

## CALCOLO E COMPENSAZIONE DI UNA POLIGONALE CHIUSA

*Problema:* Di una poligonale chiusa  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ , i cui vertici si susseguono in senso antiorario, si sono misurati tutti i lati  $A_1A_2=l_1, \dots$ , e tutti gli angoli  $A_nA_1A_2 = \alpha_1, A_1A_2A_3 = \alpha_2, \dots$ . Calcolare le coordinate compensate dei vertici dopo aver riferito la poligonale ad un sistema di assi cartesiani avente l'origine in  $A_1$ , l'asse delle ascisse lungo  $A_1A_2$ , positivo verso  $A_2$ , l'asse delle ordinate nella posizione solita rispetto al primo.

Chiamata  $\Sigma\alpha'$  la somma degli angoli misurati, si calcola l'errore di chiusura angolare  $\Delta\alpha = \Sigma\alpha' - (n-2)\pi$  e, se questo è minore della tolleranza, si calcolano gli angoli compensati  $\alpha_i = \alpha'_i - \Delta\alpha/n$ , la cui somma, per controllo, deve dare  $(n-2)\pi$ . I risultati, di solito, vengono arrotondati.

Successivamente si calcolano gli angoli di direzione dei lati successivi  $\Theta_j = (A_{i-1}A_i) \pm \pi + \alpha_i$  dove i segni  $+$  o  $-$  valgono rispettivamente se  $\Theta_{i-1}$  è minore o maggiore di  $\pi$ .

Si passa poi al calcolo delle coordinate parziali dei vertici

$$\begin{aligned} x'_i &= A_i - A_{i-1} \text{ sen}(A_i - A_{i-1}) = l_i - \text{sen } \Theta_{i-1} \\ y'_i - A_{i-1} &= A_i - A_{i-1} \text{ cos}(A_i - A_{i-1}) = l_i - \text{cos } \Theta_{i-1} \end{aligned}$$

Verificato che  $\Delta_l = \sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2}$  è inferiore alla tolleranza lineare, si procede alla compensazione delle coordinate parziali:

$$x_i = x'_i - A_{i-1}A_i \Delta x' / \Sigma l \qquad y_i = y'_i - A_{i-1}A_i \Delta y' / \Sigma l$$

Per controllo deve accadere che  $\Sigma x_i = 0, \Sigma y_i = 0$ .

Si calcolano poi le coordinate totali richieste

$$X_i = X_{i-1} + x_i; \quad Y_i = Y_{i-1} + y_i$$

Per controllo, applicando le precedenti fino ad arrivare nuovamente alle coordinate di  $A_1$  si dovrà trovare il valore zero per entrambe.

*Esempio di calcolo con la macchina*

Elementi misurati: Lati:  $l_1 = A_1A_2 = 318,70$  m;  $l_2 = A_2A_3 = 320,68$  m;  $l_3 = A_3A_4 = 311,25$  m;  $l_4 = A_4A_5 = 322,38$  m;  $l_5 = A_5A_6 = 255,57$  m;  $l_6 = A_6A_1 = 294,43$  m.

Angoli:  $\alpha_1 = 261^\circ,00$ ;  $\alpha_2 = 62^\circ,09$ ;  $\alpha_3 = 136^\circ,46$ ;  $\alpha_4 = 130^\circ,56$ ;  $\alpha_5 = 132^\circ,30$ ;  $\alpha_6 = 77^\circ,54$ .

*Calcoli:* Calcolo di  $\Sigma\alpha'$ , degli angoli compensati e degli angoli di direzione dei lati.

