LIVELLAZIONI A SCOPO DI RETTIFICA

Comunicazione presentata al XIV Convegno Nazionale della SIFET

Francesco Caruso (*)

I livelli che si costruiscono ed impiegano nell'epoca attuale sono i livelli a cannocchiale fisso, i livelli a manicotto con livella a doppia curvatura e gli autolivelli.

Quindi è tuttora attuale il problema della verifica ed eventuale rettifica dei livelli da parte dell'operatore in campagna, con apposite operazioni di livellazioni a scopo di rettifica.

E' noto infatti che i livelli a cannocchiale mobile, e quindi anche i livelli a manicotto, possono rettificarsi con operazioni eseguite da una sola stazione; ma per i livelli a cannocchiale fisso (del tipo inglese o del tipo con compensatore automatico) è necessario ricorrere ad una doppia livellazione.

La presente nota intende soffermarsi su questo tipo di operazione (doppia livellazione a scopo di rettifica), che anticamente veniva eseguita con il metodo della livellazione reciproca da due estremi o con quello della livellazione dal mezzo e da un estremo.

Ma poiché in ambedue i casi si utilizzano misure di altezze strumentali, che difficilmente possono ottenersi con la necessaria precisione, questi metodi — pur comodi per la semplicità delle relazioni algebriche che forniscono la lettura corretta da imporre all'asse di collimazione per la rettifica — sono stati abbandonati e ne sono stati consigliati altri similari, quali la livellazione dal mezzo e da una stazione prossima ad un estremo, livellazioni simmetriche con stazioni interne od esterne al tratto compreso tra le due stadie, ecc.

Spesso vengono consigliati metodi con almeno una stazione prossima ad un estremo al fine di utilizzare le semplici relazioni algebriche dei metodi classici, trascurando l'errore sulla stadia prossima al livello o per procedere ad una prima rettifica approssimata da perfezionare per successive approssimazioni.

Fermando l'attenzione sull'argomento, risulta che possono impiegarsi diversi metodi semplici che permettono il calcolo della lettura corretta da imporre per la rettifica con formule altrettanto elementari di quelle ottenute coi metodi classici, epperò utilizzando esclusivamente letture alla stadia, e non altezze strumentali.

Per determinare e confrontare i diversi metodi sopra accennati, tenendo conto anche della precisione conseguibile, si ritiene opportuno impostare il problema della doppia livellazione a scopo di rettifica nella forma più generale e dedurre da questa i diversi casi particolari, discutendo la precisione conseguibile in ciascuno caso.

Sia C (fig. 1) il centro di un livello che a bolla centrata (o con compensatore libero) abbia l'asse di collimazione inclinato rispetto alla orizzontale dell'angolo ε, considerato positivo verso l'alto.

L'intervallo di stadia x_0 compreso tra la orizzontale detta ed il prolungamento dell'asse di collimazione si calcola con la formula:

$$x = d \operatorname{tg} \varepsilon.$$

A rigore il valore esatto $x_0 = AB$ va ricavato dal triangolo C A B in cui, tenendo conto dell'angolo al centro ω compreso tra le verticali, risulta:

$$x_0 = \frac{d \operatorname{sen} \varepsilon}{\cos(\varepsilon + \omega)}$$

avendo considerato la distanza topografica d = CB.

* Professore nell'Istituto Tecnico « L. da Vinci » - Trieste.

L'errore che si commette calcolando x_0 mediante la relazione semplificata $d \cdot tg\,\varepsilon$, è:

$$\Delta x = x - x_0 = d\ tg\ \varepsilon \left(1 - \frac{1}{\cos\omega - tg\ \varepsilon\ sen\ \omega}\right)$$

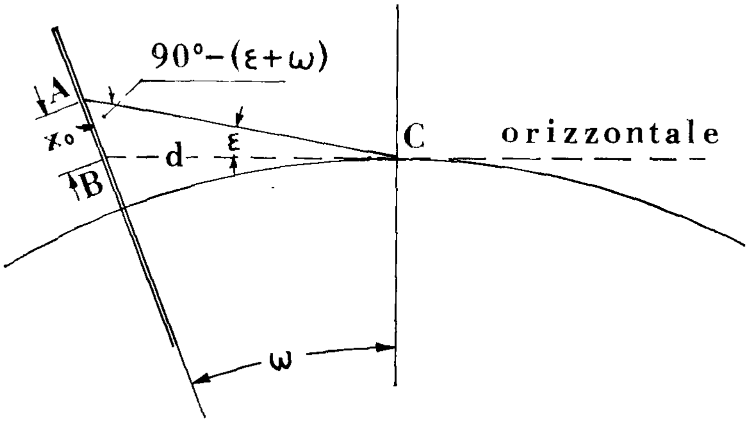

Fig. 1

Per ω sufficientemente piccolo per cui si possano trascurare i termini di 2° grado, il che è largamente verificato per le normali distanze di battuta (esempio per $d = 64$ m. è $\omega = \frac{d}{R} = 0{,}00001$ radianti $\simeq$ 2") si potrà scrivere, esprimendo ω in radianti:

$$x = -\frac{d\ \omega\ tg^2\ \varepsilon}{1 - \omega\ tg\ \varepsilon}$$

e quindi sviluppando in serie il termine $\frac{1}{1 - \omega\ tg\ \varepsilon}$, trascurando i termini in ω di ordine superiore, e tenendo presente che $\omega = \frac{d}{R}$

$$\Delta\ x = -\frac{d^2}{R}\ tg^2\varepsilon.$$

Poniamo valori massimi per la distanza e per l'angolo di mancata rettifica, per esempio:

$d = 100$ m $= 10^5$ mm

$tg\ \varepsilon = 0{,}001 = 10^{-3}$ (tale valore provocherebbe un errore alla stadia di ben 100 mm alla distanza di 100 m). Sarà in mm:

$$-\Delta x = \frac{(10^5 \cdot 10^{-3})^2}{6{,}37 \cdot 10^9} < 2 \cdot 10^{-6}\,\text{mm}.$$

Quindi anche in questo caso limite l'errore commesso calcolando x_0 con la relazione $x = d \operatorname{tg} \varepsilon$, cioè trascurando la convergenza delle verticali, è inferiore a 2 milionesimi di millimetro.

