C O N C L U S I O N I

Dall'esame di tutti i metodi possibili per determinare, con una doppia livellazione allineata, la lettura corretta y'_{22} da imporre per la rettifica di un livello a cannocchiale fisso è risultato che in ogni caso detta lettura è:

$$y'_{22} = y_{22} + m_s \pm m_a$$

in cui y_{22} è calcolata attraverso le letture eseguite alle stadie, m_s è la correzione per sfericità e rifrazione, $\pm$ m_a è l'errore quadatico medio accidentale da cui è affetta la lettura calcolata.

I metodi esaminati si possono distinguere in 3 gruppi:

1° Gruppo - Metodi (n. 4 e n. 5) che forniscono per la lettura calcolata relazioni del tipo

$$y_{22} = \frac{1}{2\,\alpha} (l_{11} - l_{12} - l_{21}) + (1 + \frac{1}{2\,\alpha}) \, l_{22}$$

in cui α è, secondo i casi, $\frac{d_{12}}{d}$ oppure $\frac{d_{21}}{d}$

Questi metodi sono risultati di scarsa utilità pratica.

2° Gruppo - Metodi (n. 2—d, n. 3—d, n. 3—e) che forniscono relazioni del tipo

$$y_{22} = (1 + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2}) \, (-l_{11} + l_{12} + l_{21}) - \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2} \, l_{22}$$

che per $\alpha_2 = \frac{d_{21}}{d}$ tendente a zero, tende alla espressione più semplice

1) $y_{22} = - \, l_{11} + l_{12} + l_{21}$

con la quale si utilizzano soltanto tre letture e che è analoga alla nota formula della livellazione dal mezzo e da un estremo.

Alla relazione 1) si perviene esattamente con i metodi:
n. 1—b, 1—c, 2—b, 2—c, 3—b, 3—c.

3° Gruppo - Metodi (n. 1—a, n. 2—a, n. 3—a) infine che forniscono relazioni del tipo

$$y_{22} = \tfrac{1}{2} \, (1 + \frac{\alpha}{1 - \alpha}) \, (-l_{11} + l_{12} + l_{21}) + (1 - \frac{\alpha}{1 - \alpha}) \; l_{22}$$

che per $\alpha = \frac{d_{12}}{d} = \frac{d_{21}}{d}$ tendente a zero, tende alla più semplice espressione

2) $y_{22} = \tfrac{1}{2} \, (- \, l_{11} + l_{12} + l_{21} + l_{22})$

che è analoga alla formula della livellazione reciproca da due estremi.

Alla relazione 2) si perviene — e con esattezza — con il metodo n. 6 in genere e n. 6—a in particolare.

La correzione m_s per sfericità e rifrazione risulta *sempre positiva,* sicché trascurando tale correzione, la y_{22} calcolata è affetta da un errore sistematico negativo, che in valore assoluto è sempre maggiore dell'errore di sfericità e rifrazione (e) corrispondente alla distanza a cui si intende eseguire la rettifica, il quale rappresenta il limite verso cui tende m_s quando i rapporti α_1 ed α_2 (secondo i casi) tendono a zero, cioé quando si riducono a zero le distanze d_{12} o d_{21}.

