ROS	ROA		
RSO		RSA	
	RAO	RAS	
ORS	ORA		
OSR			OSA
	OAR		OAS
SRO		SRA	
SOR			SOA
		SAR	SAO
	ARO	ARS	
	AOR		AOS
		ASR	ASO
6	6	6	6

Le disposizioni di classe 3ª, $D4{,}3$, sono 24, cioé $4 \times 3 \times 2$. Riepiloghiamo:

$D4{,}1 = 4$
$D4{,}2 = 4 \times 3 = 12$
$D4{,}3 = 4 \times 3 \times 2 = 24.$

Passando alla formula generica possiamo scrivere:
$Dn{,}r = n\,(n-1)\,(n-2)\ \ldots\ (n-r+1).$

Il numero delle disposizioni di n elementi, presi ad r ad r, cioé di classe r, è dato dal prodotto di r numeri interi consecutivi, decrescenti a partire da n.

Così: $D\ 10{,}4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5.040$
$D\ 20{,}5 = 20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 = 1.860.480.$

Si è precisato che $r \leq n$; prendiamo $r = n$; per $n = 4$, $r = 4$:

$D4{,}4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1.$

In termini generici possiamo scrivere:
$Dn{,}n = n\,(n-1)\,(n-2)\ \ldots\ 3.2.1.$

Dn,n si indica con Pn e si chiama permutazioni di n elementi. Pn indica il numero dei gruppi che si possono ottenere da n elementi prendendoli tutti insieme e ordinandoli in tutti i modi possibili. Pn si scrive anche n! oppure $\lfloor n$ (*)

Il fattoriale di un intero positivo n è il prodotto dei primi n numeri naturali. Esempio: $5! = 1.2.3.4.5.$; $3! = 1.2.3.$

Per convenzione si pone $0! = 1$.

Adesso vogliamo vedere quanti gruppi si ottengono da n oggetti, presi a r a r, qualora si considerino gruppi distinti solo quelli che hanno almeno un elemento diverso.

Nelle disposizioni, 2 gruppi venivano ritenuti distinti, e come tali contati, anche se avevano elementi uguali posti in ordine differente. In questo caso

(*) E si legge fattoriale di n.

invece più gruppi aventi elementi identici vengono considerati un gruppo unico e contati una sola volta.

I raggruppamenti di questo tipo vengono chiamati combinazioni di n elementi classe r, e si indicano con Cn,r.

Nello schema precedente si è veduto che D4,3 era costituito da 24 gruppi; di questi però 6 erano composti dalle lettere ORS, 6 dalle lettere AOR, 6 dalle lettere ARS e 6 dalle lettere AOS. Pertanto le 6 disposizioni ORS, e anche le altre, debbono essere considerate una combinazione sola.

Inoltre le 6 combinazioni di ciascun gruppo altro non sono che P3, cioé tutte le possibili permutazioni che si possono ottenere con le 3 lettere formanti il gruppo stesso.

Per ottenere il numero delle combinazioni basterà pertanto dividere D4,3 per 6 cioé per P3. In lettere possiamo scrivere:

$$Cn,r = \frac{Dn,r}{Pr}$$

Si può anche scrivere:

$$Cn,r = \frac{n\ (n-1)\ (n-2)\ .....\ (n-r+1)}{r!}$$

In conclusione: il numero dei gruppi, differenti per almeno un elemento, che si possono formare da n elementi presi r alla volta, o combinazioni di n elementi di classe r, è uguale al rapporto fra il numero delle disposizioni di classe r ed il numero delle permutazioni di r elementi.

$Cn,5 = \binom{n}{r}$ che si legge enne su erre.

