

# COMPENSAZIONE DELLE POLIGONALI GEODETICHE NELLA PROIEZIONE CONFORME DI GAUSS

Comunicazione presentata al XII C.N. S.I.F.E.T. - Viterbo, 26-29 ott. 1967

*Antonio Dragonetti*

Professore ordinario nell'Istituto Tecnico Statale « C. Cattaneo » di Milano

*Riassunto.* Si analizzano le poligonali geodetiche con lati di parecchi chilometri, oggi molto diffuse per la loro utilità e convenienza economica rispetto alle triangolazioni secondarie. Si dimostra come ad esse si possano applicare i metodi di compensazione delle poligonali normali topografiche, se si calcolano le coordinate nella proiezione conforme di Gauss.

## 1. — *Premessa.*

E' noto che le poligonali normali hanno una lunghezza complessiva di alcuni chilometri e che ciascun lato al massimo raggiunge una lunghezza di alcune centinaia di metri. E' pure noto che la misura dei lati di tali poligonali si fa con metodi diretti (triplo metri, nastri d'acciaio) o indiretti (stadia verticale od orizzontale), e che la misura degli angoli si esegue con buoni tacheometri, come sono la maggior parte dei tacheometri moderni. Poichè si è nel campo topografico, cioè si assume come superficie di riferimento un piano orizzontale, dei vertici delle poligonali si calcolano le coordinate cartesiane ortogonali rispetto ad un opportuno sistema di assi, facendo precedere i calcoli da una eventuale compensazione empirica o rigorosa.

Non è da molto che gli apparati elettronici nella misura delle distanze (geodimetro, tellurometro, ecc.) hanno consentito di estendere il campo di applicazione delle poligonali, che sono diventate più lunghe ed hanno quasi soppiantato le triangolazioni secondarie per la loro grande utilità e convenienza economica. La rivalutazione delle poligonali nei lavori geodetici e topografici è arrivata a tal punto, che attualmente si nota la tendenza a sostituire con le poligonali non solo le triangolazioni secondarie, ma addirittura quelle principali. Oggi con facilità, mediante gli apparati elettronici, si possono misurare distanze fino a 50÷60 Km. Di conseguenza le poligonali possono avere lunghezze di parecchie decine di chilometri con lati pure di parecchi chilometri, e non è più possibile considerare queste nel campo topografico, ma in quello geodetico più vasto. Per quanto riguarda la misura degli angoli occorre usare un teodolite, non essendo più sufficiente il tacheometro. Nasce quindi il problema di come trattare agli effetti dei calcoli tali poligonali, che si possono chiamare geodetiche per distinguerle da quelle topografiche più corte.

Se una poligonale geodetica congiunge due vertici trigonometrici, cioè risulta vincolata, si dovrebbero calcolare dei vertici della poligonale le coordinate geografiche e non più quelle cartesiane ortogonali. Ma, far precedere i calcoli da una compensazione, sarebbe difficile a causa delle complesse formule di geodesia per il trasporto delle coordinate geografiche. Tuttavia, se dei vertici trigonometrici si conoscono le coordinate piane gaussiane nella proiezione conforme di Gauss, allora il problema si riduce a quello delle coordinate cartesiane e non esiste più alcuna differenza di calcolo fra le poligonali geodetiche e quelle topografiche, comprese le compensazioni con i noti procedimenti. Naturalmente occorre tener conto che le misure si eseguono sul terreno, cioè sull'ellissoide, mentre i calcoli si fanno sulla superficie deformata della proiezione conforme. Occorre cioè apportare agli angoli ed ai lati, misurati sul terreno, opportune correzioni in modo da avere le stesse misure che si sarebbero fatte nel piano gaussiano.

L'utilità di questo procedimento è notevole, tenuto conto che la rappresentazione conforme di Gauss, con riferimento all'ellissoide internazionale di

Hayford, è adottata in Italia non solo dall'I.G.M., ma anche dal Catasto e da tutte le ditte private che fanno lavori topografici e fotogrammetrici. Si tenga presente inoltre che la proiezione conforme di Gauss è stata inserita in quella più vasta proiezione conforme di Gauss «Universale Trasversa di Mercatore (U.T.M.)», adottata attualmente da numerosi Stati Europei e dagli Stati Uniti d'America.

Note le coordinate piane gaussiane, è possibile passare facilmente a quelle geografiche ed a tutti quegli elementi sull'ellissoide, che si desiderano ottenere. La determinazione poi delle quote dei vertici delle poligonali si farà, come è noto, con livellazioni trigonometriche.

