RAGIONAMENTI FOTOGRAMMETRICI

V. IL NUMERO DEI PARAMENTI DELL'ORIENTAMENTO RELATIVO PER LA FORMAZIONE DEL MODELLO DEL TERRENO

Prof. Ugo Bartorelli

Nel quarto nostro ragionamento (Bollettino n. 3 del 1964) abbiamo dedotto che da una coppia di fotogrammi di un medesimo oggetto, presi da due punti distinti dello spazio, è possibile formare un *modello* dell'oggetto stesso, che gli è geometricalmente *simile*, solo che dei fotogrammi si conosca *l'orientamento interno*, ossia solo che, dei fotogrammi, si possa ricostruire *le stelle proiettanti.* Di questi modelli, abbiamo constatato, è possibile ottenerne una semplice infinità (∞^1), uno per ogni rapporto di *scala* rispetto all'oggetto vero; per realizzarne uno qualsiasi è necessario e sufficiente rendere complanari — incidenti cioè — due a due, i raggi omologhi delle due stelle proiettanti. Ed al termine del nostro quarto ragionamento ci stavamo domandando quale fosse il piú piccolo numero di coppie di raggi omologhi che risultasse necessario rendere complanari affinché, *di conseguenza,* anche tutte le altre infinite coppie dovessero risultare pure complanari, ed il modello, quindi, formato.

* * *

Per dedurre che un tale numero effettivamente esiste — come sarebbe d'altronde intuitivo — e determinare poi quale esso sia, prendiamo le mosse dalla figura del precedente ragionamento, nella quale le due stelle proiettanti O_1, O_2 sono in uno degli assetti relativi che realizzano un modello dell'oggetto, ossia la complanarità dei raggi omologhi; non importa, ai fini delle nostre deduzioni, che esso sia proprio coincidente con l'oggetto.

Possiamo facilmente renderci conto che, partendo da tale posizione delle due stelle O_1 e O_2, è certo possibile dare un movimento ad una di esse, di guisa che i raggi omologhi, di *tutte* le infinite coppie determinanti i punti del modello, diventino sghembi; ad esempio basterà ruotare la stella O_2 di un certo angolo intorno ad una retta generica, non compresa nell'angolo solido di abbracciamento della stella stessa, perché tutti i raggi di questa escano dai rispettivi piani nucleari; nessuna coppia di raggi omologhi si intersecherà piú in un punto.

È pure certo possibile, sempre partendo dalla detta posizione iniziale di O_1 e O_2, rendere sghembi i raggi omologhi di tutte le infinite coppie, ad eccezione di *una sola* coppia, quella incidente in un punto A; ad esempio basterà ruotare la stella O_2 di un certo angolo intorno al raggio O_2A, perché appunto solo la coppia di raggi omologhi O_1A e O_2A continui ad intersecarsi in A; ogni altra coppia risulterà invece sghemba per essere uscito il rispettivo raggio della stella O_2 dal piano nucleare.

Ed ancora, se la rotazione della stella O_2 supponiamo di indurla intorno alla retta di due punti A e B dell'oggetto, *solo le due coppie* di raggi omologhi O_1A, O_2A ed O_1B, O_2B continueranno ad essere complanari, mentre ogni altra intersezione di raggi omologhi si perderà ([1]).

Da quanto abbiamo ora considerato possiamo constatare che ci è possibile *disfare* il modello sciogliendo tutte le infinite intersezioni di raggi omologhi, o con l'esclusione di nessuna, od eccezion fatta per una sola, o per due sole.

In questi ultimi due casi si ha quindi promiscuità fra coppie di raggi omologhi complanari e coppie di raggi omologhi sghembi.

Sarà anche possibile disfare il modello conservando la complanarità per solo quattro, cinque, sei, ecc... coppie di raggi omologhi? L'intuizione geometrica ci dice subito che sarebbe forse possibile continuare in tale procedimento, ma che da un certo numero n in poi, la possibilità di avere la detta promiscuità dovrebbe esserci preclusa. Possiamo constatare ciò, considerando che, ad esempio, risulta impossibile dare un movimento alla stella O_2 in modo da rendere sghembi solo i due raggi omologhi di una sola coppia, o i raggi di due sole coppie, lasciando invece complanari tutte le altre infinite coppie. La operazione ci apparirebbe impossibile anche se le coppie da conservare complanari invece di essere ∞^2 — quanti sono i punti della superficie dell'oggetto fotografato — fossero invece in un numero grandissimo ma *finito*, purché *generiche*, ossia non appartenenti ad uno stesso piano nucleare. L'operazione è assurda, il che è quanto basta a considerare dimostrata l'esistenza del suddetto numero n, che, per ora, possiamo dire soltanto essere intero, maggiore di 2 e minore di un numero grandissimo, ma finito. Esso è tale che le due stelle O_1 e O_2 possono presentare fino ad $n-1$ coppie generiche di raggi omologhi complanari, promiscue ad infinite altre coppie sghembe; ed è tale che se n (o piú) coppie *generiche* di raggi omologhi sono complanari, tutte le infinite altre coppie risultano *necessariamente* complanari, con la conseguente formazione del modello.

