

# UNA INTERSEZIONE (QUADRATICA) INVERSA UNIFICATRICE NEL PIANO

COMUNICAZIONE PRESENTATA AL XVI CONGRESSO SIFET  
FIUGGI 30 SETTEMBRE - 4 OTTOBRE 1971

Valentino Tomelleri del Politecnico di Milano

**SOMMARIO** - Si generalizzano i classici metodi di intersezione inversa multipla nel piano per via angolare con l'introduzione di una coppia e terna di distanze tra opportune coppie di vertici da rilevare. Una sola coppia di lati estremi condurrebbe ad una doppia configurazione, venendo a dipendere, il problema, da una equazione quadratica; un terzo lato linearizza la soluzione. Nel procedimento rientrano oltre ai problemi semplici ed ampliati di SNELLIUS - COLLINS - POTHENOT, HANSEN, MAREK, i vari metodi di determinazione indiretta di distanze topografiche.

## 1 - Generalità introduttive.

La gamma delle intersezioni inverse classiche nel piano, tramite esclusive nuove misure angolari, si estende attualmente, com'è d'altronde ben noto, dal vetusto problema di SNELLIUS - COLLINS - POTHENOT al più recente di MAREK ampliato con catena di quadrangoli, attraverso le fasi intermedie viepiù generalizzate dello SNELLIUS multiplo, del problema di HANSEN e dell'originario problema semplice di MAREK (\*).

Pur la fase più avanzata, quale appunto il MAREK ampliato, è subordinata a condizioni geometriche di concatenamento quadri-triangolare non sempre riscontrabili, anche se alquanto generali, nella realtà del rilievo per le accidentalità del terreno che spesso ostacolano la visibilità fra i punti incogniti ed i noti secondo le esigenze dello schema risolvente in questione. Si richiederebbe, ad esempio, tra l'altro, che da ciascuno dei due vertici estremi della poligonale, che ci si appresta a rilevare angolarmente, fosse visibile una coppia di distinti punti noti: qualora, però, da un estremo fosse visibile un solo trigonometrico, il dato angolare mancante, strettamente necessario nel novero delle equazioni risolventi, dovrebbe venir surrogato da altro opportuno elemento, angolare o lineare, ampliando o riducendo la poligonale in gioco, modificando, se del caso, lo schema originario o ricorrendo ad altri possibili procedimenti.

In difetto di altre possibilità angolari, non resterebbe che procedere al rilievo, diretto od indiretto, della distanza corrente tra detto estremo ed il vertice immediatamente consecutivo della poligonale, ritenendosi per lo più inaccessibili, di fatto o per ragioni di comodo, i trigonometrici o punti di appoggio. A favore di una tal surrogazione in extremis, sta la circostanza che la valutazione indiretta della distanza menzionata è spesse volte di fatto una conseguenza del rilievo a poligonale di altri punti secondari che, per altri motivi, sono talvolta da inserire tra i vertici fonda-

---

(\*) V. TOMELLERI, « Sul problema di MAREK ampliato con catena di quadrangoli », Rivista del Catasto e dei SS. TT. EE., nuova serie, anno XIX, 1964, nn. 5-6, pagg. 266-272.

mentali della poligonale angolare originaria da posizionare nel corpus cartografico preesistente.

Con una siffatta sostituzione d'una misura longimetrica ad altra angolare, ne nasce un nuovo procedimento di intersezione inversa quadratica nel piano, oggetto di studio della presente nota, comprensivo a sua volta, in condizioni normali, dei già citati MAREK ampliato, ecc.

Come spesso avviene in analoghi problemi, la surrogazione d'una misura di distanza ad una angolare, l'introduzione cioè d'una circonferenza in luogo d'una coppia di semirette orientate, altera, in genere elevandolo, il grado del problema dando così luogo ad un numero finito di configurazioni geometriche solutrici teoricamente possibili tra cui optare in base a qualche ulteriore elemento ausiliario discriminatore. Elementi siffatti, sovrabbondanti o di controllo, in genere non mancheranno mai in un rilievo ad hoc, sì che qualcuno d'essi potrà essere utilmente impiegato fin dall'inizio dell'elaborazione dei dati, soprattutto là dove si sia in difetto di buone posizioni approssimate, al fine di semplificare e rendere univoca la soluzione, suscettibile, peraltro, di variazioni a seguito di eventuale compensazione secondo il metodo dei minimi quadrati.

Ed è appunto in questo senso, determinabilità cioè dell'unica configurazione possibile caratterizzata dal dato discriminatore, che il presente studio prosegue in un secondo tempo, dopo aver primariamente prospettata e discussa la soluzione rigorosa plurivoca derivabile dagli elementi cosiddetti « strettamente necessari », per concludersi, in un terzo tempo, sulle applicazioni alle determinazioni indirette di distanze topografiche quali particolari intersezioni inverse univoche nel piano.

