

LE MAPPE URBANE E IL LORO COLLAUDO

PROF. CLEMENTE BONFIGLI

*Comunicazione presentata al X Convegno nazionale della S.I.F.E.T.
Varese - Aprile 1965*

1. - Lo studio urbanistico e la redazione o l'aggiornamento dei piani regolatori dei centri urbani in relazione all'espansione di questi, hanno per base la mappa a scala grande (1: 1 000, 1: 2 000) la quale deve rappresentare la zona nel modo piú fedele possibile e non sono piú sufficienti, molto spesso, le vecchie mappe catastali, talvolta risalenti ad oltre un secolo fa.

Inoltre, come è noto, queste sono esclusivamente planimetriche, mentre all'urbanista necessitano anche le quote per poter regolare lo sviluppo edilizio tenendo conto dello smaltimento delle acque piovane e di rifiuto che, nelle zone di completa pianura, rappresenta un problema non trascurabile.

L'aggiornamento delle vecchie mappe catastali nelle zone in cui è avvenuta la notevole espansione edilizia di questi due ultimi decenni, non ha sempre raggiunto la precisione relativa alle carte costruite ex-novo per la difficoltà del riferimento alle reti di base, e, talvolta, tale aggiornamento è stato eseguito appoggiandosi a qualche particolare già rappresentato.

Si è dato anche il caso che, studiata una certa sistemazione stradale sopra una vecchia mappa, quando si è voluto riportarne il tracciato sul terreno, si è trovato che un rettifilo segnato in zona libera, investiva invece alcuni edifici.

Per queste ragioni molte Amministrazioni civiche si sono trovate o si trovano nella necessità di dover provvedere alla redazione ex-novo della carta del proprio territorio affidandone l'incarico a ditte di rilevamento fotogrammetrico per motivi diversi fra i quali sono da citare il minor costo, a parità di precisione, e il minor tempo richiesto per fornire la carta. Ormai, da tempo, sono cadute le prevenzioni circa la temuta minor precisione della carta fotogrammetrica rispetto a quella redatta con il metodo tradizionale; anzi, le numerose cartografie eseguite col procedimento fotogrammetrico sono risultate, al collaudo, assai precise con buona uniformità nelle varie parti.

La scala usata è generalmente quella 1 : 2 000. Sufficientemente grande per rispondere alle esigenze delle progettazioni urbanistiche, essa risulta un buon compromesso fra il costo della carta e le necessità di servire agli scopi per cui è costruita.

È anche importante rilevare subito l'opportunità che le amministrazioni appaltanti nominino il collaudatore prima dell'esecuzione del lavoro, come qualche volta già avviene, con l'incarico specifico di seguire le operazioni di campagna, di calcolo e di officina in modo che esso possa intervenire tempestivamente in caso di necessità. Anzi, in attesa di un capitolato generale che è allo studio, sarebbe opportuno che l'esperto, al quale verrà affidato successivamente l'incarico del collaudo, fosse chiamato a fornire consigli all'Amministrazione appaltante circa le

norme da introdurre nel capitolato, in relazione alla situazione morfologica della zona da restituire, allo scopo della carta, ecc. Così, mentre può aver minor interesse una notevole precisione nelle quote se il centro urbano è in terreno inclinato e quindi le fognature possono avere pendenze naturali più che sufficienti per smaltire le acque, essa sarà da tenere nella dovuta considerazione nel caso di superficie del terreno quasi orizzontale.

A proposito di un futuro capitolato d'appalto ufficiale, la cui necessità è molto sentita, occorrerà che in esso sia ben specificato come deve essere condotto il collaudo, stabilendo chiaramente, insieme alle tolleranze, la precisione che si deve conseguire nei metodi di controllo, i quali, ovviamente, danno luogo, per loro conto, ad errori nei risultati.

2. - Il *collaudo* di una carta consta di un insieme di operazioni atte ad accertare che tutte le condizioni poste nel contratto di appalto siano verificate, le quali, oltre all'osservanza di tutte le altre prescrizioni, consistono principalmente nel controllo dell'esattezza della rappresentazione, sia dal lato planimetrico che altimetrico.

Sotto quest'ultimo aspetto nelle zone urbane non tutte le quote riportate sulla carta hanno la medesima importanza per la funzione della carta stessa; maggiormente interessano quelle dei cosiddetti caposaldi, che dovrebbero essere posti ad una distanza non superiore ai 500 m, mentre le quote del terreno libero, specialmente se coltivato, richiedono minor rigore.

A questo scopo servono bene le livellazioni geometriche, che sono di precisione sufficiente e di esecuzione piuttosto rapida, seguendo linee particolari (strade, argini, ecc.), collegando i diversi caposaldi, dai quali, in seguito, e solo da questi, potranno derivarsi le quote di altri punti che interesseranno le progettazioni diverse. Sarebbe anche opportuno che gli uffici tecnici comunali interessati curassero successivamente la trasposizione di quei caposaldi per i quali si possa temere circa la loro conservazione, sopra murature stabili da ricercarsi nelle vicinanze, perché essi possono risultare molto preziosi in seguito.