Esempio: trovare il numero delle disposizioni e delle combinazioni di quarta classe di 6 elementi. Posto n = 6; r = 4:

$D6,4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

$P4 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

$C6,4 = 360 : 24 = 15$

Esempio: Esprimere il numero delle combinazioni di 5ª classe di n elementi:

$$Cn,r = \binom{n}{5} = \frac{Dn,\ 5}{P\ 5} = \frac{n\ (n-1)\ (n-2)\ (n-3)\ (n-4)}{5!}$$

Enunciamo senza dimostrarli i seguenti teoremi:

1° - il numero delle combinazioni di classe r di n elementi è uguale al numero delle combinazioni della classe complementare (n-r):

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

2° - il numero delle combinazioni di classe r di n elementi è uguale alla somma del numero delle combinazioni di classe r di n - 1 elementi e di quello delle combinazioni di classe r - 1 di n - 1 elementi:

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

Elementi di calcolo delle probabilità.

Si dice probabilità matematica di un evento il rapporto tra il numero dei casi favorevoli al suo verificarsi e il numero dei casi possibili, purché tutti

tutti siano ugualmente possibili.

Se chiamiamocon K il numero dei casi favorevoli e con Z il numero dei casi contrari si avrà:

$$K + Z = W$$

W è il numero dei casi possibili.

Se p è la probabilità che ha l'evento di verificarsi e q quella di non accadere ,in una prova, si avrà:

$$p = \frac{K}{W} \text{ e } q = \frac{Z}{W}$$

La probabilità di un evento è sempre una frazione propria. La somma della probabilità favorevole e di quella contraria è uguale all'unità:

$$p + q = \frac{K}{W} + \frac{Z}{W} = 1$$

da cui

$$q = 1 - p \text{ e } p = 1 - q$$

Esempio: qual'è la probabilità che lancaindo un dado si ottenga il numero 2? Le facce del dado sono 6; su una di esse è segnato il n. 2; l'evento favorevole (uscita del 2) è 1; i casi ugualmente possibili sono 6; p è pertanto uguale a 1/6. Gli eventi contrari sono costituiti dalla uscita degli altri 5 numeri: q è quindi uguale a 5/6: $p + q = 5/6 + 1/6 = 1$.

Teorema delle probabilità totali.

Si chiamino E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, l'uscita delle facce di un dado segnate, come è noto, dai numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6. Si esegua una sola prova: l'uscita di un numero, poniamo il 3, esclude la sortita degli altri. Allora noi diciamo che i 6 eventi, nella estrazione del tipo ipotizzato, si escludono a vicenda, sono cioè tra loro incompatibili.

Come abbiamo più sopra veduto, la probabilità di ottenere uno dei 6 numeri è uguale a 1/6; chiediamo qual'è la probabilità, che sempre in una sola prova, esca il numero 2 oppure il n. 3.

Evidentemente i casi possibili rimangono 6, quelli favorevoli sono 2 aventi ciascuno probabilità 1/6, cioè l'uscita del n. 2 o del n. 3. La probabilità dell'evento ipotizzato, giusta la definizione di probabilità matematica, si è veduto essere il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili.

La probabilità cercata è pertanto:

$$\frac{1 + 1}{6}$$

L'esempio altro non è che l'applicazione del teorema delle probabilità totali che dice che se due eventi E_1 E_2, si escludono a vicenda tra loro, la probabilità che si verifichi l'uno o l'altro è uguale alla somma delle rispettive probabilità.

Naturalmente la legge è valida, anche nel caso che gli eventi incompatibili, invece di essere 2 siano *n*.

Teorema delle probabilità composte.

Perché, gettando due dadi, si possano ottenere dodici punti, occorre che si ottengano 6 punti da ciascun dado.

Se chiamiamo con E l'evento 12 punti, è evidente che esso risulta dal concorso dell'avverarsi di un 6 nel primo dado (Evento E_1) e dal verificarsi di un 6 nell'altro dado (Evento E_2).

Inoltre il verificarsi di un 6 in un dado è indipendente dal verificarsi di un altro 6 nel 2º dado.

L'evento E risulta pertanto dal concorso degli eventi E_1 e E_2 fra loro indipendenti.

Vediamo qual'è la probabilità di ottenere il 12.

La probabilità di ottenere 6 dal primo dado è 1/6, la probabilità di ottenere un 6 dall'altro dado è uguale ancora ad 1/6.

I casi favorevoli sono 1 x 1 perché il 6 del primo dado deve combinarsi con l'unico 6 del secondo dado.

