OSSERVAZIONI DIRETTE

Attilio Selvini

1.1 — Nelle precedenti lezioni è stato detto come le misure di una grandezza, siano ritenute ad ogni effetto delle « estrazioni a caso » dalla popolazione di tutte le misure possibili di quella determinata grandezza.

E' giusto quindi trattare una serie di misure della stessa grandezza, come « variabili casuali », descrivendole perciò attraverso quegli indici significativi che sono la media e lo scarto quadratico medio. Ricorderò che si tratterà di indici « empirici », scostati da quelli teorici, per esser stata esaminata solo una parte, della popolazione di tutte le misure possibili. Perciò poi si calcolerà lo « scarto quadratico medio della media », cioè quello che si può pensare come lo scostamento medio della media empirica, dalla media teorica.

L'esercizio che segue, indica il modo di procedere. I dati delle osservazioni, gli scarti, i loro quadrati, sono raccolti in una tabella che è molto utile per una razionale disposizione e per la successiva esecuzione dei calcoli.

1.2 — Di una distanza fra due punti si sono eseguite 10 misure di uguale precisione. Calcolare il valore più probabile della distanza (media aritmetica), l'errore quadratico medio di ciascuna misura (ossia della variabile casuale da cui tutte le dieci misure sono state estratte a caso) e l'errore medio della media aritmetica già calcolata.

N°	l
1	155,43 m
2	,45
3	,42
4	,46
5	,44
6	,41
7	,43
8	,47
9	,44
10	,45

o_i	v_i	v_i^2
3	—1	1
5	1	1
2	—2	4
6	2	4
4	0	0
1	—3	9
3	—1	1
7	3	9
4	0	0
5	1	1
$[o_i] = 40$	$[v_i] = 0$	$[v_i^2] = 30$

Come si vede, la somma degli scarti è nulla:

$$[v_i] = 0$$

La media è perciò data da:

$$M_1' = \frac{[o_i]}{n} = \frac{40}{10} = 4$$

lo scarto quadratico medio empirico è fornito dalla seguente espressione:

$$m'^2_1 = \frac{[v_i^2]}{n-1} = \frac{30}{9} = 3{,}33$$

mentre lo scostamento medio della media empirica da quella teorica si calcola come segue:

$$m_M' = \pm \frac{m_1'}{\sqrt{n}} = \pm \frac{1{,}82}{3{,}16} = \pm\ 0{,}6$$

La distanza misurata, dopo la elaborazione dei dati come fatto sopra, verrà scritta:

$$l = 155{,}44 \pm 0{,}006 \text{ m}$$

2.1 — Quando si è in presenza di più valori di una certa quantità, ottenuti per vie diverse (diversi operatori, diversi strumenti, diverse situazioni ambientali, eccetera) non è più lecito considerare tali valori come estrazioni a caso dalla stessa popolazione. Non ha più senso, pertanto, ricorrere alla media aritmetica semplice ed agli altri indici connessi, per descrivere la distribuzione di una popolazione che non è più unica. Come è stato detto nelle precedenti conferenze, è allora necessario far ricorso alla « media ponderata ». Sul significato dei pesi e sulle rappresentazioni fisiche che se ne possono dare non insisto, perché credo che si tratti di questione già chiarita. Invece, attraverso gli esempî numerici che seguono, vorrei ribadire per bene le modalità che guidano la scelta di tali « pesi ».

2.2 — La quota del vertice A è stata misurata partendo da 4 vertici di quota nota A_1 A_2 A_3 A_4, di cui sono anche note le distanze da A. Il metodo di misura adottato permette di stabilire che i pesi dei dislivelli misurati sono inversamente proporzionali ai quadrati di tali distanze.
Calcolare il valore più probabile della quota di A ed il suo errore medio.

q =	251,18 m	251,15 m	251,23 m	251,28 m
d =	1,6 km	2,1 km	2,9 km	3,4 km

In questo caso, come del resto nei seguenti tenendo conto che la scelta dei pesi dipende da una costante arbitraria, useremo l'accorgimento di attribuire peso « uno » alla osservazione meno « precisa », in questo esempio alla quota determinata da maggior distanza. In tal modo, tutte le altre osservazioni avranno peso maggiore di uno; il che può — talvolta — semplificare i calcoli. Però sia chiaro: la scelta dipende da una costante arbitraria; infatti si sarebbe potuto seguire il processo inverso, ponendo uguale ad « uno » il peso della osservazione più « precisa »: i risultati non sarebbero mutati.
Anche qui si ricorrerà ad una tabellina, per ordinare lo svolgimento dei calcoli e facilitarlo.