$\alpha_1'$	26100	< +
$\alpha_2'$	6209	< +
$\alpha_3'$	13646	< +
$\alpha_4'$	13056	< +
$\alpha_5'$	13230	< +
$\alpha_6'$	7754	< +
$\Sigma\alpha'$	79995	< T
$\Delta\alpha$	= -	0 <sup>g</sup> ,05

*Angoli compensati*

$\alpha_1$	26101	< +
$\alpha_2$	6210	< +
$\alpha_3$	13647	< +
$\alpha_4$	13057	< +
$\alpha_5$	13230	< +
$\alpha_6$	7755	< +
$\Sigma\alpha$	80000	< T

$\Theta_1$	10000	< +
$\pi$	20000	< +
$\alpha_2$	6210	< +
$\Theta_2$	36210	< T
$\Theta_2 - \pi$	16210	< +
$\alpha_3$	13647	< +
$\Theta_3$	29857	< T
$\Theta_3 - \pi$	9857	< +
$\alpha_4$	13057	< +
$\Theta_4$	22914	< T
$\Theta_4 - \pi$	2914	< +
$\alpha_5$	13230	< +
$\Theta_5$	16144	< T
$\Theta_5 + \pi$	36144	< +
$\alpha_6$	7755	< +
$\Theta_6$	43899	< T
$\Theta_6 + \pi$	23899	< +
$\alpha_1$	26101	< +
$\Theta_1$	50000	< T
	(10000)	

*Calcolo delle coordinate parziali.* Con la macchina a due totalizzatori il calcolo delle  $x$  e delle  $y$  si può eseguire contemporaneamente determinando, senza necessità di reimpostazione, la somma delle  $x$  sul secondo totalizzatore, premendo ogni volta che si ricava la  $x$ , contemporaneamente, i tasti \* nero e + verde (il risultato dell'operazione viene indicato dalla macchina col simbolo + T); le  $y$  parziali sono seguite dal simbolo < T e vanno riprese poi per sommarle algebricamente.

L'operazione procede così: si imposta il valore del primo lato che è l'ascissa di  $A_2$  e si abbassa + nero, poi contemporaneamente \* nero e + verde (si potrebbe abbassare subito il + verde, ma nell'altro modo l'ascissa parziale di  $A_2$  viene scritta dalla macchina, come tutte le altre, in rosso, a scanso di equivoci); si imposta il valore del lato  $A_1A_2$  e si preme  $\times$  indi si imposta il valore naturale del  $\sin(A_1A_2)$  e si preme = rosso (o nero) secondo il segno della funzione; si premono contemporaneamente \* nero e + verde ricavando la  $x_2$ ; poi si imposta il valore di  $\cos(A_1A_2)$  e si preme = rosso (o nero) ottenendo il valore di  $y_2$ . Successivamente si ripete lo stesso procedimento fino ad arrivare all'ultima coordinata parziale. Alla fine premendo \* verde si ha la somma algebrica delle ascisse parziali, ossia l'errore lineare per le ascisse, se la poligonale è chiusa, come abbiamo supposto.

Si reimpostano tutte le ordinate parziali, limitando l'approssimazione al centimetro e si trova la somma che dà l'errore lineare per le ordinate.

Si noti che per le ascisse l'errore non arriva al centimetro, quindi si ritiene nullo, quello delle ordinate è di 14 cm, facendo restare l'errore di chiusura largamente entro i limiti di tolleranza, per cui si può procedere alla compensazione.

*Calcolo delle coordinate parziali  
e della somma x parziali*

$x'_2=l_1$	3187000000	< +
	3187000000	+ T
$y^1_2=0$		
$l_2$	32068	<< X
sen $\Theta_2$	56078	$\frac{X}{c}$
$x'_3$	1798309304	$c + \frac{T}{c}$
cos $\Theta_2$	82796	=
$y'_3$	2655102128	< T
$l_3$	31125	<< X
sen $\Theta_3$	99975	$\frac{X}{c}$
$x'_4$	3111721875	$c + \frac{T}{c}$
cos $\Theta_3$	2246	$\frac{X}{c}$
$y'_4$	69906750	$c < T$
$l_4$	32238	<< X
sen $\Theta_4$	44191	$\frac{X}{c}$
$x'_5$	1424629458	$c + \frac{T}{c}$
cos $\Theta_4$	89706	$\frac{X}{c}$
$y'_5$	2891942028	$c < T$
$l_5$	25557	<< X
sen $\Theta_5$	56934	=
$x'_6$	1455062238	+ T
cos $\Theta_5$	82210	$\frac{X}{c}$
$y'_6$	2101040970	$c < T$
$l_6$	29443	<< X
sen $\Theta_6$	57488	=
$x'_1$	1692619184	+ T
cos $\Theta_6$	81824	=
$y'_1$	2409144032	< T
$\Sigma x'$	20785	* <