* * *

Accertata l'esistenza di tale numero n, proponiamoci di determinarlo. Senza fare ricorso a nozioni di matematica superiore, ci varremo allo scopo di un principio logico fondamentale che è alla base della esatta proposizione di qualsiasi problema, ossia alla corretta formulazione delle condizioni — sia della loro specie che del loro numero — alle quali il problema deve e può soddisfare.

Se n sono le incognite di un problema, n devono essere le relazioni, *indipendenti* fra loro, che le condizioni poste al problema devono stabilire fra le n incognite. Sappiamo infatti che un sistema con tante equazioni indipendenti (le relazioni suddette) quante sono le incognite, ammette generalmente soluzione; una sola se le equazioni sono tutte di primo grado; piú soluzioni di varia natura, ma sempre in numero finito, con equazioni di grado superiore al primo.

---

[1] Perché la intersezione rimanga inalterata *solo* per i punti A e B è necessario, invero, che alla retta AB non appartengano altri punti dell'oggetto; ma noi supporremo di avere scelto a proposito i punti A e B, come è lecito fare senza limitare le generalità, in modo che effettivamente la retta AB non incontri l'oggetto in altri punti.

Se le *relazioni indipendenti* fossero invece una di meno delle incognite avremmo, come è noto, ∞^1 soluzioni; con due relazioni in meno ne avremo ∞^2. Se fossero una piú delle incognite non si avrebbe alcuna soluzione.

Le *condizioni*, indipendenti fra loro, che si possono porre per definire un problema sono tante quante sono le sue incognite, solo se ognuna di dette condizioni può essere *compiutamente* espressa da *una sola* relazione fra le incognite, ossia se costituisce *un solo vincolo* per il problema, se fa scendere cioè di una sola unità il numero delle cosiddette « dimensioni » del problema. In altre parole un problema che ammette una sola soluzione, una volta svincolato da una condizione siffatta ammette ∞^1 soluzioni e svincolato da una seconda della stessa specie ne ammette ∞^2. Ad esempio il piano passante per tre punti dati è unico; ma per due soli punti passano ∞^1 piani, ossia un fascio, e per un punto solo ∞^2, ossia una stella; la condizione di passare per un punto, rappresenta quindi un solo vincolo, per un piano.

Se invece una condizione, perché possa essere compiutamente espressa, dà luogo necessariamente a due o piú relazioni (equazioni) fra le incognite, allora essa rappresenta due o piú vincoli per il problema. In tale caso le condizioni da porre al problema devono essere in numero ovviamente minore delle incognite. Ad esempio il passaggio per un punto rappresenta due vincoli per una retta nello spazio; infatti per due punti passa una sola retta, ma per un punto solo passano ∞^2 rette, ossia una stella; una condizione di questo tipo fa scendere quindi di due unità le dimensioni del problema (nell'esempio da ∞^2 a ∞^0).

Se, ciò considerato, prendiamo adesso in esame la *condizione di complanarità* di due raggi (quella che a noi esclusivamente interessa per la formazione del modello) la riconosciamo immediatamente come una condizione costituente *un solo* vincolo; infatti le rette dello spazio sono ∞^4, ma tutte quelle che incontrano una retta data sono ∞^3 (precisamente una stella ∞^2, per ognuno degli ∞^1 punti della retta data); la condizione di complanarità riduce quindi veramente di una sola unità il numero delle dimensioni del problema.

* * *

Alla luce di quanto abbiamo esposto piú sopra, sotto un punto di vista generale, circa le condizioni che si possono porre ad un problema, perché esso risulti definito compiutamente, possiamo adesso asserire che il numero *n* delle complanarità, che bastano a definire il modello dell'oggetto , è pari alle « dimensioni » del nostro problema. Per definire il numero di queste dimensioni, ricordiamo che ci proponiamo di formare uno *qualsiasi* degli infiniti modelli dell'oggetto, ossia in una posizione qualsiasi dello spazio e ad una scala qualsiasi; di *orientare* cioè una delle due stelle, ad esempio O_2, *relativamente* all'altra, nel significato già noto, da dare a questa operazione.

Possiamo quindi supporre, senza menomare le generalità del problema che la stella O_1 sia in una posizione fissa, arbitraria; tutte le possibili posizioni che può assumere la stella O_2 rispetto alla prima sono ∞^6; infatti *sei* sono, come già sappiamo (Bollettino n. 1 del 1964), gli elementi di *orientamento esterno* di una sola stella, le tre traslazioni, che definiscono la posizione del vertice O_2, e le tre rotazioni che definiscono l'assetto angolare della sua stella.