2. — *Applicazione e discussione delle formule di passaggio dagli elementi misurati a quelli gaussiani.*

Occorre premettere alcune considerazioni sulle misure dei lati e degli angoli delle poligonali geodetiche. Sul terreno si misurano angoli fra sezioni normali ed archi di sezioni normali, che nel campo di Weingarten si possono ritenere uguali agli angoli ed agli archi delle geodetiche sull'ellissoide. Poiché la proiezione di Gauss è conforme, gli angoli fra due geodetiche, che partono da un punto dell'ellissoide, sono uguali a quelli fra le corrispondenti trasformate nella proiezione gaussiana, che si dipartono dallo stesso punto. Non è così per le lunghezze degli archi di geodetiche e delle relative trasformate, essendo queste ultime deformate rispetto alle prime. Inoltre nel piano gaussiano agli angoli fra le trasformate si sostituiscono quelli fra le corde, che congiungono gli stessi estremi. Si tratta di vedere quindi le formule di passaggio degli elementi

misurati a quelli gaussiani, studiate dal Prof. Boaga e pubblicate nei testi tecnici dell'I.G.M. [1].

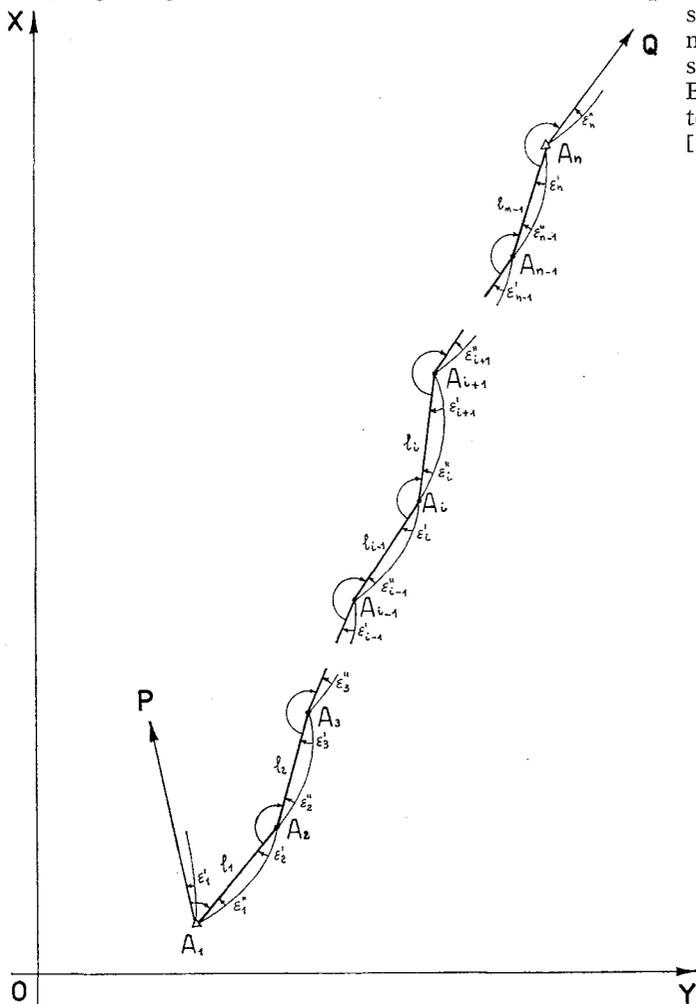


fig.1

A questo scopo si consideri, come esempio, una poligonale aperta vincolata P, A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, A<sub>3</sub>, ..., A<sub>i-1</sub>, A<sub>i+1</sub>, ..., A<sub>n-1</sub>, A<sub>n</sub>, Q e sviluppata nel piano gaussiano di un determinato fuso dell'ellissoide (v. fig. 1). Siano P, A<sub>1</sub>, A<sub>n</sub>, Q i vertici trigonometrici, dei quali si conoscano le coordinate piane gaussiane; A<sub>2</sub>, A<sub>3</sub>, ..., A<sub>i-1</sub>, A<sub>i</sub>, A<sub>i+1</sub>, ..., A<sub>n-1</sub> i vertici, dei quali si vogliono calcolare le coordinate piane gaussiane. Come è noto, l'origine 0 degli assi cartesiani è sull'equatore, l'asse delle ordinate X è il meridiano centrale del fuso e l'asse delle ascisse Y è l'equatore stesso. Si indichino con A<sub>i</sub>\* gli angoli misurati fra le geodetiche e quindi fra le trasformate, con l<sub>i</sub>\* gli archi misurati delle geodetiche, con A<sub>i</sub>' gli angoli calcolati fra le corde delle trasformate e con l<sub>i</sub>' le lunghezze calcolate di tali corde.