Per i controlli dei particolari in terreno libero serve anche il rilievo celerimetrico, purché eseguito con particolare cura, facendo stazione in punti ben definiti sulla carta e sul terreno e orientandosi su punti altrettanto sicuri. Opportuna può essere anche l'applicazione del metodo delle sezioni, interessando parti di terreno appartenenti a fotogrammi diversi.

Ma la maggior fatica, oltre la verifica relativa alla rete di base, risulta nel controllo planimetrico dei numerosissimi particolari della mappa urbana ed è naturale che si cerchi di conseguire lo scopo con l'impiego di tempo e di mezzi non sproporzionati al fine da raggiungere.

I comuni procedimenti topografici, che si sviluppano lungo le strade, anche quando sono idonei per la precisione che possono raggiungere, non sono del tutto convenienti per le difficoltà inerenti alla presenza continua di ostacoli, sia fissi, sia mobili, come fabbricati, veicoli, pedoni, ecc.

Occorre anche tener presente che nelle mappe urbane, oltre l'accertamento degli errori nei particolari planimetrici in un intorno ristretto, ha notevole impor-

tanza il controllo della corrispondenza della carta al terreno rilevato fra punti relativamente lontani, non triangolati, perché, per gli scopi urbanistici, ci si trova spesso di fronte ad allineamenti o tracciati stradali piuttosto lunghi; come si è già detto, le verifiche locali debbono interessare due o più fotogrammi, in modo da poter scoprire eventuali errori dovuti ad imperfetto orientamento degli stessi, vuoti nelle prese, ecc., rimediati poi dal cartografo in qualche modo.

3. - È stato appunto in occasione del collaudo della carta fotogrammetrica del territorio comunale di un centro urbano che, dopo aver seguito anche le operazioni di campagna e d'ufficio eseguite dalla ditta appaltatrice, ci si è trovati di fronte al problema di poter eseguire un efficace controllo planimetrico, distribuendolo con una certa uniformità su tutta la carta, anziché restringerlo a zone limitate e senza aumentare notevolmente il peso delle operazioni di campagna.

I procedimenti impiegati, oltre a quelli consueti, sono stati due: quello dell'*intersezione diretta* e quello *per direzioni*, sia per via analitica che grafica, o analitico-grafica, usando opportuni accorgimenti per rendere sufficiente la precisione anche del metodo grafico.

4. - *Metodo di intersezione.* Il metodo di intersezione si è applicato quando è stato possibile, misurando sul terreno gli angoli necessari e individuando il punto sulla carta dopo averne calcolate le coordinate con la macchina, oppure per intersezione grafica con gli accorgimenti di cui sarà detto in seguito.

Il procedimento di intersezione da due stazioni note è evidentemente il più consigliabile quando si può vedere lo stesso punto da due stazioni, la qual cosa non è sempre possibile nella selva di fabbricati, ma basta trovarne alcuni, distribuiti un po' dappertutto, per poter costituire una rete di dettaglio di sicuro affidamento.

Nei collaudi in zone di questo tipo si ritiene doversi impiegare largamente questo procedimento il quale, giudicato nel complesso delle operazioni di campagna e di tavolo, è meno laborioso di qualche altro, nonostante i calcoli cui dà luogo. Oggi con l'impiego delle comuni calcolatrici elettriche, si può eseguire il calcolo della posizione di un punto nel giro di alcuni minuti.

È innegabile che il procedimento per intersezione, rispetto a quello delle poligonazioni, consente di eseguire operazioni di campagna più rapide e di ottenere risultati più sicuri, specialmente quando i punti da rilevare sono alquanto lontani da quelli della rete di base.

Ma il procedimento per intersezione può essere risolto per via grafica appoggiandosi al reticolato della parametratura del foglio e può essere applicato anche quando il punto da determinare è sopra un foglio diverso rispetto a quello dei punti di base.

Esso consiste nel fissare due parallele all'asse X delle ascisse comprendenti il punto P da determinare ed aventi rispettivamente l'ordinata $Y = h$ ed $Y = k$ (fig. 1) ed individuare le ascisse dei punti H, H', K, K' in cui le direzioni (AP) e (BP) dai punti base al punto P incontrano dette parallele. Ricavate le posizioni di questi punti è facile trovare graficamente la posizione del punto P e valutare quindi l'errore rispetto alla rappresentazione in mappa.

Per individuare le ascisse di H ed H' sopra la retta $Y = h$ e di K e K' sopra $Y = k$ basta applicare le formule del tipo

$$X_h = X_b + (h - Y_b) \tan \Theta$$

dove gli elementi che figurano nel secondo membro sono tutti noti. Il calcolo relativo a questa formula, con la calcolatrice elettrica, richiede poco piú di un minuto.

