RAGIONAMENTI FOTOGRAMMETRICI

VI. IL NUMERO DEI PARAMETRI PER L'ORIENTAMENTO ASSOLUTO DEL MODELLO DEL TERRENO

Prof. UGO BARTORELLI

Nel quinto nostro ragionamento, sempre considerando le stelle proiettanti come puri enti geometrici, e senza fare alcun ricorso alla loro realizzazione strumentale, siamo giunti a dedurre che è possibile la ricostruzione del *modello* della zona di terreno comune ai due fotogrammi di uno stereogramma utilizzando soltanto *cinque* dei dodici gradi di libertà, in totale, dei due fotogrammi; agendo cioè a cinque soli parametri.

Il modello del terreno — ricordiamolo — è costituito dall'insieme dei punti nei quali si intersecano le coppie di raggi omologhi delle due stelle; è geometricamente simile al terreno e ne dà quindi la *forma*.

Ma compito della fotogrammetria è tuttavia quello di ripristinare l'oggetto fotografato anche nelle sue *dimensioni*; a questo proposito abbiamo già notato che *traslando* una delle due stelle, in modo che il suo centro rimanga sulla congiungente i due centri delle stelle (vedasi la figura del IV ragionamento), si può variare con continuità la grandezza del modello — senza distruggerlo, ossia conservando la complanarità dei raggi omologhi — fino a fargli raggiungere una qualsiasi dimensione assegnata, in particolare quella vera del terreno, che è ottenuta quando la distanza $O_1 O_2$ è uguale a quella della effettiva base *b* di presa, oppure quando il segmento che ha per estremi due punti qualsiasi del modello è uguale al segmento corrispondente sul terreno. Ovviamente in questa operazione di *dimensionamento* il modello invece che alla grandezza vera del terreno può essere portato ad una dimensione che sia in un determinato rapporto di *scala* rispetto al terreno; ma nel seguito della nostra esposizione di carattere teorico supporremo di avere proprio dimensionato il modello alla grandezza *vera* del terreno.

In questa operazione di dimensionamento è necessario fare ricorso ad un solo parametro (in piú di quelli già utilizzati), ad uno solo cioè dei dodici gradi di libertà disponibili. Veramente per traslare ad esempio la stella O_2 in O'_2, lungo la retta $O_1 O_2$ è necessario agire a tutte e tre le traslazioni del fotogramma O_2 secondo X, Y e Z (figura 1); potrebbe sembrare quindi che i parametri impegnati nel dimensionamento dovessero essere tre; ma se si pensa che due di questi parametri sono già stati utilizzati per ottenere l'orientamento relativo dei fotogrammi (che supponiamo realizzato, come è stato detto nel terz'ultimo capoverso del V ragionamento, mediante due traslazioni e le tre rotazioni della stella O_2) il nuovo parametro da utilizzare risulta uno solo, la terza traslazione; del resto le altre due traslazioni vengono utilizzate per mantenere il centro O_2 sulla retta della direzione primitiva $O_1 O_2$, proprio al fine di non distruggere l'orientamento relativo. In sostanza le tre traslazioni ΔX, ΔY, ΔZ indotte alla stella O_2 devono essere tali da mantenere inalterato il rapporto di due delle componenti della base $O_1 O_2$

rispetto alla terza; da ciò risulta che il dimensionamento consiste semplicemente in una trasformazione simile dello spazio (che lascia inalterati gli angoli), per il che basta appunto la variazione di un solo parametro: il rapporto di similitudine.

Ciò posto, possiamo affermare che per formare il modello e dimensionarlo è sufficiente fare ricorso a *sei* parametri soltanto. Al sistema delle due stelle restano ancora disponibili, quindi, sei dei dodici gradi di libertà.

Ma compito della fotogrammetria è anche quello di ripristinare il modello nel suo assetto angolare rispetto alla *terna di assi* X, Y, Z, preordinata, solidale al terreno (vedasi la figura del IV ragionamento), il cui asse Z è nella direzione della verticale della zona fotografata (che supporremo cosí poco estesa da potere consi-

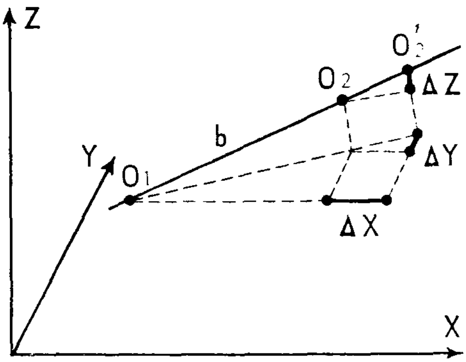

Fig. 1

derare parallele le verticali di tutti i suoi punti), l'asse X normale a quello Z in direzione assegnata, l'asse Y normale ai due precedenti, e l'origine in un punto pure assegnato.