Considerando, ora, una battuta semplice — a livella centrata — da una stazione con centro C_1 ad una stadia collocata su un picchetto P_1 (fig. 2), l'esatto dislivello tra la quota del picchetto e la superficie di livello (sferica) passante per C_1 è:

$$\Delta_{P_1 C_1} = l_{11} + r_{11} - x_{11} - s_{11} = l_{11} - d_{11} \operatorname{tg} \varepsilon - e_{11}$$

avendo indicato con $e_{11} = s_{11} - r_{11}$ l'errore complessivo di sfericità e rifrazione relativo alla distanza d_{11}.

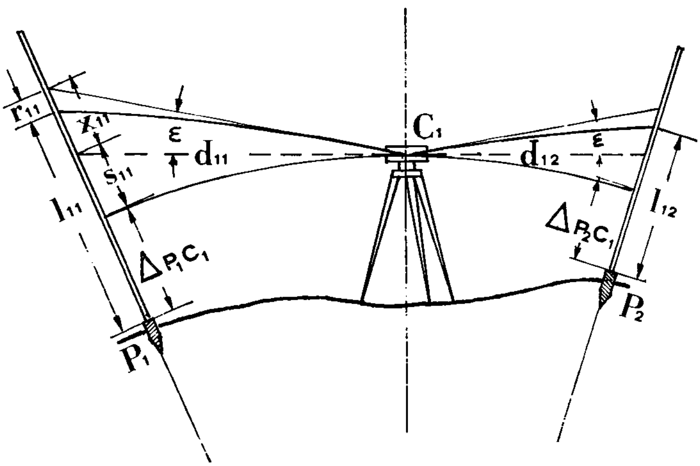

Fig. 2

Analogamente per una successiva battuta ad una stadia posta su picchetto P_2 eseguita dalla stessa stazione e con livella sempre centrata (o con compensatore libero) talché si possa considerare costante l'angolo ε, qualunque sia la direzione di collimazione in avanti o indietro, sarà:

$$\Delta_{P_2 C_1} = l_{12} - d_{12} \operatorname{tg} \varepsilon - e_{12}$$

e il dislivello tra i due picchetti risulta in valore e segno, indipendentemente da qualsiasi misura di altezze strumentali:

$$\Delta_{P_1 P_2} = \Delta_{P_1 C_1} - \Delta_{P_2 C_1} = (l_{11} - l_{12}) - (d_{11} - d_{12}) \operatorname{tg} \varepsilon - (e_{11} - e_{12}).$$

Se da una seconda stazione con centro in C_2 si batte con lo stesso livello e con le condizioni suddette alle stesse stadie o ad una stadia posta successivamente sugli stessi picchetti P_1 e P_2, sarà:

$$\Delta_{P_1 P_2} = (l_{21} - l_{22}) - (d_{21} - d_{22}) \operatorname{tg} \varepsilon - (e_{21} - e_{22}).$$

Dalle due relazioni che forniscono lo stesso dislivello si ricava:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{(l_{11} - l_{12} - l_{21} + l_{22}) - (e_{11} - e_{12} - e_{21} + e_{22})}{d_{11} - d_{12} - d_{21} + d_{22}}$$

La lettura corretta y'_{22} da imporre al cannocchiale nella seconda stazione sulla seconda stadia, affinché l'asse di collimazione risulti orizzontale è:

$$y'_{22} = l_{22} - x_{22} = l_{22} - d_{22} \operatorname{tg} \varepsilon$$

e sostituendo il valore di tg ε

$$y'_{22} = \beta\,(-l_{11} + l_{12} + l_{21}) + (1 - \beta)\, l_{22} + \beta\,(e_{11} - e_{12} - e_{21} + e_{22})$$

in cui

$$\beta = \frac{d_{22}}{d_{11} - d_{12} - d_{21} + d_{22}}$$

Nei simboli indicati il primo indice si riferisce sempre al numero della stazione, il secondo indice al numero della stadia (o al numero del picchetto, se si impiega una sola stadia).

Si osserva che mentre il dislivello $\Delta_{P_1 P_2}$ e l'angolo ε possono essere positivi o negativi, tutti i termini che intervengono nelle formule di tg ε e di y'_{22}, cioè letture alla stadia, distanze ed errori complessivi di sfericità e rifrazione sono esclusivamente valori assoluti.

Indicando con m_s la correzione finale per sfericità e rifrazione e quindi con $-m_s$ l'errore sistematico che si commette se si trascura detta correzione e con $\pm\, m_a$ l'errore quadratico medio (accidentale) sulla lettura da imporre, derivante dagli errori accidentali di cui saranno affette le singole letture alla stadia, si potrà genericamente porre:

$$y'_{22} = y_{22} + m_s \pm m_a$$

in cui

$$y_{22} = \beta\,(-l_{11} + l_{12} + l_{21}) + (1 - \beta)\, l_{22}$$

$$m_s = \beta\,(e_{11} - e_{12} - e_{21} + e_{22}).$$

Dalle relazioni che forniscono l'angolo di mancata rettifica ε e la lettura corretta y'_{22}, risulta che è possibile la loro determinazione soltanto se il denominatore di tg ε, che è anche denominatore del coefficente β, è diverso da zero.

Dev'essere **quindi:**

$$d_{11} - d_{12} - d_{21} + d_{22} = (d_{11} - d_{12}) - (d_{21} - d_{21}) \neq 0.$$

Pertanto non è possibile determinare y_{22}, se le stazioni sono scelte sull'allineamento $P_1 P_2$ ambedue esterne e dalla stessa parte, perché essendo in tale caso

$$d_{11} - d_{12} = d_{21} - d_{22} = P_1 P_2$$

ovvero

$$d_{21} - d_{11} = d_{22} - d_{21} = P_1 P_2$$

il denominatore detto risulterebbe nullo.

Analoga indeterminazione si ottiene se si scelgono le due stazioni planimetricamente sull'asse di simmetria del segmento $P_1 P_2$ per cui

$$d_{11} - d_{12} = 0 \quad \text{e} \quad d_{21} - d_{22} = 0.$$

Escludendo questi casi di indeterminazione e riferendoci a stazioni scelte sull'allineamento $P_1 P_2$, resta possibile la determinazione della lettura corretta da imporre per la rettifica con i seguenti metodi, salvo particolari condizioni di indeterminazione che verranno esaminate per ciascun metodo:

1. - Stazioni esterne e da parti opposte al tratto $P_1 P_2$ compreso tra le due stadie.
2. - Stazioni interne al tratto $P_1 P_2$.
3. - Prima stazione interna e seconda esterna, dalla parte di P_1.
4. - Prima stazione interna e seconda esterna, dalla parte di P_2.
5. - Prima stazione esterna dal lato di P_1 e seconda interna.
6. - Prima stazione esterna dal lato di P_2 e seconda interna.