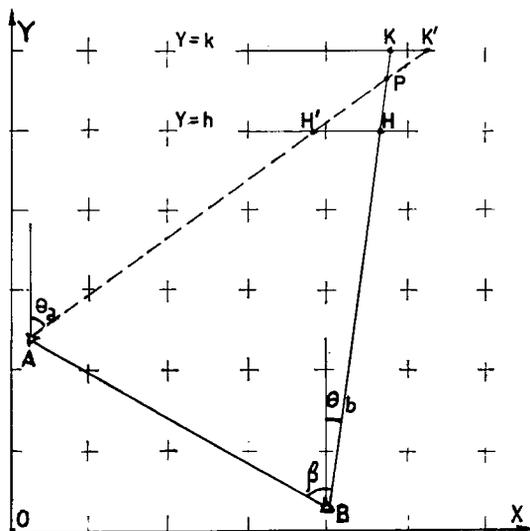


Fig. 1.

5. - *Metodo per direzioni*. Ma non sempre un punto da controllare, che molto spesso viene preso sopra uno spigolo di un fabbricato, si può vedere da due vertici trigonometrici ed allora, rinunciando forzatamente ad una determinazione completa per intersezione, si può verificare se almeno esso risulta sopra la direzione riportata graficamente, corrispondente alla sua misura diretta rispetto ad un'altra fissa. Talora è possibile ottenere un controllo indiretto, se si possono determinare le direzioni a due spigoli dello stesso fabbricato, anche se ognuna di queste è osservata da punti diversi, purché collegati fra loro.

In generale sarà possibile, facendo stazione sopra un vertice trigonometrico, misurare gli angoli, rispetto ad una direzione prefissata, dei punti che si vogliono controllare e verificare se le stesse direzioni, individuate graficamente, passano per i punti corrispondenti sulla carta.

Quest'ultimo procedimento « per direzioni », è stato applicato facendo stazione con un buon tacheometro sopra i vertici della triangolazione base e su qualche altro, determinato appositamente: dopo aver orientato lo strumento sopra una direzione nota, si sono eseguite le letture al cerchio azimutale, relative alle collimazioni ai vari punti presi sopra spigoli di fabbricati, incroci di strade, confini di proprietà e quanto altro poteva essere visibile dalla stazione ed utile al con-

trollo. L'operatore, avendo con sé la mappa ed il goniometro da disegno, ha potuto individuare subito il punto sulla carta e, indicatolo con un numero, ha registrato sul libretto di campagna le misure eseguite, con tutte le annotazioni che sono opportune per l'esecuzione del controllo definitivo a tavolino.

L'applicazione del metodo, nel nostro caso, è stata favorita dall'aver potuto utilizzare vertici molto dominanti, in zone con costruzioni edilizie a carattere generalmente semintensivo ed estensivo, essendo il centro storico della città escluso dal rilievo.

L'impiego di questo procedimento su larga scala non ha escluso naturalmente che, in zone opportunamente scelte, a cavallo di due fotogrammi o dove la planimetria o l'altimetria risultavano più dense di particolari, fossero usati i normali metodi topografici, applicati però con molta cura per raggiungere le precisioni necessarie per un effettivo controllo.

Il procedimento « per direzioni », pur dando luogo ad una verifica parziale relativa agli eventuali errori commessi fuori delle direzioni che passano per il punto da controllare e quello di stazione, quando è applicato per vari punti della stessa zona nella quale, anche se non i medesimi, ma altri sono stati individuati per direzione da altra stazione, riesce a dare una rete di direzioni da centri diversi alla quale difficilmente sfuggono gli errori grossolani.

Anzi, anche nel caso della rilevata presenza di questi ultimi, il reticolato permette di avere un'informazione sulla loro distribuzione che può servire di base all'indagine sulla causa degli stessi.

L'applicazione di questo metodo ha contribuito alla verifica dei punti distribuiti su tutta la mappa da collaudare ed i risultati ottenuti, opportunamente interpretati, hanno consentito, in un certo senso, di collaudare anche lo stesso procedimento in senso favorevole.

6. - Un metodo per tracciare una semiretta BP con buona precisione, essendo B il punto di stazione e P quello da determinare, può essere il seguente (metodo del *punto ausiliario*).

Sfruttando il reticolato della parametratura del foglio di mappa (fig. 2), si scelga su questo una parallela all'asse delle ascisse, $Y = m$ che incontra la BP in un punto ausiliario M a distanza $BM > BP$. L'ascissa di M si avrà dalla formula: $X_m = X_b + (m - Y_b) \tan \Theta$ che, con la macchina, si ricava molto rapidamente. Si noti che il termine $(m - Y_b)$ può rimanere costante per tutti i punti che si individuano da B .