I casi possibili sono invece 6 x 6 perché ciascun valore del primo dado può combinarsi con ciascun valore del secondo dado.

La probabilità dell'evento E è data dal rapporto del numero dei casi favorevoli rispetto al numero dei casi possibili, cioè dal prodotto delle probabilità di ottenere il punteggio 6 da ognuno dei due dadi:

$$1/6 \times 1/6 = 1/36$$

Enunciamo la legge che con l'esempio abbiamo voluto chiarire: il teorema delle probabilità composte. Le probabilità di un evento E risultante da più eventi E_1, E_2, E_3 ... indipendenti tra di loro (tali cioè che il verificarsi dell'uno non influisca sul verificarsi degli altri) è uguale al prodotti delle probabilità degli eventi componenti E_1, E_2, E_3 ...

Frequenza.

Si abbia un sacchetto con m palline bianche e b palline nere. Abbiamo già veduto qual'è la probabilità matematica di estrarre, in una prova, un colore o l'altro. Supponiamo di ignorare tale probabilità. Si eseguano dal sacchetto un numero s di estrazioni. Le estrazioni debbono avvenire togliendo una pallina e, una volta vedutone il colore, rimettendola nel sacchetto in modo che la probabilità di estrarre la successiva pallina, bianca o nera rimanga costante.

Al termine delle s operazioni si saranno estratte r palline bianche e t palline nere, in modo che $r + t = s$.

Il rapporto r/s è detto frequenza relativa di una pallina bianca e t/s frequenza relativa di una pallina nera. L'esperienza insegna che in una serie di prove ripetute un gran numero di volte nelle medesime condizioni ciascuno degli eventi possibili si manifesta con una frequenza relativa che è press'a poco uguale alla sua probabilità teorica. L'approssimazione ordinariamente cresce al crescere del numero delle prove.

Tale caratteristica viene chiamata legge empirica del caso.

Le palline si è detto, debbono di volta in volta essere ricollocate nel sacchetto. Possiamo però immaginare un sacco contenente un numero infinito di palline; in questo caso le estrazioni, per quanto numerose ,anche se non riposte nel recipiente non ne modificano la composizione. Così ci si comporta quando si vuole studiare la frequenza, e da essa risalire alla probabilità matematica, di un certo carattere in una popolazione numerosa.

Quando per esempio si vuol ricercare la distribuzione di un carattere somatico (altezza, colore degli occhi, ecc.) nella popolazione italiana, in genere non si ricorre alla misura di quel carattere in tutti i componenti la popolazione ma in una sola parte di essi.

Una volta che si è misurato il carattere di un individuo estratto a sorte dall'insieme, questo viene escluso completamente dalle successive estrazioni senza che le misure effettuate sugli individui successivi ne subiscano qualche influenza.

Noi possiamo, per rimanere nell'esempio, considerare la popolazione come un sacchetto con un numero infinito di palline e le estrazioni altro non sono che un modo per valutare la composizione delle palline nel sacchetto stesso. Si chiama universo la massa infinita di elementi dal quale si suppone derivata una esperienza assimilabile ad estrazioni ed è detto campione il numero delle prove eseguite a caso nell'universo.

La legge empirica del caso non afferma senz'altro che in molte prove la frequenza relativa di un evento è uguale alla sua probabilità teorica, ma esprime una tendenza approssimativa.

Esiste comunque un legame tra frequenza e probabilità e la prima è una misura più o meno approssimata della seconda. La maggior o minor approssimazione con la quale da misure empiriche si può risalire a grandezze teoriche dipende dall'ampiezza del campione e dalla sua variabilità.

Per scoprire il legame esistente tra probabilità matematica e frequenza occorre studiare il problema fondamentale delle prove ripetute. Facciamo un esempio: in una popolazione caucasica (di razza bianca) gli individui presentano occhi chiari e scuri. Se assimiliamo la popolazione ad un sacchetto di palline bianche e nere la probabilità di scegliere a caso un individuo con occhi chiari è p, mentre q è la probabilità contraria di scegliere individui con occhi scuri: $p + q = 1$.