Sono casi limiti dei metodi sopradetti quelli classici e cioè:

A - Livellazione dal mezzo e da un estremo.

B - Livellazione da due estremi (reciproca).

Al fine di eseguire il confronto tra i diversi metodi possibili, si considererà fissa la distanza d_{22} alla quale si intende eseguire la rettifica, che è opportuno sia la distanza alla quale si impiega il livello nell'uso normale, e, per brevità di simbolo, tale distanza sarà d'ora in poi indicata semplicemente d, cioè

$$d = d_{22}$$

Indicheremo poi con appositi simboli i rapporti delle altre tre distanze rispetto a d

$$\alpha_0 = \frac{d_{11}}{d} \qquad \alpha_1 = \frac{d_{12}}{d} \qquad \alpha_2 = \frac{d_{21}}{d}$$

Tali rapporti non sono tra di loro indipendenti, poiché fra le distanze considerate intercorre una relazione di somma o differenza del tipo

$$\pm d_{11} \pm d_{12} \pm d_{21} = d$$

che si trasforma nella seguente

$$\pm \alpha_0 \pm \alpha_1 \pm \alpha_2 = 1$$

la quale dà luogo a 8 relazioni algebriche diverse, numero delle disposizioni complete di bit (i segni + e —) in gruppi di tre.

Ma poiché è stato escluso il caso delle due stazioni esterne e della stessa parte (con il quale si otterrebbe $d_{12} - d_{11} = d - d_{21}$ e quindi $-\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1$) e poiché la distanza d deve risultare in ogni caso positiva (le distanze ed i loro rapporti sono esclusivamente valori assoluti), escludendo le disposizioni di segni — + + e — — —, restano possibili 6 diverse relazioni che, come si vedrà, corrispondono ai 6 metodi elencati.

Impiegando i rapporti sopraddetti, il coefficiente che interviene nel calcolo della y_{22} si trasforma in

$$\beta = \frac{1}{\alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + 1}$$

Errore sistematico

La correzione per l'errore sistematico di sfericità e rifrazione, calcolata precedentemente, tenendo presente il valore di β e che

$$e_{ii} = \frac{1 - K}{2\,R}\, d^2_{ii}$$

risulta

$$m_s = e\, \frac{\alpha_0^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + 1}{\alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + 1}$$

Si è indicato con e l'errore di sfericità e rifrazione che corrisponde alla distanza d, cioè

$$e = \frac{1\text{-}K}{2R}\, d^2 = \frac{1\text{-}K}{2R}\, d_{22}^2 = e_{22}$$

Nella tabella n. 1 sono riportati i valori di e corrispondenti alle varie distanze, per K = 0,14 ed R = 6370 Km.

TABELLA N. 1

Distanza di battuta d	Errore di sfericità e rifrazione e
m 10	mm 0,01
20	0,03
30	0,06
40	0,11
50	0,17
60	0,24
70	0,33
80	0,43
90	0,55
100	0,68

Errore accidentale

L'errore accidentale medio m_a che compete alla lettura y_{22}, determinata mediante funzione lineare delle letture alla stadia, dipende dall'errore accidentale m_{ii} di ciascuna battuta eseguita alla stadia con livella centrata (o compensatore libero) e con stadia verticale.

L'errore m_{ii} di ciascuna battuta deriva da:

1 - imprecisione nella verticalità della stadia, che provoca un errore $m_v = C_1$ indipendente dalla distanza di battuta;

2 - imprecisione nell'apprezzamento dell'intervallo di graduazione della stadia (se la lettura è eseguita a stima) o nel puntamento (se la lettura è eseguita con l'ausilio di lastra pian parallela); tale errore risulta proporzionale alla radice quadrata della distanza di battuta, secondo le classiche esperienze di Reinhertz, i cui risultati — almeno qualitativamente — sono normalmente accettati: $m_l = C \sqrt{d_{ij}}$.

3 - imprecisione nel centramento della livella o minima imprecisione nello stabilizzarsi del compensatore, che provoca alla stadia un errore proporzionale alla distanza: $m_c = C_2 d_{ij}$.

Quindi per l'errore medio di una battuta vale la relazione:

$$m^2_{ij} = m^2_v + m^2_l + m^2_c = C^2_1 + C^2 d_{ij} + C^2_2 d^2_{ij}$$

Nelle livellazioni per rettifica, nella ipotesi che siano verificate con la necessaria accuratezza la verticalità della stadia ed il centramento della livella in ciascuna battuta e che le distanze di battuta non siano eccessivamente grandi, il secondo dei tre termini che compongono m^2_{ij} può considerarsi prevalente rispetto agli altri, per cui si può porre:

$$m^2_{ij} = C^2 d_{ij}$$

e quindi

$$m_{ij} = C \sqrt{d_{ij}}$$

Con tale ipotesi, l'errore medio accidentale, che compete alla lettura calcolata

$$m^2_a = \beta^2 m_{11}^2 + \beta^2 m_{12}^2 + \beta^2 m_{21}^2 + (1 - \beta)^2 m_{22}^2$$

risulta

$$m^2_a = C^2 [\beta^2 (d_{11} + d_{12} + d_{21}) + (1 - \beta)^2 d]$$

Sviluppando, ponendo in evidenza d, tenendo presente il valore di β in funzione dei rapporti α_0, α_1, α_2, e chiamando con m l'errore accidentale di battuta alla distanza d a cui si intende effettuare la rettifica, cioè ponendo

$$m = C \sqrt{d_{22}} = C \sqrt{d}$$

si ottiene

$$m_a = m \frac{\sqrt{(\alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2)^2 + \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}}{\alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + 1}$$

Per ciascun metodo si potrà calcolare l'errore accidentale con cui si determina la lettura corretta esprimendo uno dei coefficienti α in funzione degli altri, a seconda del metodo che si considera.

Con la guida delle relazioni generali esposte, si possono facilmente studiare e confrontare i metodi possibili.

Metodo n. 1

Livellazione da due stazioni esterne

Le due stazioni, come già osservato, devono essere da parti opposte al tratto $P_1 P_2$ compreso tra i due picchetti.