2.2.1 — Scelta dei pesi: tenendo conto di quanto detto sopra, sarà:

$$p_4 = 1; \qquad p_3 = \frac{3{,}4^2}{2{,}9^2} = 1{,}37$$

$$p_2 = \frac{3{,}4^2}{2{,}1^2} = 2{,}62; \qquad p_1 = \frac{3{,}4^2}{1{,}6^2} = 4{,}51$$

2.2.2 — I calcoli si svolgeranno per il tramite della tabella sottostante:

o_i	p_i	o_ip_i	v_i	v_i^2	v_ip_i	$v_i^2p_i$
18	4,51	81,18	—0,9	0,81	— 4,06	3,65
15	2,62	39,30	—3,9	15,44	—10,22	40,45
23	1,37	31,52	4,1	16,81	5,62	23,03
28	1	28,00	9,1	82,81	9,10	82,81
	9,50	180,00			0,44	149,94

Il controllo, che vuole $[v_ip_i] = 0$, è soddisfacente; il piccolo residuo (0,44) è dovuto all'approssimazione del calcolo.

2.2.3 — Coi valori ottenuti dalla tabellina, si ha:

$$M'_p = \frac{[o_i\ p_i]}{[p_i]} = \frac{180,00}{9,50} = 18,9$$

si calcola poi l'errore quadratico medio dell'unità di peso:

$$m'^2_o = \frac{[v_i^2\ p_i]}{n-1} = \frac{149,94}{3} = 49,98$$

infine, l'errore medio della media ponderata risulta pari a:

$$m'_{M'p} = \pm \frac{m'_o}{[p_i]^{1/2}} = \pm \frac{7,06}{3,08} = \pm\ 2,3$$

La quota più probabile del vertice A, sarà perciò:

$$Q_A = 251,18._9 \pm 0,02._3 \text{ metri}$$

2.3 — L'ampiezza di un angolo è stata misurata da 5 osservatori diversi. Si è potuto stabilire a priori quale errore medio attribuire alla misura fatta da ciascuno dei cinque osservatori.

Determinare il valore più probabile dell'ampiezza dell'angolo ed il suo errore medio.

N	θ	m'
1	156°13'17,7"	2,0"
2	16,9	1,0
3	17,5	1,5
4	18,0	1,2
5	17,1	1,4

Dato che sono già noti gli errori medi, anche la scelta dei pesi sarà facile: basterà ricordare, come essi siano inversamente proporzionali ai quadrati dei singoli errori medi.

2.3.1 — $$p_1 = 1; \quad p_2 = \frac{4}{1} = 4; \quad p_3 = \frac{4}{2,25} = 1,78$$

$$p_4 = \frac{4}{1,44} = 2,77; \quad p_5 = \frac{4}{1,96} = 2,04$$

2.3.2 — Con l'ausilio della tabellina, si avranno i seguenti elementi:

o_i	p_i	$o_i\,p_i$	v_i	v_i^2	$v_i\,p_i$	$v_i^2\,p_i$
7,7	1	7,70	0,34	0,12	0,34	0,12
6,9	4	27,60	—0,46	0,21	—1,84	0,84
7,5	1,78	13,35	0,14	0,10	0,25	0,18
8,0	2,77	22,16	0,64	0,41	1,77	1,13
7,1	2,04	14,48	—0,26	0,68	—0,53	1,39
	11,59	85,29			—0,01	3,66

Anche qui, il solito controllo dà: $[v_i\,p_i] = -0,01$. Si ha poi:

2.3.3 — $$M_p' = \frac{85,29}{11,59} = 7,36$$

L'errore quadratico dell'unità di peso risulta essere:

$$m_o'^2 = \frac{3,66}{4} = 0,91$$

e quindi l'errore medio vale:

$$m'_{M'p} = \pm \frac{0,95}{3,40} = \pm\ 0,28.$$

Pertanto, l'angolo misurato si scriverà, come valore più probabile:

$$\theta = 156^\circ 13' 17'',36 \pm 0'',28$$

2.4 — E per ultimo, siamo in presenza di tre serie di misure dello stesso angolo:

di uno stesso angolo si sono eseguite tre serie di misure A, B, C con diverse modalità, e quindi con diversa precisione. Nell'ambito di una stessa serie si può invece supporre che le varie misure abbiano la stessa precisione.