Dalla popolazione si vuole estrarre un grande numero di campioni ciascuno costituito da cento individui. Ogni campione è assimilabile a cento estrazioni a caso da un universo infinito.

Diciamo che se l'individuo estratto ha occhi chiari si è verificato l'evento E, che ha probabilità p, se invece ha occhi scuri si è verificato l'evento F con probabilità q.

I singoli campioni possono presentare una composizione rispetto al colore degli occhi molto diversa.

Si può avere un campione in cui tutti i soggetti estratti presentino iridi scure, oppure novantanove iridi scure e una chiara, 98 iridi scure e due chiare, e così di seguito fino a 98 individui con iride chiare e 2 scure, 99 chiare e una scura, tutte le iridi chiare.

Gli eventi E e F si possono combinare tra di loro in 101 $(n + 1)$ modi. Vediamo qual'è la probabilità matematica che ha ciascuna delle $(n + 1)$ combinazioni che di verificarsi.

Se gli eventi E ed F, contrari, hanno come probabilità p e q in modo che $p + q$ sia uguale a uno, eseguendo n prove, potrà manifestarsi 0, 1, 2, ... n volte il primo evento e, di conseguenza n, ... 2, 1, 0 volte il secondo.

La probabilità che, in n prove, E non avvenga mai cioè che avvenga sempre F, si determina subito considerando che le prove sono fra loro indipendenti e perciò il fatto che nella 1a, 2a, ... n.ma prova si verifichi sempre F è uguale, per la legge della probabilità composta, al prodotto di n probabilità, elementari uguali a q.

La probabilità che in n prove l'evento E non si verifichi mai è uguale alla probabilità che si verifichi per n volte l'evento q.

Primo risultato: q^n.

La probabilità che nella prima prova si verifichi E e nelle successive n-1 si abbia F sempre per la legge delle probabilità composte, è pq^{n-1}.

Però noi ci domandiamo qual'è la probabilità che in n prove si abbia una volta l'evento E e nelle altre F. E si può avere sia nella prima estrazione, come nella seconda, nella terza ... nella n.ma:

Rientriamo pertanto nelle probabilità totali e si ha

$_1p\ q^{n-1} + {_2p}\ q^{n-1} + {_3p}\ q^{n-1} + \ldots\ldots + {_{(n-1)}p}\ q^{n-1} + {_np}\ q^{n-1} = n\ p\ q^{n-1}$

Vediamo adesso la probabilità che l'evento E avvenga due volte e l'evento F n-2 volte.

Immaginiamo ancora che nelle prime due estrazioni si abbia l'evento E, nelle restanti n-2 l'evento F. La probabilità è $p^2\ q^{n-2}$.

Però l'evento E si può avere anche nella prima e terza estrazione, nella 1a e 4a, nella 1a e n.ma, nella 2a e 3a ecc.

Le manifestazioni di E possono presentarsi in tanti modi quante sono le combinazioni binarie di n elementi, ossia $\binom{n}{2}$; in base al teorema delle probabilità totali si avrà:

3° risultato: $\binom{n}{2}\ p^2\ q^{n-2}$

Con ragionamento analogo si perviene a:

4° risultato: $\binom{n}{3}\ p^3\ q^{n-3}$

5° risultato: $\binom{n}{4}\ p^4\ q^{n-4}$

r.mo risultato: $\binom{n}{r-1}\ p^{r-1}\ q^{n-r+1}$

n.mo risultato: $\binom{n}{n-1}\ p^{n-1}\ q$

n + 1° risultato: p^n

Poiché $\binom{n}{n} = 1$ per il 1° teorema cosiddetto delle classi complementari