Come si vede dalla fig. 1, per avere gli angoli fra le corde occorre calcolare le riduzioni angolari ε, che sono date dalle formule:

$$(1) \quad (\varepsilon'_i)'' = \frac{(x_i - x_{i-1}) y'_i}{2 N''_i \varrho'_i \text{ arc } 1''} \quad (\varepsilon''_i)'' = \frac{(x_i - x_{i+1}) y''_i}{2 N''_i \varrho''_i \text{ arc } 1''}$$

Nelle (1) le ordinate y'<sub>i</sub> ed y''<sub>i</sub> sono quelle dei punti, posti ad un terzo dei lati l<sub>i-1</sub> ed l<sub>i</sub> a partire dal vertice A<sub>i</sub>; analogamente gli elementi di curvatura delle grannormali N''<sub>i</sub>, N''<sub>i</sub> e dei raggi del meridiano ϑ'<sub>i</sub>, ϑ''<sub>i</sub> si calcolano per le latitudini degli stessi punti e precisamente:

$$y'_i = \frac{2y_i + y_{i-1}}{3} \quad y''_i = \frac{2y_i + y_{i+1}}{3} \quad \varphi'_i = \frac{2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{3} \quad \varphi''_i = \frac{2\varphi_i + \varphi_{i+1}}{3}$$

Gli angoli fra le corde si ricavano con la formula:

$$(2) \quad A'_i = A_i^* + \varepsilon''_i - \varepsilon'_i.$$

Le riduzioni angolari ε, che vanno prese col loro segno e si considerano sempre dall'arco della trasformata alla corda, sono dell'ordine del secondo. Se, per esempio, sull'ellissoide si prende un fuso di 6° di ampiezza (come si fa nella cartografia italiana ed in quella mondiale U.T.M., dove si adottano fusi di 6°) e si considerano due lati di 10 Km di lunghezza massima, paralleli all'asse X e posti alla latitudine media per l'Italia di 42°, uno vicino al meridiano centrale e l'altro all'estremo del fuso, si ha per l'ellissoide internazionale:

$$\begin{aligned} x_i - x_{i-1} &= 10.000 \text{ m} & y_i &= 10.000 \text{ m} & \varepsilon_i'' &= 0,254'' \\ x_i - x_{i+1} &= 10.000 \text{ m} & y_i &= 250.000 \text{ m} & \varepsilon_i'' &= 6,342'' \end{aligned}$$

Le lunghezze delle corde, che sono praticamente uguali a quelle delle trasformate (v. [1] e [2]), si determinano con le formule:

$$(3) \quad l'_i = m l_i^* \quad m = 1 + \frac{y_i^2 + y_{i+1}^2 + y_i y_{i+1}}{6 N m \varrho m},$$

essendo m il modulo di deformazione lineare valevole per differenze |y<sub>i+1</sub> - y<sub>i</sub>| non superiori a ~ 60 Km [3], Nm e ϑm gli elementi di curvatura calcolati per la latitudine media. Come per le riduzioni angolari, considerando gli stessi due lati di 10 Km, uno vicino al meridiano centrale e l'altro all'estremo del fuso, si hanno per il modulo m i valori:

$$\begin{aligned} y_i = y_{i+1} &= 10.000 \text{ m} & m &= 1,0000012 \\ y_i = y_{i+1} &= 250.000 \text{ m} & m &= 1,0007687, \end{aligned}$$

l'ultimo dei quali è già abbastanza grande.

Come si vede dalle formule (1), (2) e (3), per passare dagli elementi mi-

surati sull'ellissoide a quelli piani della proiezione gaussiana occorre conoscere le coordinate gaussiane dei vertici della poligonale. Queste si determinano in via approssimata, compensando la poligonale con gli elementi misurati nel noto modo empirico (eventualmente sarebbe bene dare una prima correzione grossolana agli angoli ed ai lati, assumendo per i calcoli i valori che si ricavano da una rappresentazione grafica della poligonale). Corretti gli angoli ed i lati, si una rappresentazione grafica dell poligonale). Corretti gli angoli ed i lati, si procederà ad una compensazione rigorosa col metodo dei minimi quadrati.