Siano scelte le stazioni nell'ordine: $S_1 — P_1 — P_2 — S_2$. Si ha:

$$d_{11} + d_{21} = d_{12} + d \qquad \text{con } d_{21} > d$$

e quindi

$$+ \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \qquad \text{con } \alpha_2 > 1.$$

Siano, invece, scelte le stazioni nell'ordine $S_2 — P_1 — P_2 — S_1$.

Sarà: z

$$d_{21} + d_{11} = d + d_{12} \qquad \text{con } d_{21} < d$$

e quindi

$$+ \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \qquad \text{con } \alpha_2 < 1.$$

Pertanto la ultima relazione scritta tra i rapporti resta valida sia per $\alpha_2 > 1$ che per $\alpha_2 < 1$.

Esprimendo α_0 in funzione di α_1 ed α_2
e sostituendo tale valore nelle formule generali si ottiene:

$$\beta = \frac{1}{2\,(1 - \alpha_2)}$$

Si ha indeterminazione per $\alpha_2 = 1$, ossia $d_{21} = d$.

Ciò si verifica soltanto se i picchetti P_1 e P_2 coincidono. Escludendo tale caso con cui verrebbero a mancare 2 delle 4 letture, abbiamo

$$y_{22} = \frac{1}{2}\left[(1 + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2})\,(-1_{11} + 1_{12} + 1_{21}) + (1 - \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2})\,1_{22}\right]$$

$$m_s = e\,(1 + \alpha_1) > e$$

$$m_a = \frac{m}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{\alpha_1 + \alpha_2^2}{(1 - \alpha_2)^2}}$$

Poiché il minimo errore accidentale m_a si ottiene per α_1 ed α_2 tendenti a zero, converrà adottare *esclusivamente* la successione $S_2 - P_1 - P_2 - S_1$ con cui è $\alpha_2 < 1$.

Casi particolari.

Metodo n. 1 — a — Chiameremo condizione (a) la posizione $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$.
Si ottiene: livellazione dall'esterno simmetrica, in cui $d_{12} = d_{21}$.

Sarà $$\beta = \frac{1}{2\,(1 - \alpha)}$$

$$y_{22} = 1/2\left[(1 + \frac{\alpha}{1 - \alpha})\,(-1_{11} + 1_{12} + 1_{21}) + (1 - \frac{\alpha}{1 - \alpha})\,1_{22}\right]$$

$$m_s = e\,(1 + \alpha)$$

$$m_a = \frac{m}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{\alpha\,(1+\alpha)}{(1-\alpha)^2}}$$

Esempio: volendo ottenere con la livellazione simmetrica dall'esterno $\beta = 0{,}55$ deve essere $\alpha = \frac{1}{11}$. In tal caso

$$y_{22} = {}^1/_2 \left[(-l_{11} + l_{12} + l_{21})\left(1 + \frac{1}{10}\right) + l_{22}\left(1 - \frac{1}{10}\right) \right]$$

relazione che si presta ad un calcolo semplice in campagna, che non richiede moltiplicazioni.

$$m_s = e\left(1 + \frac{1}{11}\right) = e \cdot 1{,}09$$

$$m_a = m\,\frac{\sqrt{14}}{5} = m \cdot 0{,}75 < m.$$

Metodo n. 1 — b — Chiameremo in genere condizione (b) quella che permette di eliminare nel calcolo della y_{22} la quarta lettura alla stadia l_{22}.

A tal fine bisogna porre la condizione $1 - \beta = 0$, e per il metodo in esame

$$\alpha_2 = {}^1/_2 \qquad \text{cioè } d_{21} = \frac{d}{2} = P_1\,P_2$$

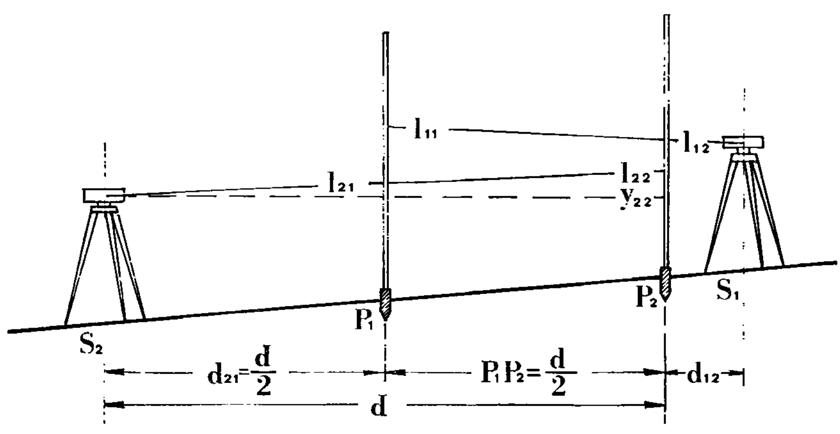

Fig.3

Si ottiene allora una particolare doppia livellazione da due stazioni esterne con distanza tra le stadie pari a metà della distanza di rettifica (fig. 3). Risulta

$$y_{22} = -l_{11} + l_{12} + l_{21}$$

$$m_s = e\,(1 + \alpha_1)$$

$$m_a = m \sqrt{1 + 2\,\alpha_1} > m$$

Tale metodo offre il vantaggio di un calcolo particolarmente semplice per la lettura corretta, analogo a quello per la livellazione dal mezzo e da un estremo, e che è valido qualunque sia la distanza d_{12}, cioè la posizione della 1ª stazione, purché esterna e dalla parte opposta di S_2.

Per ridurre al minimo l'errore accidentale converrà scegliere la stazione S_1 (esterna) prossima il più possibile alla 2ª stadia.

Si fissi per esempio: $d = 44m.$ $\quad d_{12} = \dfrac{d}{11} = 4m.$ e quindi $P_1P_2 = 22m.$;

per $\alpha_1 = \dfrac{1}{11}$ risulta

$$m_s = e\left(1 + \frac{1}{11}\right) = e \cdot 1{,}09$$

$$m_a = m \sqrt{1 + \frac{2}{11}} = m \cdot 1{,}09$$

Metodo n. 1 - c - Chiameremo condizione (c) quella che soddisfa contemporaneamente alle condizioni (a) e (b).