*Calcolo della somma y parziali  
 $y^1_2=0$*

$y'_3$	26551	< +
$y'_4$	699	< -
$y'_5$	28919	< -
$y'_6$	21010	< -
$y'_1$	24091	< +
$\Sigma y'$	14	< T

*Calcolo della somma dei lati*

$l_1$	31870	< +
$l_2$	32068	< +
$l_3$	31125	< +
$l_4$	32238	< +
$l_5$	25557	< +
$l_6$	29443	< +
$\Sigma l$	182301	< T

Potendo ritenere le  $x$  esatte in quanto l'errore è al disotto del cm (2 mm), si procede alla compensazione delle  $y$  per le quali l'errore totale è di 14 cm. La ripartizione di questo errore si esegue fra tutte le  $y$  (meno che nella  $y_2=0$ , volendo che  $A_2$  rimanga sull'asse delle ascisse) in proporzione alle lunghezze dei lati cui sono relative; siccome ad ogni ettometro compete circa un cm ( $14 \times 100 : 1823$ ), toglieremo 3 cm alle ordinate  $y'_3, y'_4, y'_5, y'_1$  e due cm a  $y_6$ .

Per controllo, le somme delle  $x$  e delle  $y$  compensate devono risultare nulle.

Successivamente si calcolano le coordinate totali di ogni vertice sommando alle totali del vertice precedente le parziali intermedie: i risultati delle somme successive, ossia le coordinate totali, si leggono ogni volta premendo il tasto O che non scarica il totalizzatore. Il controllo finale dei calcoli si ha dal risultato delle coordinate totali di  $A_1$  che devono risultare nulle.

$x_2$  31870 < +  
 $x_3$  17983 < -  
 $x_4$  31117 < -  
 $x_5$  14246 < -  
 $x_6$  14550 < +  
 $x_1$  16926 < +  
 $\Sigma x = 0$  < T

$y_2 = 0$   
 $y_3$  26548 < +  
 $y_4$  702 < -  
 $y_5$  28922 < -  
 $y_6$  21012 < -  
 $y_1$  24088 < +  
 $\Sigma y = 0$  < T

$x_2$  31870 < +  
 $X_2$  31870 < S  
 $x_3$  17983 < -  
 $X_3$  13887 < S  
 $x_4$  31117 < -  
 $X_4$  17230 c < S  
 $x_5$  14246 < -  
 $X_5$  31476 c < S  
 $x_6$  14550 < +  
 $X_6$  16926 c < S  
 $x_1$  16926 < +  
 $X_1 = 0$

$y_3$  26548 < +  
 $Y_3$  26548 < S  
 $y_4$  702 < -  
 $Y_4$  25846 < S  
 $y_5$  28922 < -  
 $Y_5$  0376 c < S  
 $y_6$  21012 < -  
 $Y_6$  24088 c < S  
 $y_1$  24088 < +  
 $Y_1 =$  < T

## CALCOLI TACHEOMETRICI

*Problema.* Con un tacheometro posto in un punto  $S$  di quota  $Q_s$ , ad un'altezza  $b$  da terra, si è osservata la stadia posta in un punto  $P$  e si sono eseguite le letture a questa ed ai cerchi azimutale e zenitale. Determinare la distanza  $d=SP$  e la quota  $Q$  del punto  $P$ .