Con ciò, non si disconoscono i vantaggi, soprattutto di carattere didattico, come solitamente avviene nella propedeusi topografica, di una presentazione separata delle determinazioni indirette di distanze e delle intersezioni inverse classiche nel piano. Si vorrebbe solo che, in fase di sintesi, fosse giustamente messa in luce la dipendenza di quelle da queste come loro particolarizzazioni. Equivarrebbe, questo, a riconoscere la validità del procedimento proposto quale principio generale informatore di quanto attiene alle intersezioni inverse nel piano ove non vi sia intervento esclusivo di soli dati longimetrici.

## 2 - *Sinossi propedeutica.*

Per maggior chiarezza ed agilità della successiva presentazione e discussione del problema, converrà qui premettere, una volta per sempre, una sintesi di notazioni, convenzioni, equazioni, relazioni, ecc. cui far riferimento nei vari tempi della trattazione.

Siano dunque, per intanto, (fig. 1):

( $O$ ;  $X$ ,  $Y$ ) il sistema d'assi cartesiani ortogonali, orario da  $X^+$  ad  $Y^+$ , cui si riferiranno in genere, salvo casi eccezionali dichiarabili all'occorrenza, i punti del piano interessato (orizzontale, verticale, obliquo, cartografico, ecc.) ove s'ha da risolvere il problema in istudio;

$T_r \equiv (X_r, Y_r)$ , ( $r = 1, 2, \dots, n-1, n$ ),  $n$  trigonometrici o comunque punti noti(\*) del piano predetto, di cui due almeno sieno tra loro distinti e di note coordinate cartesiane ( $X_r, Y_r$ ) nel premesso sistema;

---

(\*) Per lo più propri; in particolari condizioni e situazioni limite, qualcuno potrebbe essere o divenire improprio.

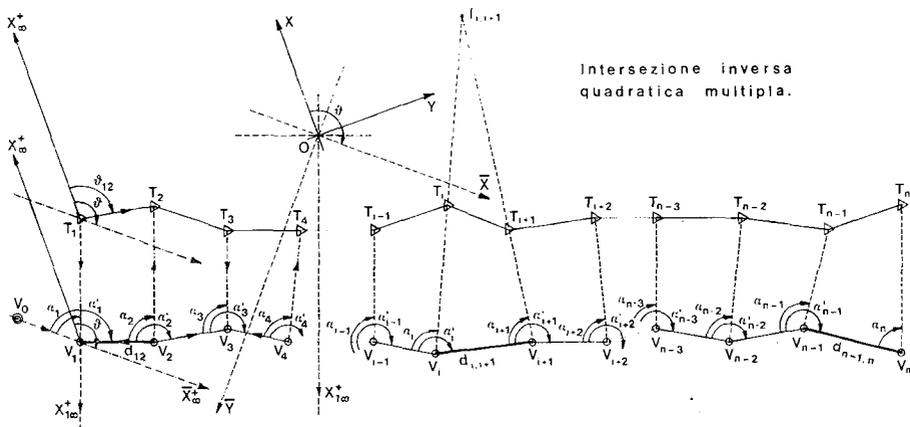


fig. 1

$V_r \equiv (x_r, y_r)$ , ( $r = 1, 2, \dots, n-1, n$ ), altrettanti punti incogniti dello stesso piano, cioè a coordinate  $(x_r, y_r)$ , nell'anzidetto sistema, al momento incognite, costituiscono gli  $n$  vertici (al limite anche coincidenti) della spezzata angolare (propria o degenere, riducibile eventualmente cioè anche ad un punto) da posizionare rispetto ai  $T_r$ , cui essa s'appoggia visualmente ed angolarmente, come si andrà ora a precisare.

Tra le due successioni di punti  $(V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n)$ ,  $(T_1, T_2, \dots, T_{n-1}, T_n)$ , ugualmente numerose, intercorrerà la corrispondenza ordinata derivante dalla effettiva visibilità (e conseguente direzione angolare) del punto  $T_r$  dalla corrispondente (od omotetica) stazione o vertice  $V_r$ , una volta ordinata la successione delle  $V_r$  in base all'ordine di effettuazione reale od ipotetica (nel caso di punti coincidenti o di schemi geometrici idealizzati) della generica  $V_r$ .