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{n-n} = \binom{n}{o} = 1.$$

Inoltre si scriverà $q^o = 1$, $p^1 = p$ e $q^1 = q$; si possono effettuare le seguenti sostituzioni:

$$q^n = \binom{n}{o}\ p^o\ q^n$$

$$np\ q^{n-1} = \binom{n}{1}\ p^1\ q^{n-1}$$

$$p^n = \binom{n}{n}\ p^n\ q^o$$

Lo sviluppo completo di $(p + q)^n =$

$$\binom{n}{o}\ p^o\ q^n + \binom{n}{1}\ p^1\ q^{n-1} + \binom{n}{2} p^2\ q^{n-2} + \ldots\ldots + \binom{n}{r}$$

$$p^r\ q^{n-r} + \ldots\ldots \binom{n}{n-1} p^{n-1}\ q + \binom{n}{n}\ p^n\ q^o$$

Trattasi della somma di n + 1 termini ciascuno dei quali è formato dal prodotto di un coefficiente $\binom{n}{r}$ per la potenza r ma di p per la potenza (n-r) ma di q.

Poiché $\binom{n}{r}$ è uguale a $\binom{n}{n-r}$, i coefficienti dei termini equidistanti dal termine centrale sono uguali fra loro a due a due. Se n e dispari il numero totale dei coefficienti, essendo essi n + 1, è pari: si hanno allora al centro due coefficienti uguali, se invece n è pari, al centro si ha un termine il cui coefficiente è senza simmetrico.

Lo sviluppo di cui sopra altro non è che lo sviluppo del binomio di Newton si può anche scrivere:

$$(p + q)^n = \sum_{r=o}^{n} \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$$

L'espressione, come si è detto, misura le probabilità che in una serie di n prove si verifichino una qualsiasi delle (n + 1) combinazioni degli eventi contrari E ed F.

Combinazione tipica

L'evento E, al suo verificarsi descrive la seguente variabile casuale:

valori argom.	0	1	r	n-1	n
Probabilità:	$\binom{n}{o} p^o q^n$	$\binom{n}{1} p\ q^{n-1}$;	$\binom{n}{r} p^r\ q^{n-r}$;	$\binom{n}{n-1} p^{n-1}\ q$;	$\binom{n}{n} p^n\ q^o$

Le probabilità prima aumentano, poi diminuiscono. Vogliamo vedere, dagli n + 1 valori interi argomentali, nelle prove ripetute, quale è quello, che chiameremo r, che ha la massima probabilità di verificarsi.

Si tenga presente che quando l'evento F assume il valore r l'evento E assume quello contrario di n - r: siamo sempre cioè di fronte alla combinazione degli eventi E ed F.

Si dimostra che la possibilità massima si ha quando

$$np + p \geq r \geq np - q$$

La combinazione è una sola quando np + p e np — q sono frazionali; se invece gli intervalli sono interi consecutivi, con essi si identificano i due valori argomentali cui corrisponde la probabilità massima.

Poiché p e q sono frazioni proprie, se np è intero, anche r = np.

Quando np non è intero, la probabilità massima corrisponde ai due interi successivi, rispettivamente immediatamente inferiore e superiore a np.

Con qualche approssimazione possiamo dire, che nel problema delle prove ripetute con due eventi necessari e incompatibili, di probabilità p e q, la combinazione più frequente è np che avviene con probabilità:

$$\binom{n}{np} p^{np}\ q^{nq} = \frac{n\ (n-1) \ldots\ldots (n - np + 1)}{np!}\ p^{np}\ q^{nq}$$

la quale può anche iscriversi:

$$\frac{n!}{np!\ nq!}\ p^{np}\ q^{nq}$$

np si dice combinazione tipica e rappresenta il complesso dei successi (o degli insuccessi) che in n prove ha la massima probabilità di verificarsi.

Nel caso particolare in cui $p = q = 1/2$, np è sempre intero quanto n è pari ed $np + p$ è sempre intero quando n è dispari.

Cioè per n pari la massima probabilità coincide con $r = np$, nel caso in cui n è dispari i due massimi si hanno per $np + p$ e $np - q$. Così per

$$(1/2 + 1/2)^6 \text{ e } (1/2 + 1/2)^7$$

Per $n = 6$ $np = 3$, la probabilità massima e unica corrisponde a l'unico valore argomentale di $r = 3$ cioè al 4° termine dello sviluppo.