Se in particolare si considera una poligonale geodetica all'estremità di un fuso, può darsi che la poligonale si sviluppi a cavallo fra due fusi adiacenti. Qualora si verifichi questo caso, dopo aver fatta la compensazione nel fuso della parte maggiore, occorre ritornare sull'ellissoide col trasformare le coordinate piane gaussiane della parte minore nelle geografiche e poi ritrasformare queste nelle gaussiane riferite al meridiano centrale del nuovo fuso. Questi calcoli sono facilitati dall'uso dei testi tecnici dell'I.G.M. [1].

Prima di procedere alla compensazione rigorosa, come si vedrà nel prossimo paragrafo, occorre però accertarsi che i coefficienti di riduzione, determinati con le coordinate gaussiane approssimate, non diano luogo ad errori superiori a quelli delle misure eseguite. Anzi, fissata l'approssimazione delle coordinate gaussiane provvisorie e fissati gli errori delle misure sul terreno, si potrà calcolare la massima lunghezza dei lati della poligonale consentita dal metodo proposto.

Si prendono in considerazione dapprima le riduzioni angolari. Differenziando la prima delle (1) e ponendo per semplicità  $N = \rho = a$ , si ha:

$$(4) \quad \Delta''\varepsilon_i = \frac{y_i (\Delta x_i - \Delta x_{i-1})}{2 a^2 \text{ arc } 1''} + \frac{(x_i - x_{i-1}) \Delta y_i}{2 a^2 \text{ arc } 1''}.$$

Dalla (4) si ricava facilmente:

$$x_i - x_{i-1} = \frac{2 a^2 \text{ arc } 1'' \cdot \Delta''\varepsilon_i}{\Delta y_i} - y_i \frac{\Delta x_i - \Delta x_{i-1}}{\Delta y_i}.$$

Anche ammettendo  $y_i = 250 \text{ Km}$  (estremità del fuso di  $6^\circ$ ),  $\Delta''\varepsilon_i = 0,5''$ ,  $\Delta x_i - \Delta x_{i-1} = \Delta y_i = 100 \text{ m} = 10^{-1} \text{ Km}$ , si ottiene:

$$x_i - x_{i-1} \cong \frac{2 (6,4 \cdot 10^3)^2 \times 0,5}{2 \times 10^5 \times 10^{-1}} - \frac{250 \times 10^{-1}}{10^{-1}} \cong 2048 - 250 \cong 1800 \text{ Km},$$

al cui valore corrisponderebbe un lato di lunghezza superiore senz'altro a quelle usate nelle applicazioni pratiche.

Si analizza ora il modulo di deformazione lineare. Ponendo  $Nm = \rho m = a$ , si ottiene in modo analogo dalla (3):

$$(5) \quad \Delta m = \frac{2y_i + y_{i+1}}{6 a^2} \Delta y_i + \frac{2y_{i+1} + y_i}{6 a^2} \Delta y_{i+1}.$$

Se si pone  $\Delta y_i = \Delta y_{i+1}$ , la (5) diventa

$$\Delta m = \frac{y_i + y_{i+1}}{2 a^2} \Delta y_i = \frac{2y_i + (y_{i+1} - y_i)}{2 a^2} \Delta y_i = \frac{2y_i}{2 a^2} \Delta y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{2 a^2} \Delta y_i,$$

dalla quale si ricava:

$$y_{i+1} - y_i = \frac{\Delta m \cdot 2a^2}{\Delta y_i} - 2y_i.$$

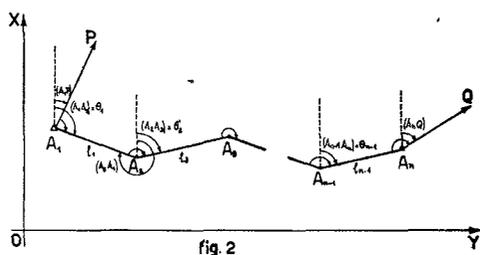
Anche ammettendo  $\Delta m = 10^{-6}$  (errore relativo degli apparati elettronici più precisi),  $y_1 = 250 \text{ Km}$ ,  $\Delta y_1 = 100 \text{ m} = 10^{-1} \text{ Km}$ , si ottiene

$$y_{1+1} - y_1 \cong \frac{10^{-6} \times 2 (6,4 \cdot 10^3)^2}{10^{-1}} - 2 \times 250 \cong 819,2 - 500 \cong 319,2 \text{ Km},$$

valore di molto superiore a quello ammesso di  $\sim 60 \text{ Km}$  per l'applicazione della seconda formula delle (3).