Ponendo: $\quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 1/2$

si ottiene: livellazione simmetrica e con distanza tra le stadie pari a metà della distanza di rettifica, con $d_{12} = d_{21} = \dfrac{d}{2} = P_1P_2$

$$y_{22} = -l_{11} + l_{12} + l_{21}$$

$$m_s = e\,(1 + 1/2) = e \cdot 1{,}50$$

$$m_a = m\sqrt{2} = m \cdot 1{,}41 > m$$

Questo metodo è proposto dalla Wild per la rettifica dei propri livelli, per la semplicità della formula che fornisce la lettura corretta.

Si osserva però che lo stesso risultato si ottiene con il metodo 1-b più generale; quindi non è necessario che le due stazioni siano simmetriche, anzi per aumentare la precisione della rettifica è opportuno che la prima stazione sia prossima alla 2ª stadia.

Metodo n. 2

Livellazione da due stazioni interne

La posizione delle stazioni può essere nell'ordine $P_1 - S_1 - S_2 - P_2$ oppure $P_1 - S_2 - S_1 - P_2$.

Nel 1° caso

$$d_{11} + d_{12} = d_{21} + d \qquad \text{con } d_{12} > d$$

cioè

$$+ \alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 = 1 \qquad \text{con } \alpha_1 > 1$$

Nel 2° caso:

$$d_{11} + d_{12} = d_{21} + d \qquad \text{con } d_{12} < d$$

e quindi

$$+ \alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 = 1 \qquad \text{con } \alpha_1 < 1$$

L'ultima relazione tra i rapporti è perciò valida sia per $\alpha_1 > 1$ che per $\alpha_1 < 1$.

Esprimiamo α_0 in funzione di α_1 ed α_2 e sostituiamo tale valore nelle relazioni generali. Si ottiene

$$\beta = \frac{1}{2(1-\alpha_1)}$$

Si osserva che l'errore accidentale m_a tende al minimo per α_1 ed α_2 tendenti a zero, pertanto converrà adottare *esclusivamente* la successione $P_1 - S_2 - S_1 - P_2$ affinché sia $\alpha_1 < 1$.

Casi particolari.

Metodo n. 2 - a - Fissando la condizione (a): $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, si ottiene la livellazione simmetrica dall'interno con $d_{12} = d_{21}$.

$$\text{Risulta} \quad \beta = \frac{1}{2(1-\alpha)}$$

$$y_{22} = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)(-l_{11} + l_{12} + l_{21}) + \left(1 - \frac{\alpha}{1-\alpha}\right) l_{22}\right]$$

$$m_s = e(1+\alpha)$$

$$m_a = \frac{m}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^2}}$$

Per ottenere con livellazione simmetrica dall'interno $\beta = 0{,}55$ deve essere $\alpha = \dfrac{1}{11}$.

In tal caso:

$$y_{22} = \frac{1}{2}\left[(-l_{11} + l_{12} + l_{21})\left(1 + \frac{1}{10}\right) + l_{22}\left(1 - \frac{1}{10}\right)\right]$$

$$m_s = e\left(1 + \frac{1}{11}\right) = e \cdot 1{,}09$$

$$m_a = m\frac{\sqrt{14}}{5} = m \cdot 0{,}75 < m$$

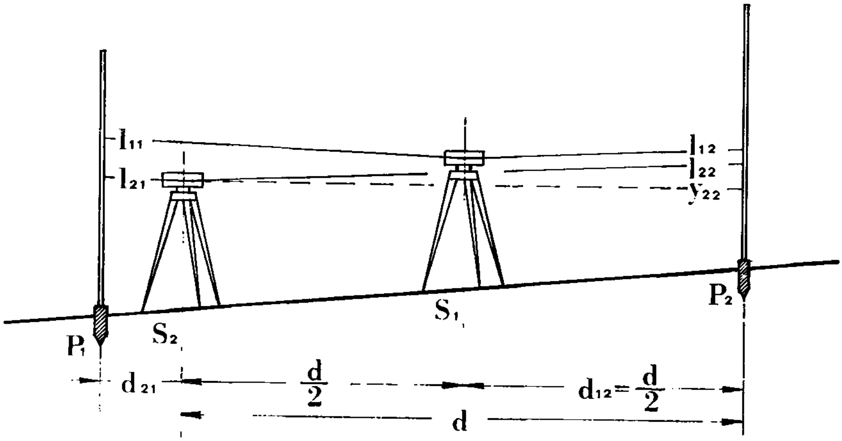

Fig. 4

Metodo n. 2 - b - Anche la doppia livellazione dall'interno si può eseguire utilizzando soltanto tre letture alla stadia. Per eliminare l_{22} occorre imporre la condizione $1 - \beta = 0$ da cui, in tal caso, $\alpha_1 = ½$ cioè $d_{12} = \frac{d}{2}$ (fig. 4). Questa particolare livellazione eseguita prima dal mezzo tra S_2 e P_2 e poi da S_2 in posizione interna a P_1P_2 e prossima a P_1, differisce dal noto metodo della livellazione dal mezzo e dall'interno per il fatto che la prima stazione anziché essere a metà distanza tra P_1 e P_2, è posizionata a metà distanza tra S_2 e P_2, ed ha il vantaggio di fornire la lettura corretta con calcolo semplicissimo ed esatto.

$$y_{22} = -l_{11} + l_{12} + l_{21}$$

$$m_s = e(1 + \alpha_2)$$

$$m_a = m\sqrt{1 + 2\alpha_2} > m$$

Sebbene la relazione che fornisce y_{22} sia valida per qualunque distanza d_{21} e quindi per qualunque posizione di P_1 (restando invece obbligata la posizione di S_1 a metà distanza tra S_2 e P_2), tuttavia per ridurre l'errore sistematico e quello accidentale, è opportuno posizionare P_1 prossimo alla stazione S_2; per esempio, per $d = 44$ m, $d_{12} = \frac{d}{11} = 4$ m.

Dovrà allora essere $d_{12} = 22$ m e $P_1P_2 = 48$ m.

Con $\alpha_2 = \dfrac{1}{11}$ risulta

$$m_s = e\left(1 + \frac{1}{11}\right) = e \cdot 1{,}09$$

$$m_a = m \sqrt{1 + \frac{2}{11}} = m \cdot 1{,}09$$

Metodo n. 2 - c - Rispettando contemporaneamente le condizioni (a) e (b) si ottiene: livellazione simmetrica dai terzi di P_1P_2.