Ciò premesso ed introdotto nel novero dei  $V_r$  e con questi stessi compianare (pur non interessando di determinarne la posizione come per questi) pure un punto  $V_o$  (proprio od improprio) opportuno visibile da  $V_1$  al solo scopo di definire la direzione origine  $V_1 V_o$  generica degli angoli misurati in  $V_1$ , si indicheranno con:

(2. 1)

$$\alpha_r = V_{r-1} \hat{V}_r T_r, \quad (r = 1, 2, \dots, n-1, n),$$

$$\alpha'_r = V_{r-1} \hat{V}_r V_{r+1}, \quad (r = 1, 2, \dots, n-2, n-1)$$

le  $2n-1$  misure angolari (orizzontali, verticali, parallattiche, ecc.) effettuate od effettuabili, sul terreno o nello schema geometrico idealizzato, tra le direzioni ai vertici indicati, in senso orario dalle  $V_{r-1} V_r$  alle susseguenti  $V_r T_r$  o  $V_r V_{r+1}$ , modificate al consueto, se necessario, per le esigenze della eventuale proiezione cartografica utilizzata onde potersi riferire alle direzioni delle corrispondenti corde rettilinee.

Sarà pure conveniente, per l'elaborazione dei dati, assegnare un orientamento anche ai vari lati in gioco; precisamente, le varie semirette spiccabili dalla generica stazione  $V_r$  ai vertici circostanti  $V_{r-1}, T_r, V_{r+1}$  si intenderanno orientate dal vertice  $V_r$  ai periferici oppure da questi a quello secondo

che il numero d'ordine  $r$  di  $V_r$  (a prescindere dalla eventuale coincidenza-limite con altri) sia rispettivamente pari o dispari.

Della prima direzione  $V_0 V_1$  così orientata da  $V_0$  a  $V_1$  sia poi  $\vartheta$  l'angolo d'orientamento (o di direzione od azimuth-rette od anomalia od ascissa angolare o distanza zenitale od altezza angolare, ecc.) rispetto alla direzione origine  $X^+$  del sistema cartesiano di riferimento, da computarsi, al solito, in senso orario.

Per una maggior concisione di scrittura e regolarità di formule, si ponga poi pure, sinteticamente:

$$(2. 2) \quad \begin{aligned} s &= \sin \vartheta, & c &= \cos \vartheta, & t &= \tan \vartheta, \\ \sigma'_0 &= 0 = \alpha'_0, \\ \sigma'_r &= \sum_1^r \alpha'_i, & (r &= 1, 2, \dots, n-2, n-1), \\ s'_r &= \sin \sigma'_r, & c'_r &= \cos \sigma'_r, & t'_r &= \tan \sigma'_r, \\ \sigma_r &= \sigma'_{r-1} + \alpha_r, & (r &= 1, 2, \dots, n-1, n), \\ s_r &= \sin \sigma_r, & c_r &= \cos \sigma_r, & t_r &= \tan \sigma_r. \end{aligned}$$

Attesi i convenuti orientamenti dei lati  $V_r T_r, V_r V_{r-1}, V_r V_{r+1}$  spiccati da  $V_r$ , è immediato riconoscere che le forme lineari:

$$(2. 3) \quad \vartheta + \sigma_r, \quad \vartheta + \sigma'_r$$

non sono altro che gli angoli di orientamento (o di direzione, ecc.), rispetto sempre alla direzione origine  $X^+$ , delle semirette orientate  $V_r T_r$  e  $V_r V_{r+1}$ , rispettivamente.

Accanto, poi, alle coordinate  $(X_r, Y_r)$  di  $T_r$  saran da considerare le trasformate (secondo sistemi variabili con  $T_r$  e  $V_r$ ):

$$(2. 4) \quad \begin{aligned} P_r &= -X_r \cdot \sin \sigma_r + Y_r \cdot \cos \sigma_r, \\ Q_r &= -X_r \cdot \cos \sigma_r - Y_r \cdot \sin \sigma_r, \\ & \quad (r = 1, 2, \dots, n-1, n), \end{aligned}$$

oppure, più semplicemente, quando sia  $\cos \sigma_r \neq 0$ :

$$(2. 5) \quad \begin{aligned} p_r &= Y_r - t_r \cdot X_r = P_r / \cos \sigma_r, \\ q_r &= -(X_r + t_r \cdot Y_r) = Q_r / \cos \sigma_r, \\ & \quad (r = 1, 2, \dots, n-1, n), \end{aligned}$$

e le loro combinazioni differenziali successive, cioè:

$$(2. 6) \quad \begin{cases} \overline{p}_r = p_{r+1} - p_r = Y_{r+1} - Y_r + t_r \cdot X_r - t_{r+1} \cdot X_{r+1}, \\ \overline{q}_r = q_{r+1} - q_r = X_r - X_{r+1} + t_r \cdot Y_r - t_{r+1} \cdot Y_{r+1}, \\ \quad (r = 1, 2, \dots, n-1). \end{cases}$$