### 3. — Compensazione rigorosa delle poligonali.

Apportate le correzioni agli angoli con le (1) e (2), calcolate le lunghezze delle corde con le (3), si hanno tutti gli elementi delle poligonali nel piano gaussiano, come se fossero stati misurati direttamente. Quindi è possibile procedere alla compensazione rigorosa con il metodo dei minimi quadrati, compensazione che si rende necessaria nelle poligonali geodetiche. Infatti se la compensazione empirica è sufficiente per le poligonali normali, non lo è per quelle geodetiche. Si citano alcuni testi, nei quali è trattata la compensazione rigorosa delle poligonali chiuse e aperte vincolate, come quelli del Prof. Cicco-



netti [4] e dello scrivente [5]. Pure dallo scrivente sono state risolte in alcune memorie altre poligonali caratteristiche, come la « Compensazione di una poligonale aperta senza punti noti » [6] e la « Compensazione di un nodo di poligonale » [7].

Nel presente studio, con riferimento alla fig. 2 analoga alla fig. 1 ma senza le trasformate per maggior chiarezza, si espone la compensazione di una poligonale aperta vincolata secondo gli sviluppi dati da O. Eggert [8]. Poiché si hanno tre misure esuberanti, due angoli ed un lato, si hanno di conseguenza tre equazioni di condizione, delle quali una angolare e due laterali. Indicando con  $A$ ,  $\theta$ ,  $l$  gli angoli, gli angoli di direzione ed i lati compensati, le tre equazioni di condizione risultano:

$$(6) \quad \begin{cases} [A] - \{ (A_n Q) - (A_1 P) \pm s \cdot 180^\circ \} = 0 \\ [l \sin \theta] - (y_n - y_1) = 0 \\ [l \cos \theta] - (x_n - x_1) = 0, \end{cases}$$

essendo  $s$  un determinato numero intero. Se agli elementi compensati si sostituiscono quelli calcolati  $A'$ ,  $\theta'$ ,  $l'$ , si ottengono gli errori di chiusura angolare e laterale:

$$(7) \quad \begin{cases} \Delta = [A'] - \{ (A_n Q) - (A_1 P) \pm s \cdot 180^\circ \} \\ \Delta y = [l' \sin \theta'] - (y_n - y_1) \\ \Delta x = [l' \cos \theta'] - (x_n - x_1). \end{cases}$$

Si fa dapprima la compensazione empirica degli angoli, ripartendo l'errore  $\Delta$  in parti uguali fra gli angoli. Se a ciascun angolo si somma la correzione  $-\frac{\Delta}{n}$ , ottenendo gli angoli compensati empiricamente

$$A'' = A' - \frac{\Delta}{n},$$

e si pone

$$A = A'' + \delta\alpha,$$

l'equazione di condizione angolare assume la forma semplice:

$$(8) \quad [\delta\alpha] = 0.$$

Occorre ora semplificare anche le equazioni di condizione laterale. Indicando con  $\theta''$  gli angoli di direzione compensati empiricamente e posto

$$l = l' + \delta l \quad \theta = \theta'' + \delta\theta,$$

poiché i residui  $\delta l$  e  $\delta\theta$  si ritengono tanto piccoli da poterne trascurare i quadrati e le potenze superiori, le due equazioni di condizione laterale risultano

$$[(l' + \delta l) \operatorname{sen}(\theta'' + \delta\theta)] - (y_n - y_1) = 0 \quad [(l' + \delta l) \operatorname{cos}(\theta'' + \delta\theta)] - (x_n - x_1) = 0,$$

che con òvvi sviluppi diventano:

$$[\operatorname{sen} \theta'' \cdot \delta l] + [l' \operatorname{cos} \theta'' \cdot \delta\theta] + \Delta'y = 0 \quad [\operatorname{cos} \theta'' \cdot \delta l] - [l' \operatorname{sen} \theta'' \cdot \delta\theta] + \Delta'x = 0,$$

dove  $\Delta'y = [l' \operatorname{sen} \theta''] - (y_n - y_1)$  e  $\Delta'x = [l' \operatorname{cos} \theta''] - (x_n - x_1)$  sono gli errori di chiusura laterale, ottenuti con gli angoli di direzione  $\theta''$  compensati empiricamente. Tenendo conto che

