac{D_i - S}{2}$$

Anche qui è da rimarcare che le due letture S e D_i saranno *uguali*, quando la congiungente AB sarà *normale* alla R .

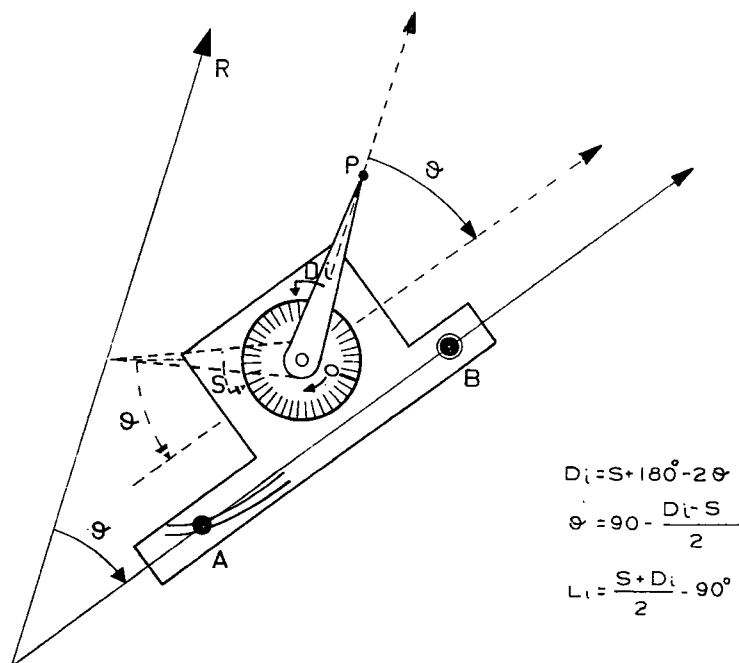


FIG. 3 POSIZIONE INVERTITA

$$D_i = S + 180^\circ - 2\theta$$

$$\theta = 90^\circ - \frac{D_i - S}{2}$$

$$L_i = \frac{S + D_i}{2} - 90^\circ$$

Come ulteriore conseguenza si trova che le letture relative alla direzione origine nei due casi saranno per le posizioni coniugate le seguenti:

$$L_c = \frac{S + D_c}{2}$$

mentre per le posizioni invertite si avrà:

$$L_i = \frac{S + D_i}{2} - 90^\circ$$

È quindi manifesto come i due metodi risultino ben differenziati, oltre che nella manovra, anche nelle formule risolutive.

Come si vede, l'unica ipotesi che occorre fare è che durante le manovre tutte le parti dello strumento restino come erano, anche se srettificate.

In realtà si è sottintesa un'altra ipotesi, riguardante la natura sia dei punti A e B considerati, che del cerchietto e della linea di fede del rapportatore; infatti abbiamo ritenuto che il capovolgimento e la inversione siano entrambi perfettamente realizzabili.

Invece, mentre la inversione reale presuppone unicamente una materializzazione dei due punti A e B, tale che essi vengano toccati dai riferimenti dello strumento in modo sostanzialmente identico nella prima e seconda posizione, il capovolgimento presuppone l'esistenza di un asse di rotazione perfetto materializzante la congiungente AB. Conseguentemente uno strumento a inversione sarà più semplice da realizzare, ma il suo impiego sarà più scomodo, mentre l'esistenza di un asse di rotazione renderà la manovra di capovolgimento assai più agevole ed è per questo che è generalmente preferita la seconda soluzione, quando possibile.

Casi particolari.

Gli schemi esposti si possono seguire per misurare angoli piani, non diedri, sebbene sia possibile tentare una estensione anche ad altre operazioni consimili in cui si parla ancora comunemente di posizioni coniugate o invertite.

Inoltre poiché la direzione fisica di riferimento, quasi esclusivamente considerata in topografia, è la verticale, cioè la direzione della forza di gravità diretta verso l'alto, l'angolo piano che si misura seguendo tali schemi è unicamente la distanza zenitale.

Altri strumenti e operazioni nei quali si assuma un'altra direzione fisica di riferimento, come ad esempio l'orientamento magnetico, giroscopico, siderale, sono ben pochi e raramente adatti alle manovre coniugate o invertite [4] [5].

Nel caso più diffuso di riferimento alla verticale, le relazioni scritte per θ valgono appunto per la distanza zenitale e L è allora lo zenit strumentale, conformemente alle ben note formule.

È da segnalare, infine come si trasformino le relazioni proprie della *misura per inversione* allorché si introduca l'angolo di altezza definito da:

$$\theta = 90 - \alpha$$

Si ottengono allora le altre due note formule:

$$\alpha = \frac{D_i - S}{2}$$

e quindi

$$\frac{D_i + S}{2} = L_i + 90^\circ = \text{Orizzonte strumentale}$$

formalmente identiche a quelle della distanza zenitale per le posizioni coniugate, ove però la direzione di riferimento è diventata la normale alla verticale, cioè la orizzontale [6].