È noto che

$$d = G \operatorname{sen}^2 \varphi$$

$$Q = G \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + Q_c - l_m$$

con  $G = KS$ , dove normalmente  $K = 100$ ,  $S = l_2 - l_1$ ,  $Q_c = Q_s + b$

Occorre anche preventivamente controllare se la lettura intermedia  $l_m$  è uguale alla media fra quelle estreme  $l_1$  e  $l_2$ .

Con la macchina calcolatrice si ritiene opportuno eseguire detto controllo ed il calcolo di  $S$  nel seguente modo:  $l_2 - l_m = l_m - l_1$ ,  $S = (l_2 - l_m) + (l_m - l_1)$ .

Allo scopo di accelerare i calcoli è conveniente usare le apposite tavole dei coefficienti  $\operatorname{sen}^2 \varphi$  e  $\operatorname{sen} \varphi \cdot \cos \varphi$  <sup>(1)</sup>.

*Esempio.* Elementi noti ed osservati:  $Q_s = 148,76\text{m}$ ,  $b = 1,48\text{m}$ ,  $l_1 = 1,080\text{m}$ ,  $l_m = 1,477$ ,  $l_2 = 1,814$ ,  $K = 100$ .

<sup>1</sup> ved. ad esempio, sul « Manuale logaritmico completo del tecnico » di C. Bonfigli, ed. Hoepli, 1965, che riporta anche i valori naturali di  $\operatorname{sen}^2 \varphi$  e  $\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi$  con 5 decimali, per gli angoli sessagesimali e centesimali.

*Macchina con due totalizzatori (nero e verde).*

Leve disinserite.

Si imposta 1814 e si preme + nero	1814 < +
si imposta 1447 e si preme - nero	1447 < -
si preme O nero che dà il totale	367 < S
si imposta 1447 e si preme + verde	1447 + <
si imposta 1080 e si preme - verde	1080 - <
si preme contemporaneamente O verde e + nero	367 O +
si preme IM poi * nero (va a fattore il risultato $(l_2 - l_1)$ )	734 < T ×
si imposta $\text{sen}^2 \varphi$ , a 4 decimali, letto sulle tavole e si preme =	9750 =
si preme * nero e si ha $d = 71,57 m$ che va letto con 5 dec.	7156500 < T
si imposta $\text{sen } \varphi \cdot \cos \varphi$ e si preme =	1560 =
si imposta $Q_c$ con 5 decimali e si preme + nero	15024000 < +
si imposta $l_m$ con 5 decimali e si preme - nero	144700 < -
si preme * nero e si ha $Q = 160,24 m$ (che va letto con 5 dec.)	16024340 < T

*Nota.* Il valore  $G = KS = 73,4 m$  ha un decimale, i coefficienti 0,9750 e 0,1560 sono stati presi con quattro decimali perché, in questo caso, sufficienti, pertanto i prodotti del primo per ciascuno degli altri due hanno cinque decimali e di conseguenza gli addendi vanno scritti con cinque decimali aggiungendo il numero di zeri necessario e i risultati vanno pure letti con cinque decimali di cui le ultime cifre sono puramente fittizie.

*Macchina con un totalizzatore.*

Rispetto al procedimento precedente varia solo la prima parte:

si imposta 1814 e si preme +	1814 < +
si imposta 1447 e si preme -	1447 < -
si preme IM poi *	367 < T ×
si imposta 1447 e si preme +	1447 < +
si imposta 1080 e si preme -	1080 < -
si preme O	367 < S
si preme M poi +	367 < + ×
si preme IM poi *	734 < T ×

dopo si procede come sopra, impostando 9750, ecc.

*Osservazione.* Qualora non si avessero le tavole dei valori naturali di  $\text{sen}^2 \varphi$  e  $\text{sen } \varphi \cdot \cos \varphi$ , occorre usare il normale procedimento di moltiplicazione  $\text{sen } \varphi \cdot \text{sen } \varphi$  e  $\text{sen } \varphi \cdot \cos \varphi$  (per il primo si può impiegare il comando del «ripete» e per il secondo dividere per due il  $\text{sen } 2 \varphi$ ).