$$\delta\theta_1 = \delta\alpha_1, \quad \delta\theta_2 = \delta\alpha_1 + \delta\alpha_2, \quad \dots, \quad \delta\theta_{n-1} = \delta\alpha_1 + \delta\alpha_2 + \dots + \delta\alpha_{n-1}$$

ed essendo  $[\delta\alpha] = 0$ , si ha sostituendo e sviluppando:

$$[l' \operatorname{cos} \theta'' \cdot \delta\theta] = l'_1 \operatorname{cos} \theta''_1 \cdot \delta\alpha_1 + l'_2 \operatorname{cos} \theta''_2 (\delta\alpha_1 + \delta\alpha_2) + \dots \\ + l'_{n-1} \operatorname{cos} \theta''_{n-1} (\delta\alpha_1 + \delta\alpha_2 + \dots + \delta\alpha_{n-1}) = - [x' \cdot \delta\alpha]$$

$$[l' \operatorname{sen} \theta'' \cdot \delta\theta] = l'_1 \operatorname{sen} \theta''_1 \cdot \delta\alpha_1 + l'_2 \operatorname{sen} \theta''_2 (\delta\alpha_1 + \delta\alpha_2) + \dots \\ + l'_{n-1} \operatorname{sen} \theta''_{n-1} (\delta\alpha_1 + \delta\alpha_2 + \dots + \delta\alpha_{n-1}) = - [y' \cdot \delta\alpha]$$

$$[\operatorname{sen} \theta'' \cdot \delta l] - [x' \cdot \delta\alpha] + \Delta'y = 0 \quad [\operatorname{cos} \theta'' \cdot \delta l] + [y' \cdot \delta\alpha] + \Delta'x = 0.$$

Se si fa una traslazione degli assi cartesiani, portando l'origine nel bari-centro dei vertici della poligonale di coordinate

$$y_0 = \frac{[y']}{n} \quad y_0 = \frac{[x']}{n},$$

e si indicano con  $y'' = y' - y_0$  e  $x'' = x' - x_0$  le nuove coordinate, poiché  $[y_0 \cdot \delta\alpha] = [x_0 \cdot \delta\alpha] = 0$ , si hanno le tre equazioni di condizione nella seguente forma lineare (i residui  $\delta\alpha$  si esprimono in secondi sessagesimali):

$$(9) \quad [\operatorname{sen} \theta'' \cdot \delta l] - [x'' \cdot \delta\alpha'' \operatorname{arc} 1''] + \Delta'y = 0 \\ [\operatorname{cos} \theta'' \cdot \delta l] + [y'' \cdot \delta\alpha'' \operatorname{arc} 1''] + \Delta'x = 0 \\ [\delta\alpha''] = 0.$$

Per i calcoli successivi, cioè per ricavare le equazioni correlanti con i correlativi  $K_1, K_2, K_3$  ed i residui incogniti  $\delta l_1, \delta l_2, \dots, \delta l_{n-1}, \delta \alpha_1, \delta \alpha_2, \dots, \delta \alpha_n$  con le equazioni correlate, si procederà nel modo suggerito dal Cicconetti [4], assumendo i pesi degli angoli uguali ad uno e quelli dei lati inversamente proporzionali ai quadrati dei lati (praticamente gli errori dei lati si possono ritenere proporzionali ai lati stessi). Però nelle equazioni correlanti, essendo  $[y''] = [x''] = 0$  e mancando il termine noto nella terza equazione di condizione, saranno nulli i coefficienti del correlativo  $K_3$  nelle prime due equazioni e la terza risulterà  $K_3 = 0$ . In definitiva il sistema correlante si ridurrà a due sole equazioni con due correlativi e con notevole vantaggio nei calcoli.