Invece il modello dimensionato, ottenuto mediante solo sei dei dodici parametri disponibili, risulta orientato in un assetto qualsiasi rispetto a detta terna di assi, proprio a causa della maniera in cui l'abbiamo formato e dimensionato.

Siccome scopo ultimo delle nostre operazioni è quello di rilevare topograficamente, di « restituire » il modello, è molto importante orientare innanzitutto il modello in modo che la direzione della verticale, virtualmente contenuta nel modello stesso perché implicitamente vincolata ai suoi punti, sia parallela all'asse Z del rilevamento, dianzi definito; infatti solo se è soddisfatta questa condizione potremo rilevare *la planimetria* del modello e valutare i *dislivelli* fra i punti del modello, come sul terreno. Per meglio spiegarci supponiamo che nel modello esista un altissimo campanile con gli spigoli *v* che sul terreno siano veramente verticali; nel modello dimensionato, appena realizzato agendo a solo sei parametri, questi spigoli *v* formeranno in generale un angolo qualsiasi $\Delta\nu$ con l'asse Z del rilevamento (figura 2); avremo quindi bisogno di variare la posizione e, piú precisamente, l'assetto angolare del modello in modo da rendere gli spigoli *v paralleli* all'asse Z (o, ciò che è lo stesso, da rendere la superficie di un ipotetico laghetto L contenuto nel modello, parallela al piano orizzontale XY).

Per ottenere tale parallelismo dovremo quindi ruotare il modello dell'angolo $\Delta\nu$ *nella giacitura delle direzioni* di v, quale è sul modello, e di Z, quale è sul terreno. È questa l'operazione che viene detta *orizzontamento del modello,* proprio perché con essa un qualsiasi piano orizzontale implicitamente contenuto nel modello (si pensi ad esempio al laghetto suddetto) viene reso parallelo al piano orizzontale degli assi X, Y del rilevamento.

Ruotare il modello significa evidentemente ruotare tutto l'insieme delle due stelle proiettanti, considerate ormai come un unico insieme *rigido, solidale* al modello

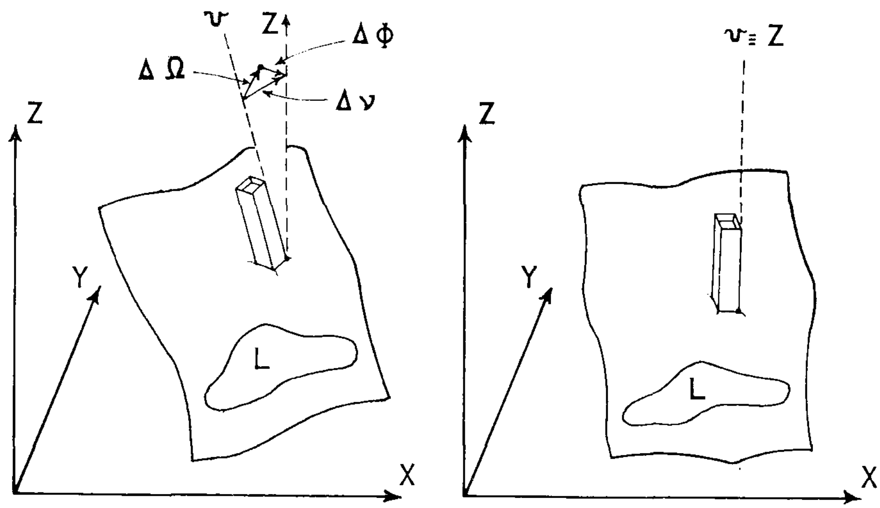

Fig. 2

stesso da loro generato; infatti le rotazioni, sia pure uguali, di ogni stella per suo conto distruggerebbero in generale il modello, ossia l'orientamento relativo già conseguito, a meno di non fare ricorso ad opportune variazioni delle traslazioni dei fotogrammi per mantenerlo inalterato. Non soffermiamoci su questa ultima affermazione che invero, al punto in cui siamo, con il nostro ragionare, può sembrare un po' oscura (in proposito sarebbe desiderabile che chi segue questa rubrica facesse pervenire al Bollettino contezza di ciò, affinché chi scrive sapesse se valga la pena continuare i suoi ragionamenti), ma proponiamoci piuttosto di realizzare *l'orizzontamento* del modello attuando la rotazione di questo solidalmente con i due fotogrammi.