Un altro procedimento, che può essere utile specialmente nel caso che B e P siano su fogli diversi e piuttosto lontani è quello, già descritto (fig. 1), di determinare le ascisse dei punti H ed K in cui BP taglia due parallele all'asse delle ascisse, vicine fra loro e comprendenti il punto P , di equazione $Y = h$ e $Y = k$ e calcolare le ascisse X_h e X_k con formule analoghe di H e di K sulla mappa è facile controllare se la congiungente HK passa per P o di quanto se ne discosta.

Per poter far sí che tutti questi accorgimenti, i quali tendono a diminuire l'errore che si commette nel riporto grafico appoggiandosi ai punti base, non siano frustrati dallo strumento che lo esegue, occorre provvedersi di riga metal-

lica ben rettificata ed armarla di un indice mobile con microscopio di osservazione per stimare le coincidenze o gli intervalli di errore; un tipo fatto costruire per

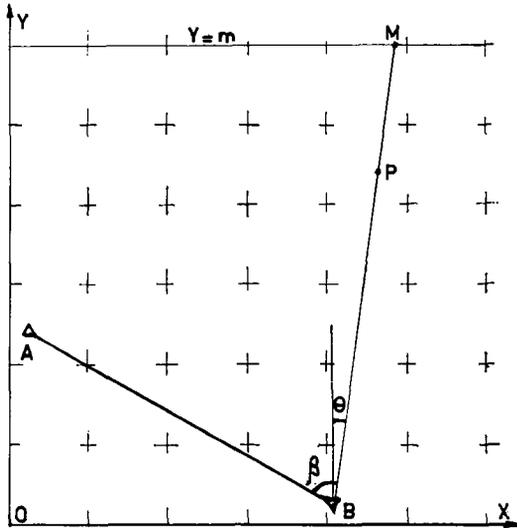


Fig. 2.

applicare ad una riga metallica ha lo schema indicato nella figura 3 e con esso può stimarsi agevolmente il decimo di millimetro: la sua lente di ingrandimento è un comune oculare di un vecchio cannocchiale.

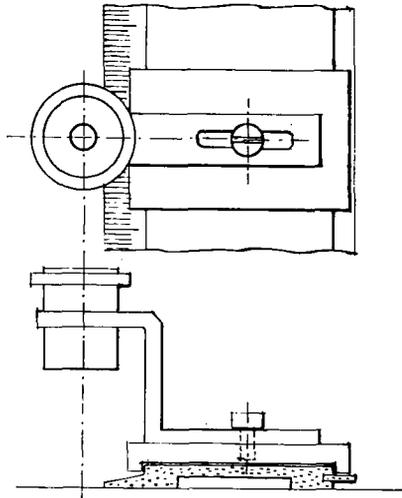


Fig. 3.

7. - Esame sulla attendibilità dei procedimenti per direzioni.

Vediamo ora di esaminare l'influenza delle varie cause di errore nelle operazioni di collaudo con i procedimenti indicati.

L'errore che si commette nel controllare la direzione ad un punto può derivare dalle seguenti cause, oltre ad altre che si ritengono trascurabili.

a) - Errore nella misura dell'angolo azimutale durante l'operazione di controllo.

Ammettendo di commettere l'errore ϵ nella misura dell'angolo, l'errore lineare trasversale e sarà, alla distanza d :

$$e = \epsilon d$$

e nel caso di $\epsilon = 0^{\circ},002$ si ha:

$$e = 3.10^{-5}d$$

e sulla carta in scala 1/2000:

$$e' = 1,5.10^{-8}d$$

ossia, per $d = 1000$ m, $e' = 0,015$ mm

L'errore grafico diventa un decimo di mm solo per una distanza di circa 7 km e quindi trascurabile nei casi che ci interessano.

b) - Errore nel riportare graficamente la direzione.

Supponiamo, in un primo tempo, di poter disporre di un rapportatore avente il raggio uguale alla distanza grafica $d = BP$ del punto P da controllare rispetto alla stazione B . Si tratta di valutare l'errore sull'arco nel riporto di P , potendosi ritenere trascurabile quello che si potrebbe commettere nel far coincidere la direzione zero con quella di riferimento BA , stante la notevole sensibilità che possiede l'occhio per stabilire delle coincidenze. Ritenendo l'errore massimo di stima in 0,2 mm, l'errore grafico per un punto P a distanza grafica d risulta:

$$e = 0,20 \frac{d}{r} \text{ in mm}$$

In questa valutazione si è determinato lo spostamento nel punto P trasversalmente alla direzione. Ammettendo che tale spostamento possa tollerarsi ancora applicando la formula della tolleranza prescritta: $t = 0,5 + 0,05 \sqrt{d}$ in metri, il confronto con gli errori e causati da cattiva stima si ha nella seguente tabella ($r = 20$ cm):

$d = 100$	200	400	600	900	1600	2000 m
$t = 1,00$	1,20	1,50	1,73	2,00	2,5	2,7 m
$e = 0,05$	0,10	0,20	0,30	0,45	0,8	1,0 m

Si può concludere che il procedimento, usando rapportatore con $r = 20$ cm è sicuro fino $d = 400$ m perché la direzione viene individuata con la stessa o maggiore precisione con cui si eseguono gli apprezzamenti grafici nel riporto sulla carta; per distanze superiori la precisione diminuisce con la distanza.

c) - Errore nel riportare graficamente la direzione col metodo del punto ausiliario (v. fig. 2).