#### 4. — Considerazioni sulla validità della compensazione.

Per maggior comprensione degli argomenti esposti si consideri la stessa poligonale geodetica della fig. 1, sviluppata sull'ellissoide. In luogo delle coordinate geografiche dei vertici della poligonale si considerino le coordinate rettangolari  $X$  e  $Y$ , che praticamente sono le coordinate cartesiane del piano. Dalle (7), tenendo conto dei valori misurati sul terreno, si hanno i seguenti errori di chiusura angolare e laterale:

$$(10) \quad \begin{cases} \Delta^* = [A^*] - \{ (A_n Q)^* - (A_1 P)^* \mp s \cdot 180^\circ - [q] \} \\ \Delta^* y = [l^* \sin \theta^*] - \{ Y'_n + [\delta y] \} \quad \Delta^* x = [l^* \cos \theta^*] - (X'_n - \delta x). \end{cases}$$

Nella prima delle (10) si è tenuto conto della convergenza dei meridiani  $[q]$ , nella seconda si è considerato il restringimento dei meridiani  $[\delta y]$  nel passaggio dal vertice  $A_1$  a quello  $A_n$ , e nella terza si è diminuita la coordinata  $X'_n$  di  $\delta x$  per il fatto che  $A'_n$  si trova un po' al disopra del parallelo di  $A_n$ . Infatti, considerando la fig. 3 e tenendo conto di note formule di geodesia,

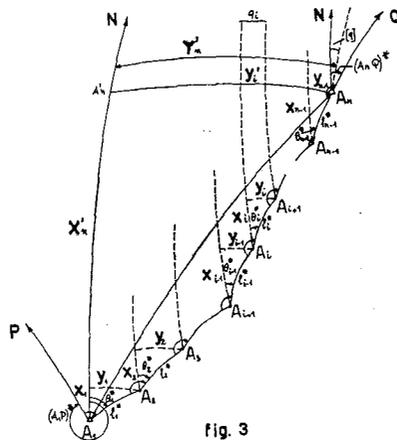


fig. 3

si ha per la convergenza dei meridiani:

$$[q] = \sum_{i=1}^{i=n-1} (\lambda_{i+1} - \lambda_i)'' \operatorname{sen} \frac{\varphi_{i+1} + \varphi_i}{2}.$$

Per il restringimento dei meridiani  $[\delta y]$  si ricava:

$$y_i = N_n \cos \varphi_n (\lambda_{i+1} - \lambda_i)'' \text{ arc } 1'' \quad y_i' = N_i \cos \varphi_i (\lambda_{i+1} - \lambda_i)'' \text{ arc } 1''$$

$$\frac{y_i'}{y_i} = \frac{N_n \cos \varphi_n}{N_i \cos \varphi_i} \quad y_i - y_i' = y_i \left( 1 - \frac{N_n \cos \varphi_n}{N_i \cos \varphi_i} \right)$$

$$[\delta y] = \sum_{i=1}^{i=n-1} l_i^* \text{ sen } \theta_i^* \left( 1 - \frac{N_n \cos \varphi_n}{N_i \cos \varphi_i} \right)$$

Per il  $\delta x$  si ha infine:

$$\delta x = \frac{1}{2} (\lambda_n - \lambda_1)''^2 \text{ sen } \varphi_n \cos \varphi_n \cdot N_n \text{ arc } 1''.$$

Si tratta ora di dimostrare che le (7) sono praticamente uguali alle (10). Considerando la prima delle (7), tenendo conto delle (2) e sostituendo si ricava (v. fig. 4):

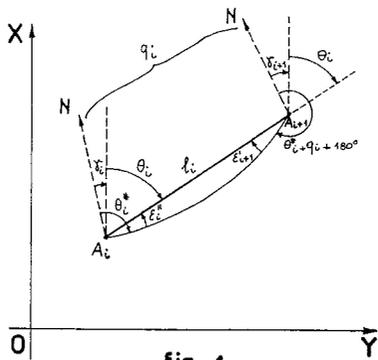


fig. 4

$$\Delta = [A^* + \epsilon'' - \epsilon'] - \left\{ (A_n Q)^* - \gamma_n + \epsilon''_n - (A_i P)^* + \gamma_i - \epsilon'_i \mp s \cdot 180^\circ \right\}$$

$$\Delta = [A^*] - \left\{ (A_n Q)^* - (A_i P)^* \mp s \cdot 180^\circ - (\gamma_n - \gamma_i) - \sum_{i=n-1}^{i=1} (\epsilon'_{i+1} - \epsilon''_i) \right\},$$

essendo  $\gamma_1$  e  $\gamma_n$  le convergenze dei meridiani nei vertici  $A_1$  ed  $A_n$ . Poiché:

$$q_i = (\theta_i^* + q_i + 180^\circ) - (\theta_i^* + 180^\circ) = \gamma_{i+1} + \theta_i + 180^\circ - \epsilon'_{i+1} - \gamma_i - \theta_i + \epsilon_i'' - 180^\circ = (\gamma_{i+1} - \gamma_i) - (\epsilon'_{i+1} - \epsilon_i''),$$

si ha:

$$q_1 = (\gamma_2 - \gamma_1) - (\epsilon'_2 - \epsilon_1''), \quad q_2 = (\gamma_3 - \gamma_2) - (\epsilon'_3 - \epsilon_2''), \quad \dots, \\ q_{n-1} = (\gamma_n - \gamma_{n-1}) - (\epsilon'_n - \epsilon_{n-1}'').$$