Sono proprio questi i sei *parametri*, ognuno variabile in una semplice infinità di valori, cui si deve agire per conseguire, una per volta, una qualsiasi delle suddette infinite posizioni.

Fra queste ∞^6 possibili posizioni della stella O_2 troveremo necessariamente quelle che determinano tutti i possibili *orientamenti relativi* rispetto alle stella O_1, ossia gli ∞^1 modelli che ci interessano ([2]) la cui esistenza abbiamo accertato. Ecco allora che le dimensioni del nostro problema, quello di conseguire un modello qualsiasi dell'oggetto, risultano in numero di $6 - 1 = 5$.

Il numero *n* di condizioni che cercavamo è quindi *cinque*; cinque sono, cioè le complanarità che definiscono il modello dell'oggetto (purché fra loro indipendenti, ossia su piani nucleari diversi).

Ciò significa infine che non appena delle due stelle O_1, O_2 si rendono complanari cinque coppie di raggi omologhi, tutte le altre infinite coppie risultano *necessariamente* pure complanari.

* * *

A questo stesso risultato, $n = 5$, saremmo arrivati immediatamente se avessimo potuto fare ricorso alla geometria proiettiva, che appunto dimostra come la *proiettività* fra due stelle di raggi, più generalmente di due forme ∞^2, resta definita quando di esse vengono date cinque coppie di raggi omologhi.

Allo stesso risultato saremmo arrivati rapidamente se avessimo potuto fare ricorso all'algoritmo delle *coordinate lagrangiane* del sistema costituito da una delle due stelle (supposta fissa in posizione arbitraria, l'altra). I gradi di libertà, ossia le coordinate lagrangiane di una stella, come figura rigida dello spazio, sono sei. Infatti per darne una posizione qualsiasi basta assegnare le tre coordinate di tre suoi punti (9 parametri) insieme alle condizioni che stabiliscono la sua rigidità, ossia che le mutue distanze fra i tre punti stessi siano anch'esse assegnate (3 vincoli); da cui le coordinate lagrangiane che determinano tutte le possibili posizioni di una stella rispetto all'altra risultano effettivamente $9 - 3 = 6$. Ma dato che fra queste posizioni si trovano le ∞^1 che determinano gli altrettanti modelli del terreno, e dato che a noi interessa formarne uno qualsiasi, anche per questa via si deduce che agendo con cinque sole di esse si consegue *una soluzione qualsiasi* del nostro problema e quindi, infine, che le condizioni di complanarità necessarie e sufficienti a determinarla sono in numero di cinque.

* * *

La disponibilità dei dodici elementi di orientamento esterno, che, come abbiamo visto nel nostro terzo ragionamento (Bollettino n. 1 del 1964), definiscono *l'orientamento assoluto* della coppia di fotogrammi all'atto della presa, è lar-

---

([2]) Gli altri ∞^5 diversi assetti possibili fra le due stelle non danno luogo a formazione di modello; le coppie di raggi omologhi saranno in essi tutte sghembe oppure si avrà simultanea promiscuità fra coppie complanari e coppie sghembe, come ci è capitato già di osservare.

gamente sovrabbondante, quindi, quando invece ci proponiamo soltanto di *orientare relativamente* i due fotogrammi. Basta dunque utilizzare, allo scopo, solo cinque di tali elementi.

Piú sopra, col supporre la stella O_1 in posizione fissa arbitraria, abbiamo implicitamente ammesso che i cinque parametri da utilizzare fossero gli elementi di orientamento esterno della stella O_2 meno uno, ad esempio meno una delle tre traslazioni di tale stella. Effettivamente questo, nella pratica, è uno dei criteri alla base di una delle prassi adottate per l'orientamento relativo.

Ma col fare la suddetta supposizione non ci siamo posti limitazioni; anzi dalla generalità stessa secondo la quale abbiamo considerato il problema, risulta ovvio che i cinque parametri possono essere scelti comunque fra i suddetti dodici elementi di orientamento esterno, a patto naturalmente di non utilizzarne mai due, i cui effetti si equivalgono reciprocamente, come le componenti omononime delle traslazioni dei due fotogrammi. Cosí i cinque parametri possono essere anche scelti in modo che consistano nelle tre rotazioni di uno dei due fotogrammi ed in due delle tre rotazioni dell'altro; il che effettivamente è un altro criterio che dà luogo ad un'altra prassi in uso per l'orientamento relativo.

Ed i rimanenti sette elementi di orientamento esterno che restano inutilizzati per il conseguimento dell'orientamento relativo, a che servono? Manifestamente consentono di *dimensionare* e *orizzontare* il modello ottenuto (come è stato già eccennato nel procedente ragionamento), ossia di realizzare l'*orientamento assoluto.* È quanto considereremo nel seguito di questo nostro ragionare; potremo constatare anche in questa seconda parte del nostro problema fotogrammetrico che le condizioni da realizzare sono esattamente commisurate ai parametri disponibili.