Per $n = 7$ $np = 3{,}5$ i due max corrispondono $np + p$ cioè $3{,}5 + 1/2 = 4$ e $np - q = 3{,}5 - 1/2 = 3$ cioè al 4° e al 5° termine dello sviluppo.

Scarto

Si definisce come scarto ℓ la differenza tra il numero r delle volte in cui un evento E si è verificato in n prove e il numero delle volte che avrebbe avuto la probabilità massima di verificarsi: la differenza cioè del numero delle volte in cui è avvenuto l'evento E e la sua combinazione tipica.

$$\ell = r - np$$

Si dice scarto relativo L il rapporto tra lo scarto assoluto e il numero delle prove eseguite:

$$L = \frac{\ell}{n} = \frac{r}{n} - p$$

La probabilità di uno scarto ℓ è dato da:

$$\frac{n!}{(np + \ell)!\ (nq - \ell)!}\ p^{np + \ell}\ q^{nq - \ell}$$

Per quanto si è detto in precedenza, l'espressione assume il valore max per $= 0$ e diminuisce al crescere di ℓ.

In base agli elementi di cui sopra si può enunciare il seguente teorema, detto di Bernoulli.

Dato un evento E la cui probabilità rimane costante e uguale a p, si può eseguire un numero di prove n tanto grande che sia prossima quanto si vuole alla unità la probabilità di uno scarto relativo $\frac{\ell}{n}$ inferiore a un numero positivo ε, piccolo quanto si vuole cioè:

$$\frac{r}{n} - p \angle \varepsilon$$

in altre parole eseguendo un grandissimo numero di prove la frequenza relativa misura con quasi certezza la probabilità matematica di un evento dato.

Valori dei termini dello sviluppo di alcuni binomi

$(1/2 + 1/2)^5$					$(1/2 + 1/2)^7$					$(1/2 + 1/2)^{10}$				
				Scarti da np $= 2\frac{1}{2}$					Scarti da n p $= 3\frac{1}{2}$					Scarti da n p = 5
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
										0	$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{1024}$	-5
					0	$\left(\frac{1}{2}\right)^7$	$\frac{1}{128}$	$\frac{8}{1024}$	$-3\frac{1}{2}$	1	$10\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	-4
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^5$	$\frac{1}{32}$	$\frac{32}{1024}$	$-2\frac{1}{2}$	1	$7\left(\frac{1}{2}\right)^7$	$\frac{7}{128}$	$\frac{56}{1024}$	$-2\frac{1}{2}$	2	$45\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	-3
1	$5\left(\frac{1}{2}\right)^5$	$\frac{5}{32}$	$\frac{160}{1024}$	$-1\frac{1}{2}$	2	$21\left(\frac{1}{2}\right)^7$	$\frac{21}{128}$	$\frac{168}{1024}$	$-1\frac{1}{2}$	3	$120\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	-2
2	$10\left(\frac{1}{2}\right)^5$	$\frac{10}{32}$	$\frac{320}{1024}$	$-\frac{1}{2}$	3	$35\left(\frac{1}{2}\right)^7$	$\frac{35}{128}$	$\frac{280}{1024}$	$-\frac{1}{2}$	4	$210\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	-1
3	$10\left(\frac{1}{2}\right)^5$	$\frac{10}{32}$	$\frac{320}{1024}$	$+\frac{1}{2}$	4	$35\left(\frac{1}{2}\right)^7$	$\frac{35}{128}$	$\frac{280}{1024}$	$+\frac{1}{2}$	5	$252\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$	$\frac{252}{1024}$	$\frac{252}{1024}$	0
4	$5\left(\frac{1}{2}\right)^5$	$\frac{5}{32}$	$\frac{160}{1024}$	$+1\frac{1}{2}$	5	$21\left(\frac{1}{2}\right)^7$	$\frac{21}{128}$	$\frac{168}{1024}$	$+1\frac{1}{2}$	6	$210\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$+1$
5	$\left(\frac{1}{2}\right)^5$	$\frac{1}{32}$	$\frac{32}{1024}$	$+2\frac{1}{2}$	6	$7\left(\frac{1}{2}\right)^7$	$\frac{7}{128}$	$\frac{56}{1024}$	$+2\frac{1}{2}$	7	$120\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$+2$
					7	$\left(\frac{1}{2}\right)^7$	$\frac{1}{128}$	$\frac{8}{1024}$	$+3\frac{1}{2}$	8	$45\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$+3$
										9	$10\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$+4$
										10	$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{1024}$	$+5$
	Tot.	1	1	—		1	1	1	—	Tot.	1	1	1	—