Calcolare, per ciascuna serie, il valore medio, l'errore quadratico medio di una misura, l'errore medio della media (vedi esercizio n. 1).

Si usino poi i valori medi M_A', M_B', M_C' come osservazioni di peso diverso e si ricavi la loro media ponderata, l'errore medio di tale media ponderata e l'errore medio dell'unità di peso.

A	B	C
87°12'23"	87°12'21"	87°12'23"
27	25	30
25	19	22
27	28	26
23	32	27
24	22	
24	18	
22	30	
	25	
	19	

2.4.1 — Dapprima, determineremo le medie empiriche M_A', M_B', M_C' coi relativi e.q.m., come al punto 1.2 —:

A

o_i	v_i	v_i^2
3	—1,4	1,96
7	2,6	6,76
5	0,6	0,36
7	2,6	6,76
3	—1,4	1,96
4	—0,4	0,16
4	—0,4	0,16
2	—2,4	5,76
35	—0,2	23,88

B

o_i	v_i	v_i^2
21	—2,9	12,37
25	1,1	1,21
19	—4,9	24,01
28	4,1	16,81
32	8,1	65,61
22	—1,9	3,61
18	—5,9	34,81
30	6,1	37,21
25	1,1	1,21
19	—4,9	24,01
239	0	220,86

C

o_i	v_i	v_i^2
23	—2,6	6,76
30	4,4	19,36
22	—3,6	12,96
26	0,4	0,16
27	1,4	1,96
128	0	41,20

Le medie ed i loro e.q.m. sono rispettivamente:

$$M_A' = \frac{35}{8} = 4,4 \qquad m''^2_{M'_A} = \frac{[v^2]}{n.\ (n\text{-}1)} = \frac{23,88}{8 \cdot 7} = 0,43$$

$$M_B' = \frac{239}{10} = 23{,}9 \qquad m''^2_{M'B} = \frac{220{,}86}{10 \cdot 9} = 2{,}45$$

$$M_C' = \frac{128}{5} = 25{,}6 \qquad m'^2_{M'C} = \frac{41{,}20}{4 \cdot 5} = 2{,}06$$

2.4.2 — I pesi saranno scelti proporzionalmente all'inverso degli e.q.m. delle tre serie di misure, come al n° 2.3.1:

$$p_B = 1; \qquad p_A = \frac{2{,}45}{0{,}43} = 5{,}69; \qquad p_C = \frac{2{,}45}{2{,}06} = 1{,}19$$

2.4.3 — La media ponderata delle tre medie M_A', M_B', M_C' si calcolerà al solito modo, con la tabella sottostante.

o_i	p_i	o_ip_i	v_i	v_i^2	v_ip_i	$v_i^2p_i$
4,4	5,69	25,04	—0,12	0,014	—0,68	0,080
3,9	1	3,90	—0,62	0,384	—0,62	0,384
5,6	1,19	6,66	1,08	1,166	1,29	1,387
	7,88	35,60			—0,01	1,851

2.4.4 — Dopo il consueto controllo che fornisce $[p_i]$ = —0,01, si ha:

$$M_p' = \frac{35{,}60}{7{,}88} = 4{,}52$$

L'errore q.m. dell'unità di peso è:

$$m_o'^2 = \frac{1{,}851}{2} = 0{,}925$$

ed infine l'errore medio della media ponderata:

$$m'_{M'p} = \pm \frac{0{,}96}{2{,}80} = \pm\ 0{,}35$$

Allora, l'angolo avrà come valore più probabile:

$$\theta = 87°12'24'',52 \pm 0{,}35$$

3.1. — Spero che questi esempi, invero assai semplici ma riflettenti casi concreti in cui il topografo può imbattersi per le esigenze stesse della sua professione siano stati sufficienti — in unione alle lezioni teoriche precedenti — a far capire come si debba correttamente operare quando si elaborano le grandezze misurate, se si vuole utilizzare in modo razionale gli strumenti di cui si dispone.