E così pure, a fianco dell'originario sistema cartesiano  $(O; X, Y)$  sarà da considerare quello ruotato di  $\vartheta$ , in senso orario, attorno ad  $O$ , cioè  $(O; \overline{X}, \overline{Y})$ , tramite la trasformazione destrorsa:

$$(2. 7) \quad \begin{cases} \overline{X} = X \cdot \cos \vartheta + Y \cdot \sin \vartheta, \\ \overline{Y} = -X \cdot \sin \vartheta + Y \cdot \cos \vartheta. \end{cases}$$

L'inversa, ovviamente, sarà:

$$(2. 8) \quad \begin{cases} X = \overline{X} \cdot \cos \vartheta - \overline{Y} \cdot \sin \vartheta, \\ Y = \overline{X} \cdot \sin \vartheta + \overline{Y} \cdot \cos \vartheta. \end{cases}$$

Le somme angolari  $\sigma_r$  e  $\sigma'_r$  sono allora interpretabili quali angoli di direzione delle semirette orientate  $V_r T_r$  e  $V_r V_{r+1}$  rispetto al semiasse  $\bar{X}^+$ , parallelo ed equiorientato al primo lato o direzione  $V_0 V_1$  da  $V_0$  a  $V_1$ .

Queste premesse autorizzeranno a scrivere due tipi di equazioni:

I) per le direzioni  $V_r T_r$  ai trigonometrici o punti noti  $T_r$ :

$$(2.9) \quad (Y_r - y_r) \cdot \cos(\hat{\vartheta} + \sigma_r) = (X_r - x_r) \cdot \sin(\hat{\vartheta} + \sigma_r),$$

od anche:

$$(r = 1, 2, \dots, n-1, n),$$

$$(2.9') \quad c_r \cdot \bar{y}_r - s_r \cdot \bar{x}_r = P_r \cdot \cos \hat{\vartheta} + Q_r \cdot \sin \hat{\vartheta},$$

che si utilizzerà per lo più nella forma:

$$(2.10) \quad \bar{y}_r - t_r \cdot \bar{x}_r = p_r \cdot \cos \hat{\vartheta} + q_r \cdot \sin \hat{\vartheta},$$

$$(r = 1, 2, \dots, n-1, n),$$

posto che sia  $c_r = \cos \sigma_r \neq 0$ , essendo  $(\bar{x}_r, \bar{y}_r)$  le trasformate di  $(x_r, y_r)$  nel sistema  $(O; \bar{X}, \bar{Y})$ ;

II) per le direzioni  $V_r V_{r+1}$  fra stazioni o vertici consecutivi:

$$(2.11) \quad (y_{r+1} - y_r) \cdot \cos(\hat{\vartheta} + \sigma'_r) = (x_{r+1} - x_r) \cdot \sin(\hat{\vartheta} + \sigma'_r),$$

$$(r = 1, 2, \dots, n-1),$$

oppure:

$$(2.11') \quad c'_r \cdot \bar{y}_r - s'_r \cdot \bar{x}_r - c'_r \cdot \bar{y}_{r+1} + s'_r \cdot \bar{x}_{r+1} = 0,$$

da impiegarsi anch'essa per lo più nell'aspetto:

$$(2.12) \quad \bar{y}_r - t'_r \cdot \bar{x}_r - \bar{y}_{r+1} + t'_r \cdot \bar{x}_{r+1} = 0,$$

$$(r = 1, 2, \dots, n-2, n-1).$$

per  $c'_r \neq 0$ .

Le (2.9), (2.9'), (2.10), (2.11), (2.11'), (2.12) sussistono invariate pur se il parametro  $\hat{\vartheta}$  viene alterato di un multiplo dispari di  $\pi$ .

III) Ai due precedenti tipi di equazioni sarà da aggiungerne all'occorrenza un terzo derivante dalle eventuali misure di distanze  $\bar{V}_i \bar{V}_{i+1}$ , dirette od indirette, lungo la poligonale angolare da posizionare.

Detta  $d_{i, i+1}$  la distanza corrente tra  $\bar{V}_i$  e  $\bar{V}_{i+1}$  ridotta, al solito, se necessario, alla eventuale corrispondente corda cartografica, risulterà:

$$(2.13) \quad (\bar{y}_i - \bar{y}_{i+1}) \cdot \sin \sigma'_i + (\bar{x}_i - \bar{x}_{i+1}) \cdot \cos \sigma'_i = (-1)^{i+1} d_{i, i+1},$$

cioè, se  $c'_i \neq 0$ :

$$(2.14) \quad t'_i \cdot \bar{y}_i + \bar{x}_i - t'_i \cdot \bar{y}_{i+1} - \bar{x}_{i+1} = (-1)^{i+1} d_{i, i+1} / c'_i,$$

per quei pochi valori di  $i$  (in genere,  $i = 1, i = n-1$ , ed un terzo intero tra questi 1 ed  $n-1$  intermedio) interessati.