Questa constatazione porta un'altra attenuante alla facilità con cui vengono scambiati i due termini di posizioni coniugate e invertite, poiché le formule stesse sono facilmente confondibili.

Applicazioni.

Gli strumenti elementari coi quali si possono seguire gli schemi descritti sono di uso frequentissimo in topografia, ma il loro campo di misura è, a volte, tanto limitato da diventare essi quasi irriconoscibili rispetto al goniometro universale proposto.

Praticamente, il solo strumento col quale si possono seguire entrambi i procedimenti è la livella a cavaliere del teodolite: infatti con essa si può eseguire sia la manovra di inversione sugli appoggi, sia la manovra di rotazione assieme alla intera alidada intorno all'asse principale. Il cerchio graduato è in tal caso costituito dalla cortissima graduazione della fiala, mentre la numerazione è spesso assente. Di conseguenza, a seconda delle convenzioni assunte, le formulette finali possono essere formalmente diverse [3].

L'indice di lettura risulta costituito dal baricentro della bolla ed esso automaticamente indica la direzione di riferimento, la verticale.

Più frequentemente però questo strumento elementare è usato per un solo tipo di manovra: così, ad esempio, le livelle da piani, da assi, i clinometri sono previsti per la sola inversione, mentre il loro campo di misura è sempre molto limitato. Fa eccezione solo l'eclimetro a sospensione, strumento invero molto modesto [2].

Invece, per le posizioni coniugate si usa universalmente la livella dell'alidada, ma anche in tal caso il campo di misura è limitatissimo perché, più che a misurare l'inclinazione, essa serve come strumento di zero per rendere verticale l'asse principale, asse che materializza meccanicamente la congiungente ideale dei punti A e B [1].

Finora la citazione si è limitata a strumenti aventi appoggi meccanici sui punti A e B. Ma l'estensione più importante è data dalla sostituzione della linea

di fede del goniometro schematico con la linea di mira di un cannocchiale, e del cerchietto di riferimento con il centro del teodolite, punto di incrocio dei due assi ortogonali del cardano. In tal caso si ha soltanto la possibilità di usare lo strumento nella posizione coniugata. Il ribaltamento che così si esegue è, negli strumenti moderni, formalmente diverso da quello seguito nello schema, ma sostanzialmente equivalente, perché la situazione finale risulta la stessa. Di conseguenza la formula da adoperarsi è appunto quella eclimetrica ben nota. Anche l'indice di lettura è sostanzialmente quello schematizzato, poiché nel teodolite l'indice zenitale assume effettivamente la stessa posizione rispetto alla verticale, in conseguenza del centramento della livella d'indice.

Conclusione.

Questa esposizione dei due metodi può lasciare un po' insoddisfatti, poiché da una generalizzazione ci si aspetterebbe una soluzione unica, come pure ci si attenderebbe un unico modo di interpretare cotali manovre apparentemente simili.

In realtà da un punto di vista strettamente geometrico le due operazioni si possono identificare sempre in una rotazione; infatti, nel caso delle posizioni coniugate, l'asse di rotazione è evidentemente dato dalla congiungente i due punti A e B. Invece, nel caso delle posizioni invertite si può pensare a un asse di rotazione fittizio normale alla solita congiungente AB. Così pure anche dal punto di vista analitico, se si considerano le formule finali dei due casi, si vede che, mentre le due semi-differenze delle letture danno angoli complementari, le semi-somme delle letture danno valori che differiscono di un angolo retto, vale a dire come se le direzioni di riferimento nei due casi fossero due, tra loro normali.

In conclusione, spero che la questione qui trattata non sia stata soltanto una precisazione filologica, ma soprattutto una chiarificazione e una sintesi dei procedimenti operativi e degli schemi strumentali che, sebbene possano sembrare vetusti, sono in realtà insostituibili e perciò sempre attuali.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Wild H., *Die neueste Entwicklung der Theodolite*, 1939.
- [2] Bonfigli C. - Solaini L., *Trattato di Topografia*. Ed. Le Monnier, Firenze, 1959.
- [3] Dore P., *Geodesia e Topografia*. Ed. Patron, Bologna, 1948.
- [4] Ollivier F., *Instruments topographiques*. Ed. Eyrolles, Paris, 1955.
- [5] Werkmeister P., *Lexikon der Vermessungs-Kunde*. Ed. Wichmann, Berlin, 1943.
- [6] Breed C. - Hosmer G., *Surveying*. Vol. I, Ed. Wiley, New York, 1945.