Per $\alpha_1 = \alpha_2 = ½$

cioè $d_{12} = d_{21} = \dfrac{d}{2} = \dfrac{P_1P_2}{3}$

si ottiene:

$$y_{22} = -l_{11} + l_{12} + l_{21}$$

$$m_s = e(1 + ½) = e \cdot 1{,}50$$

$$m_a = m\sqrt{2} = m \cdot 1{,}41 > m$$

Metodo n. 2 - d - Esaminiamo, ora, il metodo della livellazione dal mezzo di P_1P_2 e da una stazione interna prossima a P_1. Questo metodo talora è stato proposto per calcolare l'esatto errore di mancata rettifica x_{22} tenendo conto delle distanze interessate, talvolta è stato proposto per procedere con successive approssimazioni trascurando lo errore x_{21}.

Imponendo $\quad d_{12} = \dfrac{d + d_{21}}{2} = \dfrac{P_1P_2}{2} = d_{11}$

si ottiene $\quad \alpha_1 = \dfrac{1 + \alpha_2}{2} = \alpha_0$

$$\beta = 1 + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2} > 1$$

$$y_{22} = \left(1 + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2}\right)(-l_{11} + l_{12} + l_{21}) - \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2} - l_{22}$$

$$m_s = e\,(1 + \alpha_2)$$

$$m_a = m\,\frac{1 + \alpha_2}{1 - \alpha_2}$$

Esempio: Per ottenere relazione semplice per il calcolo della lettura corretta e contemporaneamente ridurre gli errori sistematico e accidentale fissiamo

$$\alpha_2 = \frac{1}{11} \quad \text{con cui} \quad \beta = 1 + \frac{1}{10}.$$

Si ottiene

$$y_{22} = (1 + \frac{1}{10})\,(-l_{11} + l_{12} + l_{21}) - \frac{1}{10}\,l_{22}$$

$$m_s = e\,(1 + \frac{1}{11}) = e \cdot 1{,}09$$

$$m_a = m\,\frac{6}{5} = m \cdot 1{,}20 > m$$

Metodo n. 3

Livellazione con prima stazione interna a P_1P_2 e seconda stazione esterna (dal lato di P_1)

La successione delle stazioni sarà nell'ordine: $S_2 - P_1 - S_1 - P_2$ e quindi:

$$d_{21} + d_{11} + d_{12} = d \qquad \text{con } d_{12} + d_{21} < d$$

ossia

$$+\,\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \qquad \text{con } \alpha_1 + \alpha_2 < 1$$

Esprimendo α_0 in funzione di α_1 ed α_2

e sostituendo tale valore nelle relazioni generali si ottiene:

$$\beta = \frac{1}{2\,(1 - \alpha_1 - \alpha_2)}$$

Si verifica indeterminazione per $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ossia $d_{12} + d_{21} = d$ e cioè se la stazione S_1 è scelta nel picchetto P_1. Ma con ciò si ricadrebbe al limite del caso delle due stazioni esterne e dalla stessa parte, che è stato escluso a priori. Escludendo tale condizione, abbiamo

$$y_{22} = \frac{1}{2}\left[(1 + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{1 - \alpha_1 - \alpha_2})(-l_{11} + l_{12} + l_{21}) + (1 - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{1 - \alpha_1 - \alpha_2})\,l_{22}\right]$$

$$m_s = e\,(1 + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{1 - \alpha_1 - \alpha_2}) > e$$

$$m_a = \frac{m}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{1 - \alpha_1 - \alpha_2}\right)^2}$$

Casi particolari.

Metodo n. 3 - a - Fissando la condizione (a) cioè $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ si ottiene: livellazione dall'interno e dall'esterno con stazioni equidistanti dalle stadie ad esse vicine: $d_{12} = d_{21}$.

Sarà $\beta = \dfrac{1}{2\,(1 - 2\alpha)}$

$$y_{22} = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{2\alpha}{1-2\alpha}\right)(-l_{11} + l_{12} + l_{21}) + \left(1 - \frac{2\alpha}{1-2\alpha}\right) l_{22}\right]$$

$$m_s = e\left(1 + \frac{\alpha^2}{1-2\alpha}\right)$$

$$m_a = \frac{m}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{2\alpha}{1-2\alpha}\right)^2}$$

Per ottenere coefficiente β semplice e contemporaneamente ridurre gli errori, è opportuno scegliere $\alpha = \dfrac{1}{12}$;

risulta: $\beta = \dfrac{6}{10}$

$$y_{22} = 0{,}6\,(-l_{11} + l_{12} + l_{21}) + 0{,}4\, l_{22}$$

$$m_s = e\left(1 + \frac{1}{120}\right) = e \cdot 1{,}01$$

$$m_a = m\,\frac{\sqrt{13}}{5} = m \cdot 0{,}72 < m$$

Metodo n. 3 - b - Nel calcolo della lettura corretta si può eliminare l_{22} con la condizione (b): $1 - \beta = 0$

da cui $\alpha_1 = \dfrac{1 - 2\alpha_2}{2}$ cioè $d_{12} = \dfrac{d - 2d_{21}}{2}$

Si ottiene un particolare metodo che fornisce una relazione molto semplice per la lettura corretta

$$y_{22} = -l_{11} + l_{12} + l_{21}$$

analoga a quella fornita dalla livellazione dal mezzo e da un estremo, dalla quale il metodo in esame differisce per il fatto che la stazione S_2 è esterna e che la stazione S_1 va collocata a metà distanza fra P_2 e il punto simmetrico di S_2 rispetto a P_1.

Risulta $m_s = e(1 + \alpha_2 - 2\alpha_2^2)$

$m_a = m$

Sia la lettura corretta che l'errore accidentale sono, quindi, indipendenti dalla posizione del picchetto P_1 (purché venga posizionata la stazione S_1 come detto prima). Tuttavia per ridurre l'errore sistematico converrà scegliere d_{21} piccolo.