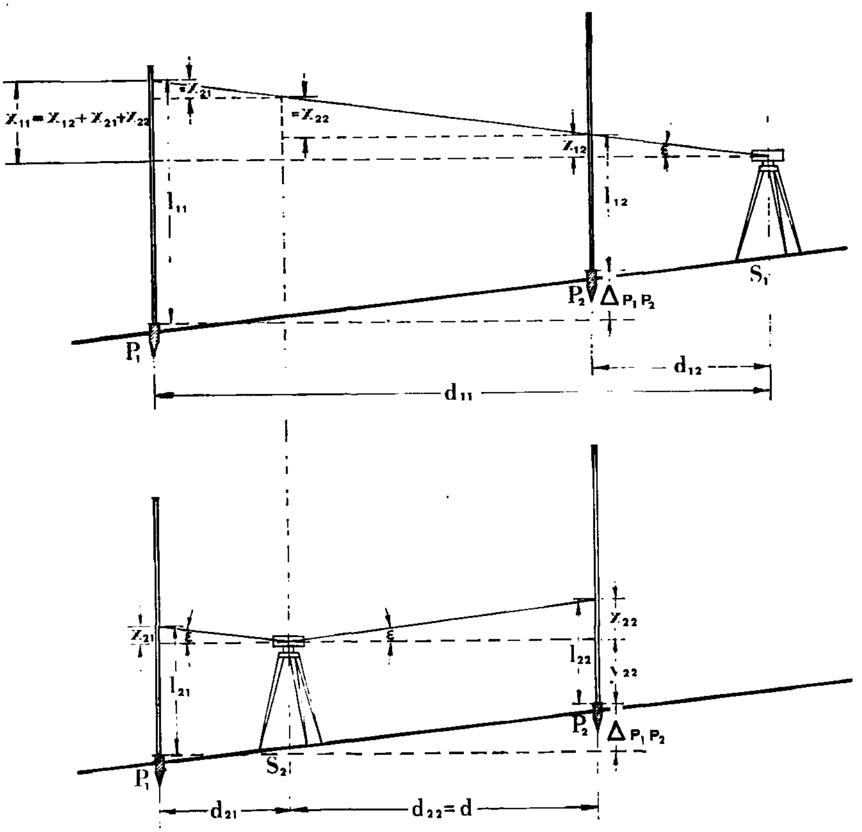

Fig. 7

L'errore quadratico medio accidentale m_a della lettura calcolata può essere maggiore o minore dell'errore accidentale m relativo ad una battuta semplice effettuata alla distanza a cui si esegue la rettifica e precisamente:

— nei metodi del 1° e 2° gruppo l'errore è sempre maggiore od eguale ad m

— nei metodi del 3° gruppo può essere inferiore ad m ed ha come limite inferiore il valore $\frac{m}{\sqrt{2}}$, quando i rapporti α tendono a zero.

Da ciò è evidente che i metodi del 3° gruppo possono offrire maggiore precisione ed infatti, fra tutti, il minimo errore accidentale si è ottenuto con il metodo n. 3—a (livellazione dall'interno e dall'esterno con stazioni prossime alle stadie), con il quale però il calcolo della y_{22} dipende dal rapporto α e quindi dalle distanze $d_{12} = d_{21}$.

Ma poiché quasi l'identico errore accidentale minimo si ottiene con il metodo n. 6, che realizza la formula 2) indipendentemente da ogni misura di distanza, in definitiva il metodo più opportuno appare il n. 6—a e cioè: *livellazione dall'esterno e dall'interno con ciascuna stazione prossima al picchetto di numero contrario,* il quale metodo offre i seguenti vantaggi.

1) La relazione che fornisce la lettura corretta è molto semplice anche mnemonicamente:

$$y_{22} = {}^{1}/_{2}\,(-\,l_{11} + l_{12} + l_{21} + l_{22})$$

semisomma di tutte le letture, di cui soltanto quella dalla 1ª stazione alla 1ª stadia con il segno negativo.

Si osserva che la maggiore economia di lavoro che sembrerebbe offrire la formula 2), la quale tiene conto di tre letture soltanto, è in sostanza soltanto apparente, perché in ogni caso è necessario eseguire la quarta lettura l_{22} per controllare se occorre o meno procedere alla rettifica.

2) Il calcolo della lettura corretta è assolutamente indipendente da misure di distanze.

3) La correzione per sfericità e rifrazione, nei casi in cui è opportuno tenerne conto (livelli di precisione), si calcola molto semplicemente con la tabella n. 1, perché corrisponde *esattamente* all'errore di sfericità e rifrazione relativo alla distanza tra i picchetti, unica distanza — perciò — che occorre misurare per la rettifica dei livelli di precisione.

4) L'errore accidentale, con stazioni prossime alle stadie, è pressocché il minimo che sia possibile ottenere: $\dfrac{m}{\sqrt{2}}$

Di questo metodo, che è risultato il più adatto, si fornisce una semplice dimostrazione diretta, per superfici di livello piane (fig. 7).

Dalla prima livellazione con stazione S_1 sul prolungamento dell'allineamento $P_1 P_2$ e del lato della stadia su cui si eseguirà poi la rettifica, e dalla seconda livellazione con stazione S_2 posta all'interno del tratto $P_1 P_2$, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \Delta P_1P_2 = (l_{11} - x_{11}) - (l_{12} - x_{12}) \\ \Delta P_1P_2 = (l_{21} - x_{21}) - (l_{22} - x_{22}) \end{cases}$$

Eguagliando i secondi membri si ricava un'unica equazione (con 4 incognite):

$$x_{11} - x_{12} - x_{21} + x_{22} = l_{11} - l_{12} - l_{21} + l_{22}$$

Ma poiché $x_{11} = d_{11}\ \mathrm{tg}\ \varepsilon$ (ed analoghe) e poiché, qualunque siano le distanze d_{12} e d_{21}, è:

$$d_{11} = d_{12} + d_{21} + d_{22}$$

si ottiene la eguaglianza

$$x_{11} = d_{11} \operatorname{tg} \varepsilon = (d_{12}+d_{21}+d_{22}) \operatorname{tg} \varepsilon = x_{12}+x_{21}+x_{22}$$

che risulta evidente anche da semplici considerazioni geometriche.