Quanti sono i gradi di libertà di tutto il sistema, ai quali bisogna fare ricorso per ottenere tale rotazione? Sono soltanto *due*; sappiamo infatti che per definire una direzione nello spazio (che nell'esempio portato è la direzione degli spigoli v) è necessario e sufficiente assegnare *due* dei tre coseni direttori della direzione rispetto alla terna di assi. Nel nostro caso i due gradi di libertà consistono nelle due componenti, che chiameremo $\Delta\Omega$ e $\Delta\Phi$ secondo le quali può essere scomposta la rotazione $\Delta\nu$ intorno a due dei tre assi ai quali abbiamo riferito i fotogrammi per ottenerne l'orientamento relativo.

È ovvio che per conoscere l'angolo $\Delta\nu$, e la giacitura $\Delta\nu Z$, in cui deve essere considerato, non si ricorre davvero agli spigoli del campanile o alla superficie di un laghetto, citati solo a scopo dimostrativo; in pratica tale angolo sarà determinabile con assai maggior precisione quando si conoscano due dislivelli fra punti del terreno, riconoscibili sul modello, ossia quando siano note le quote relative ΔH_1 e ΔH_2 di due punti qualsiasi, P_1, P_2 rispetto ad un terzo punto P_0 (figura 3).

Infatti soltanto quando la verticale, implicitamente contenuta nel modello, risulterà parallela all'asse Z del rilevamento, i dislivelli ΔH_1 e ΔH_2 potranno essere misurati nei loro veri valori, e, di conseguenza, le distanze orizzontali fra i punti del modello saranno uguali a quelle fra i corrispondenti punti del terreno.

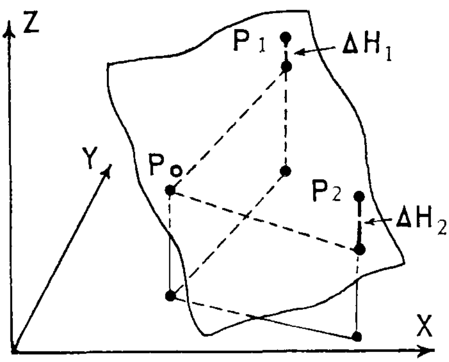

Fig. 3

Tornando all'avere computato in due soltanto i parametri necessari e sufficienti per l'orizzontamento del modello, si potrebbe obbiettare che, in realtà, la rotazione del modello, solidale alle due stelle proiettanti, che può avvenire intorno ad un centro qualsiasi, comporta generalmente la variazione di tutti e dodici i parametri, fra rotazioni e traslazioni, che definiscono l'orientamento assoluto dei due fotogrammi nello spazio. Per rendersi conto che, invece, i gradi di libertà tolti al sistema, dopo l'orizzontamento, sono soltanto due, si pensi di indurre le suddette rotazioni $\Delta\Omega$ e $\Delta\Phi$, componenti di $\Delta\nu$, necessarie ad orizzontare il modello, solo ad uno dei due fotogrammi; e poi, siccome con ciò il modello risulterà distrutto, di ricostruire l'orientamento relativo agendo a cinque dei gradi di libertà dell'altro fotogramma, ed infine all'altro necessario al dimensionamento. Alla fine di queste operazioni il modello risulterà orizzontato perché avendo dato ad un fotogramma la rotazione $\Delta\nu$, anche l'altro, dopo il nuovo orientamento relativo, l'avrà subita.

Fatti i conti, sono quindi proprio *otto*, in totale, i gradi di libertà sottratti al sistema per ottenere il *modello formato, dimensionato e orizzontato.*

A questo punto si potrebbe asserire che il nostro compito è terminato; infatti un modello siffatto può essere rilevato planimetricamente e altimetricamente in quanto è possibile, come abbiamo constatato, misurare su di esso i dislivelli nel loro vero valore o ad una assegnata scala e di conseguenza anche le distanze orizzontali.

Ed infatti nel pratico impiego degli strumenti restitutori, capaci di realizzare le operazioni che noi abbiamo invece considerato soltanto nella loro essenza geometrica, con la determinazione di otto dei dodici parametri disponibili il problema della ricerca dell'orientamento assoluto dello stereogramma si può dire risolto, avendo conseguito il modello dimensionato e orizzontato.

Potrebbe sembrare quindi che quattro dei dodici gradi di libertà del sistema siano sovrabbondanti; il che evidentemente non può essere. Ed invero il modello ottenuto, pur essendo già in condizioni di essere « restituito », non ha assunto ancora la posizione originaria rispetto alla terna di assi X, Y, Z del rilevamento, il che, in teoria, è invece necessario per affermare che il problema fotogrammetrico è stato compiutamente risolto. Il modello in effetti è stato ricostruito, ed anche alla vera grandezza del terreno come abbiamo supposto, ed in modo che la direzione della sua verticale v, in esso implicitamente contenuta, risultasse parallela all'asse Z del rilevamento, ma abbiamo realizzato ciò in una regione qualsiasi dello spazio. In realtà la direzione dell'asse X, anch'essa implicitamente contenuta nel modello perché vincolata ai suoi punti, si troverà disorientata, rispetto all'asse X del terreno, di un angolo qualsiasi ΔK; e quindi di un uguale angolo la corrispondente direzione dell'asse Y sul modello rispetto all'asse Y del terreno.