Sommando, si ricava

$$[q] = \gamma_n - \gamma_1 - \sum_{i=1}^{i=n-1} (\varepsilon'_{i+1} - \varepsilon''_i),$$

e quindi:

$$(11) \quad \Delta = [A^*] - \{ (AnQ)^* - (A_1P)^* \mp s \cdot 180^\circ - [q] \} = \Delta^*.$$

Considerando la seconda delle (7), si ottiene:

$$\Delta_y = [m l^* \operatorname{sen} \{ \theta^* + (\varepsilon - \gamma) \} ] - m' \{ y'_n + [\delta_y] \}$$

$$\Delta_y = [m l^* \operatorname{sen} \theta^*] + [m l^* \cos \theta^* \cdot (\varepsilon - \gamma)] - m' \{ y'_n + [\delta_y] \}.$$

Poiché  $[m l^* \cos \theta^* \cdot (\varepsilon - \gamma)] = \sim 0$ , si ha:

$$(12) \quad \Delta_y = [m l^* \operatorname{sen} \theta^* - m' \{ y'_n + [\delta_y] \}] = \sim \Delta y^*.$$

Analogamente dalla terza delle (7) si ricava:

$$\Delta_x = [m l^* \cos \{ \theta^* + (\varepsilon - \gamma) \} ] - m' (X'_n - \delta_x) =$$

$$= [m l^* \cos \theta^*] - [m l^* \operatorname{sen} \theta^* \cdot (\varepsilon - \gamma)] - m' (X'_n - \delta_x).$$

Poiché  $[m l^* \operatorname{sen} \theta^* \cdot (\varepsilon - \gamma)] = \sim 0$ , si ha:

$$(13) \quad \Delta_x = [m l^* \cos \theta^*] - m' (X'_n - \delta_x) = \sim \Delta x^*.$$

Si conclude che la compensazione di una poligonale nella proiezione conforme di Gauss non modifica praticamente quella che si otterrebbe operando direttamente sull'ellissoide.

Si porge il più vivo ringraziamento al Prof. Mariano Cunietti per i preziosi consigli avuti nella stesura della presente memoria.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] Istituto Geografico Militare - Collezione di testi tecnici:  
 a) Sulla rappresentazione conforme di Gauss - II ediz. - Firenze - 1943;  
 b) Sulla rappresentazione conforme di Gauss - Allegati - Parte I - Tavole numeriche riferite all'ellissoide di Hayford - Firenze - 1942;  
 c) Sulla rappresentazione conforme di Gauss - Allegati - Parte II - Tavole ausiliarie per il calcolo delle coordinate conformi e della convergenza dei meridiani con riferimento all'ellissoide di Bessel - Firenze - 1942;  
 d) Sulla rappresentazione conforme di Gauss - Allegati - Parte III - Applicazioni - Firenze - 1942.
- [2] G. Inghilleri - Sulla compensazione delle figure ellissoidiche trilaterate per mezzo della rappresentazione piana conforme. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini - A. XVI - n. 4, 1957.
- [3] Carmelo F. Aquilina - Lezioni di Topografia - Casa Editr. Cedom - Padova - 1962-63.
- [4] G. Cicconetti - Trattato di Geodesia e Topografia - Vol. II - Casa Editr. Dott. Francesco Vallardi - Milano - 1938.
- [5] A. Dragonetti - Esercizi di Topografia - Edizioni Libreria Cortina - Milano 1957.
- [6] A. Dragonetti - Compensazione di una poligonale aperta senza punti noti. - Rivista del Catasto e dei Servizi Tecnici Erariali - n. 4, 1955.
- [7] A. Dragonetti - Compensazione di un nodo di poligonale. Rivista del Catasto e dei Servizi Tecnici Erariali. - n. 1, 1957.
- [8] O. Eggert. - Die Ausgleichung von Polygonzügen nach der Methode der Kleinsten Quadrate. « Zeitschr. f. Verm. - 1928 » S. 657-675.