Esempio: per $d = 44$ m scegliamo $d_{21} = \dfrac{d}{11} = 4$ m e quindi $P_1P_2 = 40$ m e $d_{12} = 18$ m. Per $\alpha_2 = \dfrac{1}{11}$ sarà

$$m_s = e\,\frac{130}{121} = e \cdot 1{,}07$$

$$m_a = m$$

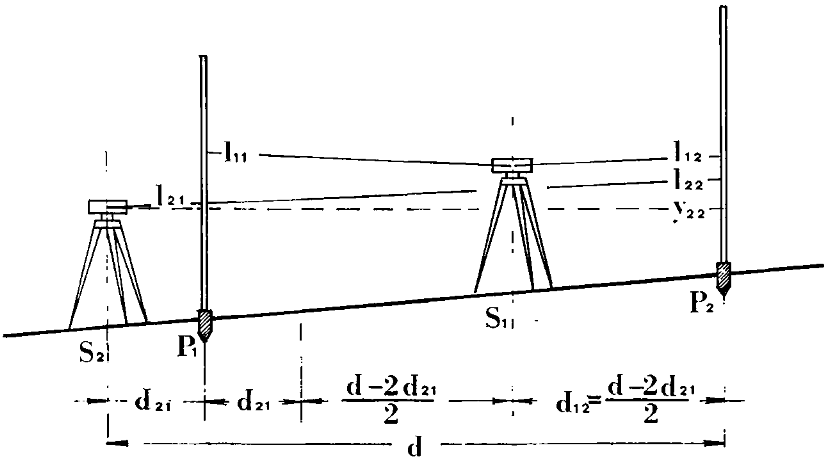

Fig. 5

Metodo n. 3 - c - Affinché siano rispettate contemporaneamente le condizioni (b) e (a) dev'essere

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1 - 2\alpha_2}{2}$$

da cui

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{4} \quad \text{cioè } d_{12} = d_{21} = \frac{d}{4} = \frac{P_1P_2}{3}$$

Si ottiene un metodo molto semplice e pratico che chiameremo dal terzo interno e dal terzo esterno con le seguenti relazioni

$$y_{22} = -l_{11} + l_{12} + l_{21}$$

$$m_s = e\,\frac{9}{8} = e \cdot 1{,}12$$

$$m_a = m$$

Metodo n. 3 - d - Si consideri, ora, il noto metodo della livellazione dal mezzo (P_1P_2) e dall'esterno.

$$d_{12} = d_{11} = \frac{P_1P_2}{2} = \frac{d - d_{21}}{2}$$

quindi $\alpha_1 = \dfrac{1-\alpha_2}{2}$

Risulta:

$$y_{22} = \left(1 + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}\right)(-l_{11} + l_{12} + l_{21}) - \frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}\,l_{22}$$

$$m_s = e\,(1 + \alpha_2)$$

$$m_a = m\,\frac{\sqrt{1+\alpha_2^2}}{1-\alpha_2}$$

Per ottenere β semplice con α_2 piccolo (e quindi piccoli gli errori) converrà scegliere $\alpha_2 = \dfrac{1}{11}$.

In tale caso:

$$y_{22} = \left(1 + \frac{1}{10}\right)(-l_{11} + l_{12} + l_{21}) - \frac{1}{10}\,l_{22}$$

$$m_s = e\,\frac{12}{11} = e \cdot 1{,}09$$

$$m_a = m\,\frac{\sqrt{122}}{10} = m \cdot 1{,}10$$

Metodo n. 3 - e - Come caso particolare della livellazione dal mezzo e dall'esterno è stato suggerito talvolta di collocare la 2ª stazione a distanza da P_1 tale che $d_{21} = P_1P_2$.

Si troverà facilmente che tale criterio, sebbene porti ad una relazione semplice per il calcolo della lettura corretta, è poco opportuno perché aumenta notevolmente l'errore sistematico e, soprattutto, quello accidentale.

Infatti se nelle formule ricavate per il metodo n. 3 — d poniamo

$$d_{21} = P_1 P_2 = \frac{d}{2} \text{ e cioè } \alpha_2 = 1/2 \text{ si ottiene:}$$

$$y_{22} = 2\,(-l_{11} + l_{12} + l_{21}) - l_{22}$$

$$m_s = e\,(1 + 1/2) = e \cdot 1{,}50$$

$$m_a = m\,\sqrt{5} = m \cdot 2{,}24$$

Metodo n. 4

Livellazione con prima stazione interna a $P_1 P_2$ e seconda stazione esterna (dal lato di P_2)

E' analogo al metodo n. 3, ma con successione nella posizione delle stazioni diversa e precisamente: $P_1 - S_1 - P_2 - S_2$.

Si osserva che, fissata la distanza di rettifica d, possono scegliersi a piacere le distanze d_{11} e d_{12}, mentre resta obbligata la distanza d_{21} dalla condizione:

$$d_{21} = d_{11} + d_{12} + d \qquad \text{con } d_{11} \text{ e } d_{12} \text{ arbitrari}$$

ossia

$$-\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \qquad \text{con } \alpha_0 \text{ ed } \alpha_1 \text{ arbitrari}$$

E' quindi opportuno esprimere le relazioni generali in funzione di α_0 ed α_1 che sono arbitrari; ricavando

$$\alpha_2 = 1 + \alpha_0 + \alpha_1$$

e sostituendo tale valore nelle formule generali, si ottiene:

$$\beta = -\frac{1}{2\,\alpha_1}$$

Si verifica indeterminazione per $\alpha_1 = 0$, cioè se la stazione S_1 è scelta nel picchetto P_2 ($d_{12} = 0$), con che si ricade al limite del caso delle due stazioni esterne e dalla stessa parte, escluso a priori.

Al di fuori di tale particolare condizione, si ha:

$$y_{22} = \frac{1}{2\,\alpha_1}\,(l_{11} - l_{12} - l_{21}) + \left(1 + \frac{1}{2\,\alpha_1}\right) l_{12}$$

$$m_s = e\left(1 + \alpha_1 + \alpha_0 + \frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right) > e$$

$$m_a = m\,\sqrt{1 + \frac{3}{2\,\alpha_1} + \frac{1+\alpha_0}{2\,\alpha_1^2}}$$

Dalla espressione di m_a si osserva che per ridurre l'errore accidentale occorre operare con valori di α_1 grandi.

Esempio: per $\alpha_1 = 1$ cioè $d_{12} = d$ risulta $m_a = m \sqrt{3 + \frac{\alpha_0}{2}} > m \sqrt{3}$

Quindi per ottenere valori di m_a sensibilmente inferiori a $m \sqrt{3}$ occorrerebbe scegliere la distanza d_{12} notevolmente maggiore di d (α_1 notevolmente maggiore di 1), con la quale condizione però aumenta molto l'errore sistematico m_s.