Pertanto se vorremo che tutte e tre le direzioni X, Y, Z vincolate al modello risultino parallele a quelle degli assi corrispondenti del rilevamento, avremo bisogno di ruotare il modello, e quindi il sistema rigido delle due stelle, dell'angolo ΔK intorno alla direzione dell'asse Z. Ciò toglie al sistema *un solo* grado di libertà come è facile dedurre con ragionamenti analoghi a quelli sulle due rotazioni che hanno condotto all'orizzontamento.

Sottratto quindi al sistema un altro grado di libertà, ne restano ancora tre disponibili; ed invero ne abbiamo bisogno perché a questo punto il modello è formato, dimensionato alla vera grandezza, orizzontato, e orientato anche per quanto riguarda gli assi X e Y, cosicché qualsiasi segmento avente per estremi due punti del modello stesso è equipollente al corrispondente del terreno; però esso si trova ancora in una regione dello spazio diversa da quella originaria della presa. Se vogliamo quindi esaurire il nostro problema dovremo portare il modello addirittura a coincidere con il terreno di cui è la copia; ciò può essere conseguito ormai, manifestamente, con una traslazione del modello, le cui tre componenti sulla terna del rilevamento rappresentano gli ultimi tre gradi di libertà da utilizzare. In altre parole dovremo indurre al modello le traslazioni ΔX_0, ΔY_0, ΔZ_0 capaci di fare assumere ad un punto del modello le sue vere coordinate sul terreno; consiste in ciò la cosiddetta « imposizione delle coordinate » ad un punto, con il che tutti i punti del modello assumeranno le loro coordinate vere rispetto alla terna del rilevamento.

Ripetiamo che nel pratico impiego degli apparati restitutori, l'utilizzazione di questi ultimi quattro parametri comporta operazioni di scarso rilievo; tenendo presente che in essi il modello è realizzato non alla vera grandezza, naturalmente, ma ad una scala di riduzione, virtualmente tale utilizzazione viene conseguita, in generale, soltanto *imponendo la quota* assoluta, nota, ad un punto del modello (un parametro) alla scala del modello, *ubicando planimetricamente* su un punto noto (due parametri) il foglio destinato a raccogliere la restituzione, sul quale è tracciato il reticolato X, Y di riferimento del rilevamento, ed infine *orientando* (un parametro) detto foglio rispetto al modello con l'ausilio di un secondo punto noto.

Tornando al computo dei parametri che ci hanno consentito di risolvere compiutamente il problema fotogrammetrico, è importante notare che per *l'orientamento relativo* vengono sottratti al sistema soltanto *cinque* gradi di libertà, per il che è necessario e sufficiente fare ricorso alla complanarità di *cinque* coppie di raggi omologhi delle due stelle.

Per l'*orientamento assoluto* del modello vengono tolti al sistema tutti i rimanenti *sette* gradi di libertà, per il che è necessario e sufficiente fare ricorso alla conoscenza delle coordinate di due punti del terreno (in totale sei dati) che consentono il dimensionamento, l'orientamento planimetrico e la conoscenza di uno dei due dislivelli noti necessari all'orizzontamento, e alla conoscenza della quota di un terzo punto del terreno (un solo dato) che fornisce il secondo dislivello noto. I dati necessari e sufficienti per l'orientamento assoluto risultano quindi in totale *sette*, anche in questo caso quanti i gradi di libertà da sottrarre al sistema. In pratica ovviamente si utilizza un maggior numero di dati, costituiti da piú punti del terreno noti nelle loro tre coordinate o solo in quota.

Altra osservazione importante è quella di considerare che mentre l'orientamento relativo è conseguito date che siano le due stelle proiettanti, ossia noto che sia l'*orientamento interno* della presa, senza far ricorso ad alcun elemento che non sia intrinseco dei soli fotogrammi, per l'*orientamento assoluto* è necessario invece fare ricorso a dati *esterni* alla presa, a punti di posizione nota sul terreno, che vengono a costituire il vincolo fra la presa, il terreno e la terna di assi del rilevamento.

Concludendo possiamo asserire di avere posto il problema della ricerca dell'orientamento assoluto di un modello fotogrammetrico nel suo aspetto essenziale, che è quello proiettivo, e di averlo posto indipendentemente dalla conoscenza delle realizzazioni strumentali che lo possono realizzare.

Anche in questo caso il numero dei parametri da determinare uguaglia, come abbiamo constatato, il numero dei dati da utilizzare, il che è prova della correttezza del nostro ragionare.