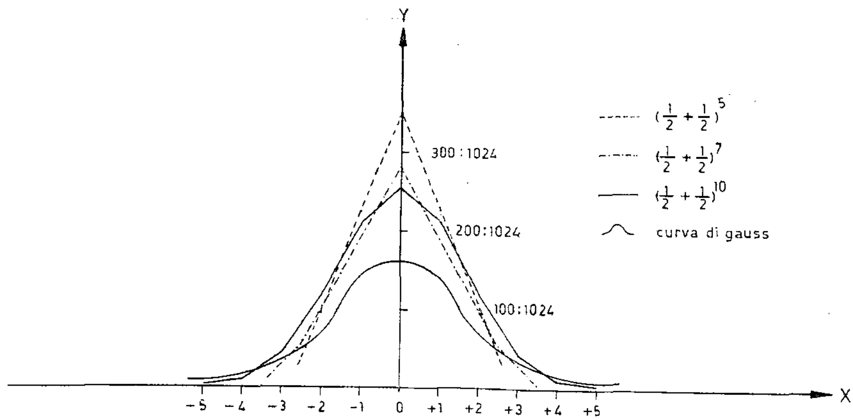

FIG. 1

Rappresentazione grafica

Dopo aver definito lo scarto, possiamo rappresentare graficamente, lo sviluppo binominale.

Nel caso in cui $p = q = 1/2$ i termini dello sviluppo, simmetrici rispetto alla combinazione tipica, sono uguali tra di loro. Se $p \neq q$ i termini simmetrici sono diversi tra loro ma, specialmente quando la differenza tra le p e q è piccola, la asimmetria si attenua al crescere di n.

Nella tabella si sono riportati gli sviluppi al binomio $(1/2 + 1/2)^n$ dove a n sono stati attribuiti i valori di 5, 7, 10; le probabilità delle colonne 3, 8, 13, sono state riportate tutte al medesimo denominatore 2^{10} nelle colonne 4, 9, 14; nelle colonne 5, 10, 15 sono rappresentati gli scarti da n p.

Per la rappresentazione grafica, tenuto conto che gli scarti variano tra $-$ n p e $+$ n p, si sono segnati sull'asse X gli scarti da -5 a $+5$, sull'asse delle Y si sono riportate le probabilità dei singoli scarti, espresse in 1024.mi.

Dalla Figura 1 risulta abbastanza chiaramente come, al crescere di n, diminuiscono le ordinate massime (una o due a seconda che n è pari o dispari) e come nel medesimo tempo si allarghi la base del poligono.

Se si immagina che gli scarti varino in modo continuo i lati del poligono si fondono in una curva continua a forma di campana.

Se n è molto grande, gli estremi della curva si avvicinano indefinitamente all'asse delle X senza mai toccarlo; la curva diventa asintotica: ciò vuol dire che; per n molto grande, la probabilità di ottenere n successi in n prove è molto piccola ma non raggiunge mai lo zero.

Curva di Gauss

Poiché è praticamente impossibile calcolare i termini dello sviluppo binomiale, specie quando n è molto grande si sostituisce al valore esatto dei fattoriali, il valore approssimato dovuto a de Moivre e Stirling.

$$n! \cong n^n \, e^{-n} \sqrt{2 \pi n}$$

Con tali sostituzioni la probabilità della combinazione tipica diviene:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n p q}}$$

e la probabilità dello scarto ℓ:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n p q}} \; e^{-\frac{\ell^2}{2npq}}$$

la quale per $\ell = 0$ si riduce alla precedente.

La probabilità dello scarto ℓ è detta formula esponenziale o anche funzione di Gauss.