Calcolata l'ascissa X_m con la formula già data e riferendosi al reticolato, si individua il punto M con l'approssimazione di 0,2 mm e quindi quella di P risulta non minore di $0,20 BP/BM$ in mm.

Nella nota finale di questo studio è esaminata la precisione dei risultati conseguibili con i metodi di intersezione allo scopo di fornire gli elementi di

confronto secondo le necessità del collaudatore, il quale può aver interesse di conoscere o gli errori massimi o quelli medi cui può dar luogo l'operazione.

Si è trovato che, nel caso dell'*intersezione in avanti*, l'errore *massimo* nella posizione di P risulta il seguente, essendo c la base ed ε l'errore angolare:

$$\begin{aligned} p_1 &= k_1 \varepsilon c, \text{ per } \alpha + \beta \geq 90^\circ \\ p_2 &= k_2 \varepsilon c, \text{ per } \alpha + \beta \leq 90^\circ \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned} \text{per } \alpha = \beta = 15^\circ, & \quad k_2 = 2 \\ \alpha = \beta = 30^\circ, & \quad k_2 = 2 / \sqrt{3} \\ \alpha = \beta = 45^\circ, & \quad k_2 = k_1 = 1 \\ \alpha = \beta = 60^\circ, & \quad k_1 = 2 \\ \alpha = \beta = 75^\circ, & \quad k_1 = 7,5 \end{aligned}$$

L'errore *medio* è dato ancora da:

$$m_p = k \varepsilon c$$

ed ha il suo valore max per $\alpha = \beta$.

$$\begin{aligned} \text{Per } \alpha = \beta = 30^\circ, & \quad k = 0,943 \\ \alpha = \beta = 35^\circ 16', & \quad k = 0,785 \text{ (minimo)} \\ \alpha = \beta = 45^\circ, & \quad k = 1 \\ \alpha = \beta = 60^\circ, & \quad k = 1,6 \\ \alpha = \beta = 75^\circ, & \quad k = 5,5 \end{aligned}$$

Per $\varepsilon = 0,002^s = 3.10^{-5}$ rad e $c = 1000$ m, si ha $\varepsilon c = 3.10^{-2}$ m.

Nel riporto grafico dell'angolo con goniometro di raggio r , se e è l'errore di apprezzamento su questo, si ha un errore grafico nella posizione di P data da

$$p = kec/r$$

Nel caso dell'*intersezione di due allineamenti* (di cui nessuno parallelo all'asse delle ascisse) definiti per mezzo delle ascisse dei loro estremi sopra due parallele all'asse delle ascisse, si ha l'errore *massimo* s in P corrispondente ad errori e in ciascuno degli estremi degli allineamenti

$$s = k_s e$$

dove k_s assume valori diversi in funzione degli angoli α e β che gli allineamenti formano con l'asse delle ascisse; il suo valore massimo si ha per $\alpha = \beta$ ed è:

$$k_s = \tan x \quad \text{ossia } k_s = k_1 \sin \alpha + \beta.$$

$$\begin{aligned} \text{Per } \alpha + \beta = 45^\circ, \quad k_s &= 1 \\ \alpha = \beta = 60^\circ, \quad k_s &= \sqrt{3} \\ \alpha = \beta = 75^\circ, \quad k_s &= 3,7 \end{aligned}$$

L'errore *medio*, invece, è dato da

$$m_s = k_m e$$

dove k_m è max per $\alpha = \beta$ ed assume i valori seguenti:

$$\begin{aligned} \text{per } \alpha = \beta = 45^\circ, \quad k_m &= 1 \\ \alpha = \beta = 60^\circ, \quad k_m &= \sqrt{2} \\ \alpha = \beta = 75^\circ, \quad k_m &= 2,7 \end{aligned}$$

NOTA SULLA PRECISIONE DEI METODI DI INTERSEZIONE

Intersezione in avanti

a) *Errore massimo per variazione di un angolo.*

Per esaminare l'influenza dell'errore che si può commettere sul terreno nelle misure angolari in una determinazione per intersezione in avanti, si consideri il triangolo ABP (fig. 4) i cui vertici A e B sono quelli di stazione, noti, e P il punto da determinare.