Ed infine per le distanze tra i vertici  $V_r$  ed i corrispondenti ed omonimi  $T_r$ , quali differenze di lati di opportuni triangoli, risulterebbe, ad esempio:

$$\begin{aligned}
 & (-1)^{r+1} \cdot \sin(\sigma_{r+1} - \sigma_r) \cdot |\overline{V_r T_r}| = \\
 & = [(X_{r+1} - X_r) \cdot \cos \sigma_{r+1} + (Y_{r+1} - Y_r) \cdot \sin \sigma_{r+1}] \cdot \sin \delta + \\
 & + [(X_{r+1} - X_r) \cdot \sin \sigma_{r+1} - (Y_{r+1} - Y_r) \cdot \cos \sigma_{r+1}] \cdot \cos \delta + \\
 & + (-1)^{r+1} \cdot d_{r, r+1} \cdot \sin \alpha_{r+1}, \quad (r = 1, 2, \dots, n-2, n-1);
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
 & (-1)^{r-1} \cdot \sin(\sigma_r - \sigma_{r-1}) \cdot |\overline{V_r T_r}| = \\
 & = [(X_r - X_{r-1}) \cdot \cos \sigma_{r-1} + (Y_r - Y_{r-1}) \cdot \sin \sigma_{r-1}] \cdot \sin \delta + \\
 & + [(X_r - X_{r-1}) \cdot \sin \sigma_{r-1} - (Y_r - Y_{r-1}) \cdot \cos \sigma_{r-1}] \cdot \cos \delta + \\
 & + (-1)^{r-1} \cdot d_{r-1, r} \cdot \sin(\sigma'_{r-1} - \sigma_{r-1}), \quad (r = 2, 3, \dots, n-1, n),
 \end{aligned}$$

la cui pratica utilizzazione è subordinata, ovviamente, alla conoscenza degli elementi angolari e lineari ivi presenti.

### 3. - *Intersezione quadratica inversa.*

3.1. - Il problema specifico che si intende affrontare, e che denomineremo appunto dell'*intersezione quadratica inversa* dipendendone la soluzione rigorosa da una equazione di 2° grado, può essere così formulato, (fig. 1).

« Sono assegnati, nel piano,  $n \geq 3$  generici punti  $T_r \equiv (X_r, Y_r)$  propri (\*) tramite le coordinate cartesiane ortogonali  $(X_r, Y_r)$  rispetto ad un sistema (orario) d'assi di riferimento. Da altrettanti vertici  $V_r$  dello stesso piano, da posizionare rispetto ai  $T_r$ , si valutano gli angoli seguenti, in numero di  $2n-1$ :

$$\begin{aligned}
 \alpha_r &= V_{r-1} \hat{V}_r T_r, \quad (r = 1, 2, \dots, n-1, n), \\
 \alpha'_r &= V_{r-1} \hat{V}_r V_{r+1}, \quad (r = 1, 2, \dots, n-2, n-1),
 \end{aligned}$$

in senso orario attorno ai rispettivi vertici  $V_r$  a partire dalle direzioni-origine rispettive  $V_r V_{r-1}$ , essendo  $V_0$  un opportuno punto, dello stesso piano però dei  $V_r$  e visibile da  $V_1$ , dalla cui direzione  $V_1 V_0$  si contano gli angoli in  $V_1$ .

Sono pure conosciute le lunghezze dei due lati estremi della poligonale dei  $V_r$ :

$$d_{12} = \overline{V_1 V_2}, \quad d_{n-1, n} = \overline{V_{n-1} V_n}.$$

Determinare le coordinate cartesiane  $(x_r, y_r)$  dei  $V_r$ ,  $(r = 1, 2, \dots, n-1, n)$ , nel sistema prefissato sul piano, o per lo meno il valore di un qualche parametro che ne permetta un susseguente facile computo ».

3.2 - Si osservi anzitutto, dal punto di vista del numero di dati « strettamente necessari » e della determinazione-indeterminazione del problema, che gli elementi valutati a disposizione [angoli  $\alpha'_1 - \alpha_1, \alpha_r, \alpha'_r$ ,  $(r = 2, \dots, n-1)$ ,  $\alpha_n$  e distanze  $d_{12}, d_{n-1, n}$ ] sono tanti quante le  $2n$  incognite principali  $(x_r, y_r)$ ,  $(r = 1, 2, \dots, n-1, n)$ , da determinare e perciò, salvi casi eccezionali di completa indeterminazione, il problema dovrebbe risultare determinato ed ammettere al massimo un numero finito di soluzioni tra cui eventualmente optare secondo un qualche opportuno criterio pratico.