Pertanto il metodo in esame, che in sostanza corrisponde al metodo n. 3 con la variante di utilizzare per la rettifica la stadia più prossima alla stazione da cui si esegue la rettifica stessa, come risultava intuitivo, non offre pratica utilità.

Metodo n. 5

Livellazione con prima stazione esterna a $P_1 P_2$ (dalla parte di P_1) e seconda stazione interna.

La successione nella posizione delle stazioni sarà: $S_1 — P_1 — S_2 — P_2$.

Si osserva che fissata la distanza di rettifica d, possono scegliersi a piacere le distanze d_{11} e d_{21}, mentre la d_{12} è obbligata dalla relazione

$$d_{12} = d_{11} + d_{21} + d \qquad \text{con } d_{11} \text{ e } d_{21} \text{ arbitrari}$$

ossia:

$$-\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 = 1 \qquad \text{con } \alpha_0 \text{ ed } \alpha_2 \text{ arbitrari}$$

E' perciò opportuno esprimere le relazioni generali in funzione di α_0 ed α_2. Ricavando

$$\alpha_1 = 1 + \alpha_0 + \alpha_2$$

e sostituendo tale valore nelle formule generali, si ottiene

$$\beta = -\frac{1}{2\,\alpha_2}$$

Indeterminazione: per $\alpha_2 = 0$, cioè se la stazione S_2 è scelta sul picchetto P_1 ($d_{21} = 0$), caso limite della livellazione da due stazioni esterne e dalla stessa parte, che è stato escluso a priori.

Al di fuori di tale caso particolare, si ottiene:

$$y_{22} = \frac{1}{2\,\alpha_2} (l_{11} - l_{12} - l_{21}) + (1 + \frac{1}{2\,\alpha_2})\, l_{22}$$

$$m_s = e\,(1 + \alpha_2 + \alpha_0 + \frac{\alpha_0}{\alpha_2}) > e$$

$$m_a = m \sqrt{1 + \frac{3}{2\,\alpha_2} + \frac{1 + \alpha_0}{2\,\alpha_2^2}}$$

Con ragionamento analogo al caso precedente si deduce che per ridurre l'errore accidentale bisognerebbe scegliere una distanza (questa volta d_{21}) notevolmente grande rispetto a d, con ciò però aumenta molto l'errore sistematico.

Anche questo metodo non offre pratica utilità.

Metodo n. 6

Livellazione con prima stazione esterna (dalla parte di P_2) e seconda stazione interna.

Differisce dal metodo n. 5 per la diversa successione: P_1 — S_2 — P_2 — S_1.
Risulta:

$$d_{11} = d_{21} + d + d_{12} \qquad \text{con } d_{12} \text{ e } d_{21} \text{ arbitrari}$$

e quindi:

$$+ \alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2 = 1 \qquad \text{con } \alpha_1 \text{ ed } \alpha_2 \text{ arbitrari}$$

Ricavando

$$\alpha_0 = 1 + \alpha_1 + \alpha_2$$

e sostituendo tale valore nelle relazioni generali, si ottiene

$$\beta = 1/2$$

Non vi è alcuna possibilità di indeterminazione

$$y_{22} = 1/2\,(-l_{11} + l_{12} + l_{21} + l_{22})$$

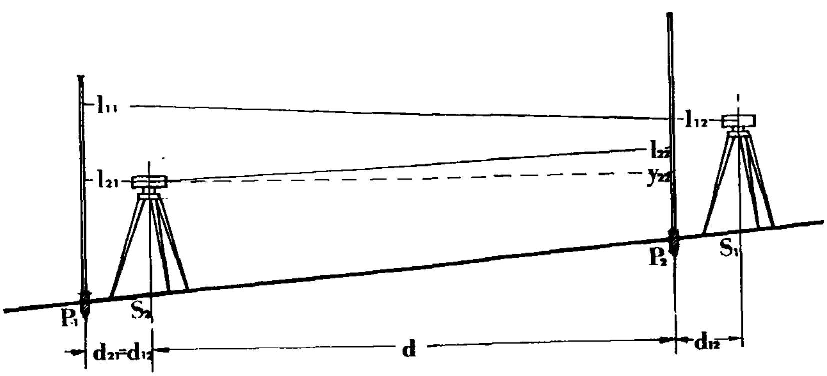

Fig. 6

Si osservi che il calcolo della lettura corretta risulta indipendente da qualsiasi rapporto di distanze

$$m_s = e\,(1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1\,\alpha_2)$$

$$m_a = \frac{m}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \alpha_1 + \alpha_2}$$

Metodo n. 6 - a - Con la consueta condizione (a) per cui $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ cioè $d_{12} = d_{21}$ (fig. 6), si ottiene

$$y_{22} = {}^1/_2 (-l_{11} + l_{12} + l_{21} + l_{22})$$

$$m_s = e\,(1 + 2\,\alpha + \alpha^2) = e\,(1 + \alpha)^2$$

Ma poiché $\alpha = \alpha_2 = \dfrac{d_{21}}{d}$ ed $e = \dfrac{1-K}{2\,R}\,d^2$, si ha

$$m_s = \frac{1-K}{2\,R}\,(d + d_{21})^2$$

Osservando che: $d + d_{21} = P_1 P_2$, risulta anche

$$m_s = \frac{1-K}{2\,R} \cdot \overline{P_1P_2}^{\,2} = e\ P_1P_2$$

Cioè la correzione per sfericità e rifrazione nel metodo in esame è uguale all'errore di sfericità e rifrazione relativo alla distanza tra i picchetti.

Inoltre

$$m_a = m\,\sqrt{{}^1/_2 + \alpha}$$

Per ridurre gli errori (sistematico ed accidentale) sarà opportuno scegliere le stazioni in posizioni prossime alle stadie.

Per esempio: $d = 44$ m, $d_{12} = d_{21} = \dfrac{44}{11} = 4$ m, con che $P_1P_2 = 48$ m.

Per $\alpha = \dfrac{1}{11}$ (esempio che permette il confronto con gli altri analoghi) si ottiene

$$m_s = e\,(1 + \frac{1}{11})^2 = e \cdot 1{,}19$$

$$m_a = m\,\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{11}} = m \cdot 0{,}77$$

Nota: Con il metodo in esame non è possibile realizzare le condizioni (b) e (c), perché β è indipendente da α_1 ed α_2.