Pertanto la equazione si riduce ad una sola incognita

$$2\, x_{22} = l_{11} - l_{12} - l_{21} + l_{22}$$

da cui

$$x_{22} = {}^1/_2\, (l_{11} - l_{12} - l_{21} + l_{22})$$

e quindi la lettura corretta, da imporre al cannocchiale per la rettifica, risulta:

$$y_{22} = l_{22} - x_{22} = {}^1/_2\, (-l_{11} + l_{12} + l_{21} + l_{22})$$

relazione indipendente da qualsiasi misura di distanza e da qualsiasi imposizione di rapporti tra distanze.

Nota: Con il metodo proposto (n. 6—a), l'angolo di mancata rettifica viene implicitamente determinato con la precisione più alta tra tutti i metodi possibili.

Difatti, la relazione che fornisce tg ε, dedotta nelle premesse, si può trasformare in

$$\operatorname{tg} \varepsilon = z - \frac{m_s}{d} \pm m_\varepsilon$$

in cui z rappresenta il valore di tg ε calcolato attraverso le letture alla stadia (trascurando la sfericità e rifrazione) e precisamente:

$$z = \frac{\beta}{d}\, (l_{11} - l_{12} - l_{21} + l_{22})$$

$\frac{m_s}{d}$ rappresenta l'errore sistematico per sfericità e rifrazione, ed m_ε è l'errore accidentale che compete a tg ε in conseguenza degli errori accidentali di ciascuna lettura.

Con le ipotesi già poste ($m_{ij} = c \sqrt{d_{ij}}$), risulta

$$m_\varepsilon = \frac{m}{d}\, \beta \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + 1}$$

Per i diversi metodi esaminati si trovano i valori registrati nella seguente tabella, dalla quale risulta che il minimo di m_ε si ottiene con il metodo n. 6—a.

Metodo n°	m_ε	Valori particolari di m_ε
1	$\frac{m}{d}\frac{\sqrt{1+\alpha_1}}{\sqrt{2}(1-\alpha_2)}$	
1-a	$\frac{m}{d}\frac{\sqrt{1+\alpha}}{\sqrt{2}(1-\alpha)}$	$\frac{m}{d}\,0{,}81$ per $\alpha=\frac{1}{11}$
1-b	$\frac{m}{d}\sqrt{2(1+\alpha_1)}$	$\frac{m}{d}\,1{,}48$ per $\alpha_1=\frac{1}{11}$
1-c	$\frac{m}{d}\sqrt{3}$	$=\frac{m}{d}\,1{,}73$
2	$\frac{m}{d}\frac{\sqrt{1+\alpha_2}}{\sqrt{2}(1-\alpha_1)}$	
2-a	$\frac{m}{d}\frac{\sqrt{1+\alpha}}{\sqrt{2}(1-\alpha)}$	$\frac{m}{d}\,0{,}81$ per $\alpha=\frac{1}{11}$
2-b	$\frac{m}{d}\sqrt{2(1+\alpha_2)}$	$\frac{m}{d}\,1{,}48$ per $\alpha_2=\frac{1}{11}$
2-c	$\frac{m}{d}\sqrt{3}$	$=\frac{m}{d}\,1{,}73$
2-d	$\frac{m}{d}\frac{\sqrt{2(1+\alpha_2)}}{1-\alpha_2}$	$\frac{m}{d}\,1{,}62$ per $\alpha_2=\frac{1}{11}$
3	$\frac{m}{d}\frac{1}{\sqrt{2}(1-\alpha_1-\alpha_2)}$	
3-a	$\frac{m}{d}\frac{1}{\sqrt{2}(1-2\alpha)}$	$\frac{m}{d}\,0{,}85$ per $\alpha=\frac{1}{12}$
3-b	$\frac{m}{d}\sqrt{2}$	$=\frac{m}{d}\,1{,}41$
3-c	$\frac{m}{d}\sqrt{2}$	$=\frac{m}{d}\,1{,}41$
3-d	$\frac{m}{d}\frac{\sqrt{2}}{1-\alpha_2}$	$\frac{m}{d}\,1{,}55$ per $\alpha_2=\frac{1}{11}$
3-e	$\frac{m}{d}\,2\sqrt{2}$	$=\frac{m}{d}\,2{,}82$
4	$\frac{m}{d}\frac{1}{\alpha_1}\sqrt{\frac{\alpha_0+\alpha_1+1}{2}}$	$\frac{m}{d}\sqrt{1+\frac{\alpha_0}{2}}$ per $\alpha_1=1$
5	$\frac{m}{d}\frac{1}{\alpha_2}\sqrt{\frac{\alpha_0+\alpha_2+1}{2}}$	$\frac{m}{d}\sqrt{1+\frac{\alpha_0}{2}}$ per $\alpha_2=1$
6	$\frac{m}{d}\sqrt{\frac{1+\alpha_1+\alpha_2}{2}}$	
6-a	$\frac{m}{d}\sqrt{\frac{1}{2}+\alpha}$	$\frac{m}{d}\,0{,}77$ per $\alpha=\frac{1}{11}$