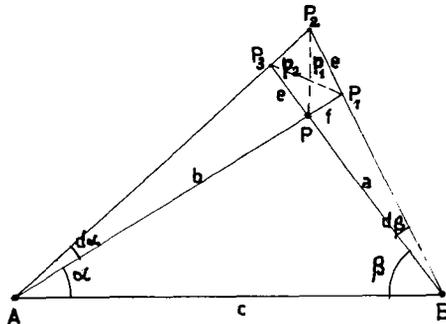


Fig. 4.

Per effetto di una piccola variazione $d\alpha$ dell'angolo in A si ha uno spostamento di P pari a $da = e$ che si ricava facilmente differenziando rispetto ad α la formula $a = c \sin \alpha / \sin (\alpha + \beta)$, ritenendo c costante.

Posto $d\alpha = \varepsilon$, si ha:

$$da = \varepsilon c \frac{\sin \beta}{\sin^2 (\alpha + \beta)} = \varepsilon \frac{b}{\sin (\alpha + \beta)}$$

Per esaminare ora le variazioni di da al variare di α e β e trovarne i valori massimi, si nota subito che il rapporto ha per massimo l'infinito (quando $\alpha + \beta = 180^\circ$). Ma nella pratica $\alpha + \beta$ è sempre minore di 180° e limitandolo a 150° si avrà il massimo valore di da per $\beta = 90^\circ$ e $\alpha = 60^\circ$ per i quali valori si ottiene

$$e = da = 4 \varepsilon c$$

Ammettendo che l'angolo β sia misurato con l'approssimazione di $0,002^g = 3.10^{-5}$ rad, si ha:

$$e = 0,00012 c$$

Per $c = 1000$ m si ha $e = 0,12$ m che è un valore trascurabile corrispondendo sulla carta a $0,06$ mm.

b) *Errore massimo per variazione di due angoli.*

Per effetto di piccole variazioni $d\alpha$ e $d\beta$ degli angoli α e β dovuti agli errori di misura (c si ritiene esatto), il vertice P si sposta e l'errore massimo può essere valutato dalla maggiore delle due diagonali del quadrilatero $PP_1 P_2 P_3$ (fig. 4) che, per le nostre ricerche, può ritenersi un parallelogramma di lati e ed f pari agli errori nei lati a e b conseguenti agli errori $d\alpha$ e $d\beta$.

Essendo: $P_3 PP_1 = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, $PP_1 P_2 = \alpha + \beta + d\beta$ e $\cos(\alpha + \beta + d\beta) \cong \cos(\alpha + \beta)$, si ha:

$$p_1^2 = PP_2^2 = e^2 + f^2 - 2ef \cos(\alpha + \beta), \quad \text{per } \alpha + \beta \geq 90^\circ$$

$$p_2^2 = P_1 P_3^2 = e^2 + f^2 + 2ef \cos(\alpha + \beta), \quad \text{per } \alpha + \beta \leq 90^\circ$$

Esprimendo $da = e$ e $db = f$ come si è fatto sopra, si ricava:

$$e = \frac{c \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}^2(\alpha + \beta)} d\alpha, \quad f = \frac{c \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}^2(\alpha + \beta)} d\beta$$

per cui, posto $d\alpha = d\beta = \varepsilon$ e semplificando, si ricava:

$$p_1^2 = c e \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta - 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}^4(\alpha + \beta)}, \quad \text{per } \alpha + \beta \geq 90^\circ$$

$$p_2^2 = c e \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta + 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}^4(\alpha + \beta)}, \quad \text{per } \alpha + \beta \leq 90^\circ$$

Quest'ultima si può ridurre, con opportune trasformazioni, a:

$$p_2^2 = \frac{c^2 \varepsilon^2}{\text{sen}^2(\alpha + \beta)}$$

Posto: $k_1 = \frac{\sqrt{\text{sen}^2 \alpha + \text{sen}^2 \beta - 2 \text{sen} \alpha \text{sen} \beta \cos(\alpha + \beta)}}{\text{sen}^2(\alpha + \beta)}$

e $k_2 = \frac{1}{\text{sen}(\alpha + \beta)}$

si hanno gli errori massimi per k_1 e k_2 massimi dalle:

$$p_1 = \pm k_1 \varepsilon c, \quad \text{per } \alpha + \beta \geq 90^\circ$$

$$p_2 = \pm k_2 \varepsilon c, \quad \text{per } \alpha + \beta \leq 90^\circ$$

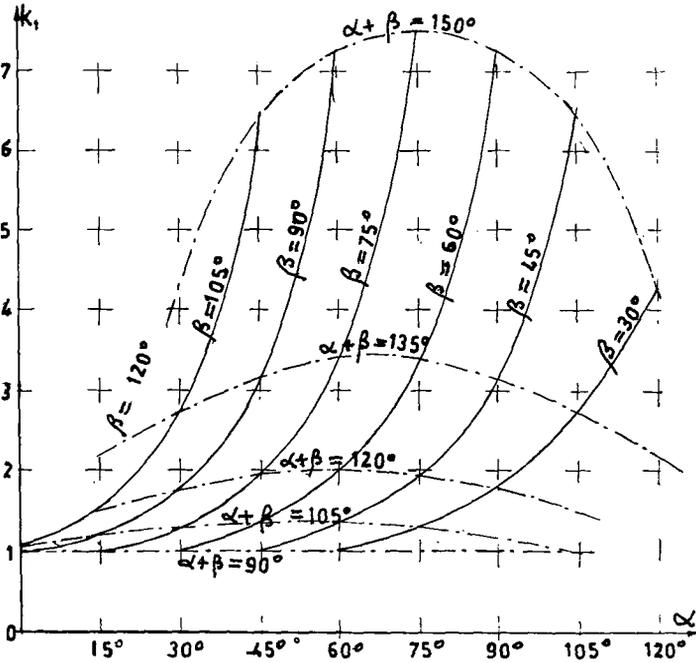


Fig. 5.

Il massimo valore di k_1 si ha per $\alpha + \beta = 180^\circ$ che non corrisponde evidentemente ad un caso pratico. Posto $\alpha + \beta = \lambda < 180^\circ$ ed osservando che k_1 non muta scambiando α con β , si trova il massimo di k_1 per $\alpha = \beta = \frac{1}{2} \lambda$ ossia:

$$\max k_1 = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{1}{2} \lambda}$$

Nel diagramma (fig. 5) sono riportate le variazioni di k_1 al variare di α e β ; come si vede, i vari valori massimi di k_1 per un dato $\alpha + \beta = \lambda$ si hanno per $\alpha = \beta = \frac{1}{2} \lambda$.

c) *Errore medio per variazione di due angoli.*

Fissato un sistema di assi cartesiani con l'origine in A , l'asse delle ascisse lungo AB , positivo verso B e l'asse delle Y positivo dalla parte di P , si ha:

$$\begin{aligned} x_p &= b \cos \alpha \\ y_p &= b \sin \alpha \end{aligned}$$

L'errore medio m_p nella posizione di P può essere espresso da:

$$m_p^2 = m_x^2 + m_y^2.$$

Ma:

$$\begin{aligned} m_x^2 &= m_b^2 \cos^2 \alpha + m_\alpha^2 b^2 \sin^2 \alpha \\ m_y^2 &= m_b^2 \sin^2 \alpha + m_\alpha^2 b^2 \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

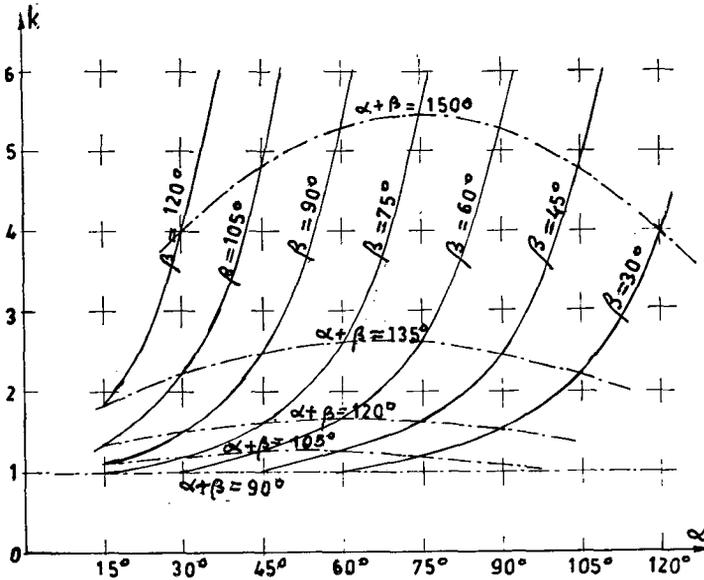


Fig. 6.

da cui:

$$m_p^2 = m_b^2 + b^2 m_\alpha^2$$

Ma $b = \frac{c \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$ e, per c costante, essendo:

$$\frac{db}{d\alpha} = - \frac{c \operatorname{sen} \beta \cos(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}^2(\alpha + \beta)}, \quad \frac{db}{d\beta} = - \frac{c \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}^2(\alpha + \beta)}$$

si ha, ponendo $m_a = m_b$:

$$m_b^2 = c^2 \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta \cos^2(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}^4(\alpha + \beta)} m_\alpha^2$$

Sostituendo nell'espressione precedente di m_p si ricava:

$$m_p = \pm c \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta}}{\operatorname{sen}^2(\alpha + \beta)} m_\alpha$$

Il massimo valore di $k = \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta}}{\operatorname{sen}^2(\alpha + \beta)}$

si ha per $\alpha + \beta = 180^\circ$ che non corrisponde ad un caso pratico.