Una abbastanza facile impostazione è dettata dalla geometria analitica

(\*) In particolari situazioni limite, qualcuno potrebbe divenire improprio.

$s_1^i \quad c_1^i \quad -s_1^i \quad -c_1^i \quad 0 \quad 0 \quad 0$	sub-matrice	0	$y_1$	$d_{12}$
$c_1 \quad -s_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$		0	$x_1$	$P_1 \cdot \cos\theta + Q_1 \cdot \sin\theta$
$c_1^i \quad -s_1^i \quad -c_1^i \quad s_1^i \quad 0 \quad 0$		0	$y_2$	0
$0 \quad 0 \quad c_2 \quad -s_2 \quad 0 \quad 0$		0	$x_2$	$P_2 \cdot \cos\theta + Q_2 \cdot \sin\theta$
$0 \quad 0 \quad c_2^i \quad -s_2^i \quad -c_2^i \quad s_2^i \quad 0$	sub-matrice	0	$y_3$	0
.....		.....	$x_3$	.....
.....		.....	.....	.....
sub-matrice	0 $c_{i-1}$ $-s_{i-1}$ 0 0 0 0	sub-matrice	$y_{i-1}$	$P_{i-1} \cdot \cos\theta + Q_{i-1} \cdot \sin\theta$
0	0 $c_{i-1}^i \quad -s_{i-1}^i \quad -c_{i-1}^i \quad s_{i-1}^i$ 0 0	0	$x_{i-1}$	0
0	0 0 0 $c_i \quad -s_i$ 0 0	0	$y_i$	$P_i \cdot \cos\theta + Q_i \cdot \sin\theta$
0	0 0 0 $c_i^i \quad -s_i^i \quad -c_i^i \quad s_i^i$ 0	0	$x_i$	0
0	sub-matrice	sub-matrice	$y_{i+1}$	$P_{i+1} \cdot \cos\theta + Q_{i+1} \cdot \sin\theta$
0	0 0 0 0 $c_{i+1} \quad -s_{i+1}$ 0	0	$x_{i+1}$	.....
.....		.....	.....	.....
.....		.....	.....	.....
sub-matrice	0 $c_{n-1}$ $-s_{n-1}$ 0 0	sub-matrice	$y_{n-1}$	$P_{n-1} \cdot \cos\theta + Q_{n-1} \cdot \sin\theta$
0	0 $c_{n-1}^i \quad -s_{n-1}^i \quad -c_{n-1}^i \quad s_{n-1}^i$	0	$x_{n-1}$	0
0	0 0 0 $c_n \quad -s_n$	0	$y_n$	$P_n \cdot \cos\theta + Q_n \cdot \sin\theta$
0	sub-matrice	sub-matrice	$x_n$	$(-1)^n d_{n-1, n}$
0	0 $s_{n-1}^i \quad c_{n-1}^i \quad -s_{n-1}^i \quad -c_{n-1}^i$	0		

Quadro I

del piano, secondo appunto le anticipazioni del n. 2 precedente, in accordo con quello che è il principio generale d'elaborazione di dati relativi ad un qualsivoglia insieme limitato di punti (propri od impropri) e lati (reti, catene, poligonali, successioni, ecc.) comunque conformato di un piano generico (orizzontale, verticale, obliquo).

Si dirà ancora  $\vartheta$  il parametro d'orientamento (o angolo di direzione, ecc.) del primo lato o direzione  $V_0 V_1$ , orientato da  $V_0$  a  $V_1$ , rispetto alla direzione  $X^-$  origine cartesiana. Ed  $(\bar{x}_r, \bar{y}_r)$ , ( $r = 1, 2, \dots, n-1, n$ ), siano ancora le trasformate (incognite) delle  $(x_r, y_r)$ , secondo le (2.7), nel sistema transitorio  $(O; \bar{X}, \bar{Y})$  ruotato di  $\vartheta$ , in senso orario, rispetto all'originario  $(O; X, Y)$ . Alle  $2n$  incognite  $(\bar{x}_r, \bar{y}_r)$  s'aggiunge così l'ausiliaria  $\vartheta$ .