Si dice funzione di Gauss perché questo matematico dimostrò che secondo essa si distribuiscono gli errori accidentali.

La funzione fornisce, in via approssimata, la probabilità di uno scarto da np, dove np è il valore medio teorico e dimostra che la probabilità di scarti piccoli dalla media è molto maggiore di quella relativa a scarti grandi.

Preme qui sottolineare inoltre il significato di np come media teorica: essa ha la massima probabilità di verificarsi.

La quantità npq viene indicata di solito μ^2 ed è detta varianza teorica, mentre la sua radice quadra $\mu = \sqrt{npq}$ è detta scarto quadratico medio teorico. Esso misura la dispersione dei valori (le volte in cui l'evento E si verifica, distribuendosi intorno alla media) ed è pertanto un indice di variabilità.

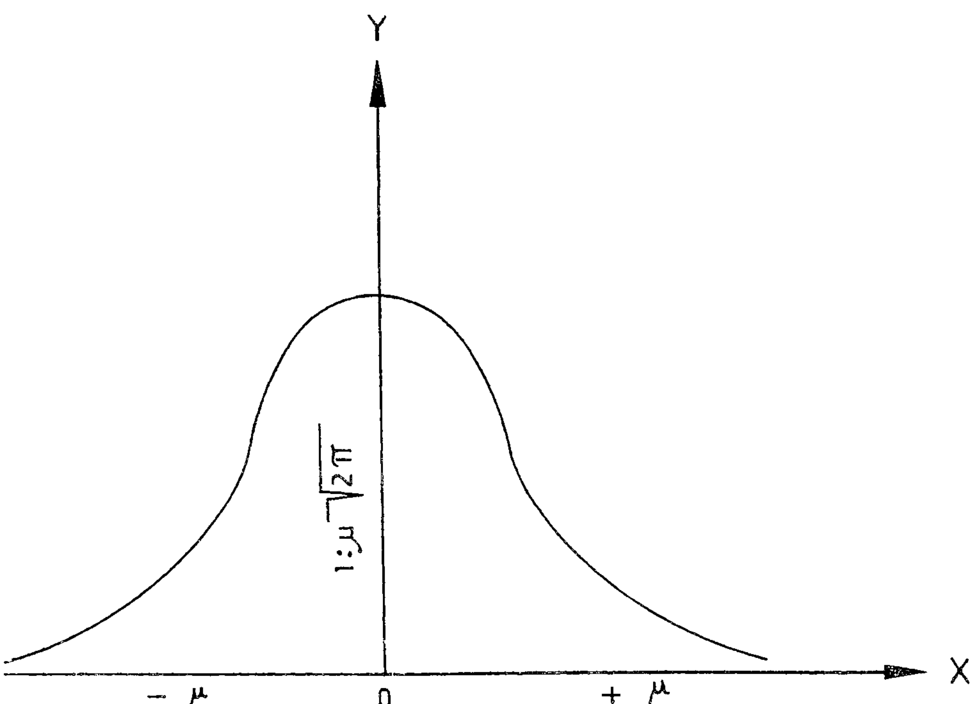

FIG. 2

Chiamiamo Y_ℓ la probabilità di uno scarto ℓ:

$$Y_\ell = \frac{1}{2\,\mu\,\sqrt{\pi}}\; e^{-\frac{\ell^2}{2\,\mu^2}}$$

Se ammettiamo una variazione continua di ℓ tra $-\infty$ e $+\infty$, poiché la somma dello sviluppo del binomio è uguale a 1, si ha:

$$\frac{1}{2\,\mu\,\sqrt{\pi}} \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-\frac{\ell^2}{2\,\mu^2}}\, d\ell = 1$$

L'integrale di cui sopra descrive una curva detta appunto curva di Gauss (fig. 2) o degli errori accidentali.

L'ordinata massima della curva si ha in corrispondenza di $\ell = 0$; al crescere di ℓ l'ordinata diminuisce e diviene nulla per $\ell = \pm\infty$

La funzione, inoltre, assume valori uguali per scarti ℓ di uguale grandezza anche se di segno contrario.