Per $\alpha + \beta = \lambda < 180^\circ$ si ha il massimo per $\alpha = \beta = \frac{1}{2} \lambda$, ossia:

$$\max k = \frac{\sqrt{2} \operatorname{sen} \frac{1}{2} \lambda}{\operatorname{sen}^2 \lambda}$$

Nel diagramma (fig. 6) sono riportate le variazioni di k .

Per $\alpha = \beta = 75^\circ$ si ha $k = 5,46$, ossia $m_p = \pm 5,46 c m_\alpha$
 per $\alpha = \beta = 60^\circ$ si ha $k = 1,63$, ossia $m_p = \pm 1,63 c m_\alpha$

Intersezione di due segmenti

a) *Errore massimo per variazione degli estremi.*

Quando si esegue la determinazione grafica del punto d'incontro P di due segmenti AC e BD (fig. 7) di cui si sono individuati gli estremi A, B, C, D sopra due parallele per mezzo delle loro ascisse calcolate (che riteniamo prive di errore) si commettono errori di riporto grafico di queste dai quali dipende la posizione del punto P . Vogliamo calcolare lo spostamento di P in conseguenza degli errori citati; esso potrà avvenire evidentemente entro il parallelogramma formato dalle

parallele ad AC e BD , da una parte e dall'altra di queste, che incontrano AB e CD a distanza e da una parte e dall'altra. Lo spostamento massimo di P sarà dato dalla maggiore delle semidiagonali $PP' = s$ del parallelogramma, se $\alpha + \beta > 90^\circ$, e

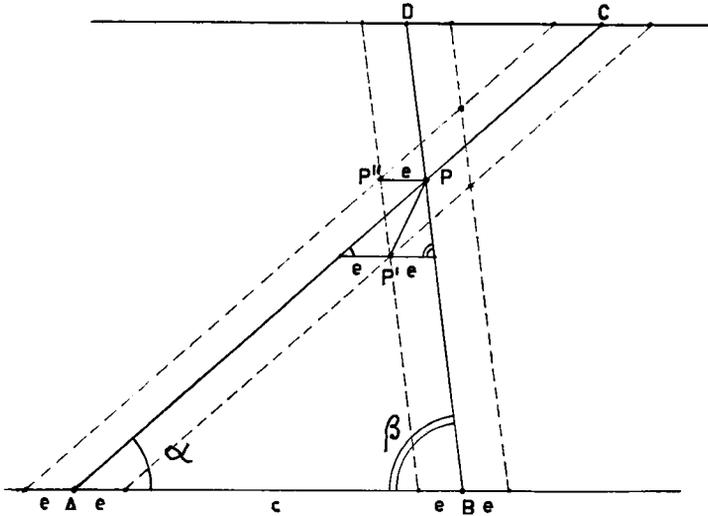


Fig. 7.

questa risulta la mediana di un triangolo avente per lato relativo il segmento $2e$ e gli angoli su questo pari ad α e β .

Si avrà, se $\alpha + \beta > 90^\circ$:
$$s^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - e^2$$

ed essendo
$$a = \frac{2e \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \quad e \quad b = \frac{2e \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$$

si ricava:
$$s = \pm e \sqrt{\frac{2(\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta)}{\operatorname{sen}^2(\alpha + \beta)} - 1}$$

Il suo valore massimo si avrà per $\alpha = \beta$:

$$\max s = \pm e \tan \alpha$$

Per $\alpha + \beta = 90^\circ$:

$$s = \pm e$$

Per $\alpha + \beta < 90^\circ$ lo spostamento s nella direzione PP' diventa minore di e mentre lo spostamento PP'' risulta sempre uguale ad e .

b) *Errore medio per variazione degli estremi.*

Applicando lo stesso criterio usato nell'intersezione in avanti si ha, per una variazione m_c di c nell'estremo A :

$$m_b^2 = m_c^2 \frac{\text{sen}^2 \beta}{\text{sen}^2 (\alpha + \beta)}$$

e per un'identica variazione nell'estremo B :

$$m_a^2 = m_c^2 \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\text{sen}^2 (\alpha + \beta)}$$

L'errore quadratico medio m_p potrà quindi ricavarsi da:

$$m_p = \pm m_c \frac{\sqrt{\text{sen}^2 \alpha + \text{sen}^2 \beta}}{\text{sen} (\alpha + \beta)}$$

Il massimo si avrà per $\alpha = \beta$ ed avrà il valore:

$$\max m_p = \pm \frac{\sqrt{2}}{2 \cos \alpha} m_c$$

Per $\alpha = 60^\circ$, $\max m_p = \pm \sqrt{2} m_c$.