Una volta procuratosi quanto richiedono le (2.2) e (2.5), si è in grado di scrivere:

I)  $n$  equazioni (lineari in  $x_r, y_r$ ) del tipo generale (2.9') o, se tutti i coseni  $c_r$  non sono nulli, del tipo (2.10) derivabili dalle altrettante direzioni  $V_r T_r$  ai trigonometrici o punti assegnati  $T_r$  dalle stazioni o vertici  $V_r$ ;

II)  $n-1$  equazioni lineari del tipo (2.11') o, se  $c'_r \neq 0$ , (2.12) relative alle direzioni intercolleganti  $V_r V_{r+1}$ ;

III) ed infine le due equazioni, pur esse lineari, del tipo (2.13) o (2.14) attinenti alle due distanze estreme note  $d_{12}, d_{n-1, n}$ .

Si compone, dunque, in tal modo, un sistema di  $2n + 1$  equazioni, lineari nella  $2n$  incognite  $(\bar{x}_r, \bar{y}_r)$ , con la presenza dell'ulteriore incognita  $\vartheta$  al 2° membro di alcune non omogenee; la loro coesistenza, per noti teoremi d'algebra, comporta sia nullo il determinante della cosiddetta *matrice completa* del sistema. Ne nasce così l'equazione determinatrice dei valori possibili del parametro d'orientamento  $\vartheta$ .

In termini espliciti, converrà disporre l'equazione (2.13) relativa a  $d_{12}$  quale 1ª equazione del sistema e l'analoga per  $d_{n-1, n}$  quale  $(2n + 1)$ -esima e tra queste, alternatamente, una equazione (2.9') ed una (2.11') secondo l'ordine  $r$  crescente di  $V_r$ .

Il sistema che se ne ottiene è quello presentato nel quadro 1, ove s'è fatto uso della notazione matriciale.

La matrice dei coefficienti delle incognite  $(\bar{y}_r, \bar{x}_r)$  andrà orlata con la colonna a 2° membro; ne nasce la matrice completa del sistema, ch'è quadrata d'ordine  $2n + 1$ , il cui determinante ha da essere nullo per la coesistenza delle  $2n + 1$  equazioni lineari.

Attese le proprietà dei determinanti ad elementi polinomiali, una siffatta condizione di coesistenza si traduce nell'equazione in  $\vartheta$ :

$$(3.0) \quad D_1 \cdot \cos \vartheta + D_2 \cdot \sin \vartheta + D_3 = 0,$$

con ovvie posizioni dei determinanti a coefficiente  $D_1, D_2, D_3$  funzioni dei  $c_r, s_r, c'_r, s'_r, d_i, i+1$  noti.

3.3 - Quando tutti i coseni  $c_r, c'_r$  (od i seni  $s_r, s'_r$ ) fossero non nulli, si presenterebbe possibile una riduzione regolare di dimensioni, a struttura cioè più compatta. Si supponga siano non nulli i coseni  $c_r, c'_r$  e si incominci a dividere ogni riga per il corrispondente  $c_r$  o  $c'_r$  e successivamente a modificare le righe  $3^a, 5^a, \dots, (2n - 3)^a$ , d'indice dispari, relative alle direzioni  $V_r V_{r+1}$ , togliendovi la riga immediatamente precedente ed aggiungendovi quella immediatamente seguente, ricordando pure le posizioni (2.6); appariranno così alcune colonne aventi un sol elemento non nullo.

Limitandosi poi, per ora, alle prime cinque righe, alla 3<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup> colonna si aggiungano rispettivamente la 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> colonna; dopo di che, alla 2<sup>a</sup> riga si aggiungano la 3<sup>a</sup> e la 4<sup>a</sup>, moltiplicata questa per  $-1$ . Risulterà:

$$\begin{array}{cccccccc} t'_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & d_{12}/c'_1 \\ 1 & -t'_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & t_1 - t'_1 & t_1 - t_2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \bar{p}_1 \cdot \cos \vartheta + \bar{q}_1 \cdot \sin \vartheta \\ 0 & 0 & t_2 - t'_2 & t'_2 - t_3 & \dots & \dots & \dots & \bar{p}_2 \cdot \cos \vartheta + \bar{q}_2 \cdot \sin \vartheta \end{array}$$

Si tolga poi la 2<sup>a</sup> riga moltiplicata per  $t'_1$  dalla 1<sup>a</sup>; si elimineranno così la 1<sup>a</sup> colonna e 2<sup>a</sup> riga ed il fattore non nullo  $1/c'_1 t'_1$ , atteso che:

$$t_1 - t'_1 = -\sin(\alpha'_1 - \alpha_1) / (c_1 \cdot c'_1).$$

Non resterà allora altro che moltiplicare la 1<sup>a</sup> riga per  $\sin(\alpha'_1 - \alpha_1) / c_1$  ed aggiungerla alla 2<sup>a</sup>.

Si prendano ora in considerazione le ultime cinque righe. Elaborazioni analoghe alle precedenti permetteranno intanto di scrivere:

$$\begin{array}{ccccccc} t_{n-2} - t'_{n-2} & t'_{n-2} - t_{n-1} & 0 & \dots & \dots & \dots & \bar{p}_{n-2} \cdot \cos \vartheta + \bar{q}_{n-2} \cdot \sin \vartheta \\ 0 & t_{n-1} - t_n & t_n - t'_{n-1} & \dots & \dots & \dots & \bar{p}_{n-1} \cdot \cos \vartheta + \bar{q}_{n-1} \cdot \sin \vartheta \\ 0 & 0 & 1/c'_{2n-1} & \dots & \dots & \dots & (-1)^n d_{n-1, n} / c'_{n-1} \end{array}$$

Si ricordi ora essere:

$$t_n - t'_{n-1} = \frac{\sin(\sigma_n - \sigma'_{n-1})}{\cos \sigma_n \cdot \cos \sigma'_{n-1}} = \frac{\sin \alpha_n}{c_n \cdot c'_{n-1}}$$

e si potrà quindi togliere dalla penultima riga l'ultima moltiplicata per  $\sin \alpha_n / c_n$ .

L'assetto finale d'una siffatta equazione di coesistenza delle  $2n + 1$  equazioni lineari del sistema è allora quello del quadro 2 a pag. seguente.

E' evidente la regolarità di struttura dei termini differenziali, tranne che per le righe estreme (1<sup>a</sup> ed ultima) influenzate dalle distanze (non nulle)  $d_{12}, d_{n-1, n}$ .

Associando alle prime  $n - 1$  colonne della matrice a 1<sup>a</sup> membro dell'equazione del quadro 2 ora la colonna delle  $\bar{p}_r$ , ora quella delle  $\bar{q}_r$  ed in un terzo tempo quella delle  $d_{12} \cdot \sin(\alpha'_1 - \alpha_1) / c_1, 0, 0, \dots, 0, 0, (-1)^{n-1} d_{n-1, n} \cdot \sin \alpha_n / c_n$ , si ottengono tre matrici quadrate i cui rispettivi determinanti saranno ricordati sinteticamente con  $A, B, C$ , che permetteranno così di presentare l'equazione del quadro 2 nella forma semplice:

$$(3.1) \quad A \cdot \cos \vartheta + B \cdot \sin \vartheta + C = 0.$$

Essa, o ancor meglio la più generale (3.0), è appunto l'equazione determinatrice del parametro d'orientamento  $\vartheta$ . A motivo della presenza, assieme ai termini in  $\cos \vartheta$  e  $\sin \vartheta$ , degli elementi lineari  $d_{12}$  e  $d_{n-1, n}$  non nulli, la sua risoluzione dipenderà in genere, quando non abbia coefficienti tutti nulli, da una equazione di 2<sup>o</sup> grado completa in  $\tan(\vartheta/2)$ , salvo che in casi particolari non sia nullo qualche coefficiente, [il termine noto  $C$ , ad esempio, com'è quando contemporaneamente fosse  $\alpha'_1 \equiv \alpha_1 \pmod{\pi}, \alpha_n \equiv 0 \pmod{\pi}$ , cioè per  $T_1 V_1 V_2$  tra loro allineati e così pure per  $V_{n-1} V_n T_n$ ].

3.4. — Se i punti  $T_r$  e  $V_r$  sono veramente punti del terreno o, per meglio dire, immagini (cartografiche) di punti realmente esistenti nel mondo fisico, su cui sono stati di fatto rilevati o si sarebbero potuti rilevare gli elementi originari di  $\alpha_r, \alpha'_r, d_{12}, d_{n-1, n}$ , non v'è dubbio che vi sarà almeno un valore reale di  $\vartheta$  soddisfacente l'equazione di coesistenza, e quindi le radici della equazione quadratica risolvante, posto logicamente che le soluzioni non siano infinite a causa di una completa indeterminazione, saranno entrambe reali.

$t_1-t_2$	0	0	0	sub-matrice	0	$\overline{p}_1 \cdot \cos \vartheta + \overline{q}_1 \cdot \sin \vartheta$	$d_{12} \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_2)$
$t_2-t_1$	$t_2-t_3$	0	0		0	$\overline{p}_2 \cdot \cos \vartheta + \overline{q}_2 \cdot \sin \vartheta$	$\cos \sigma_1$
0	$t_3-t_1$	$t_3-t_4$	0	nulla	0	$\overline{p}_3 \cdot \cos \vartheta + \overline{q}_3 \cdot \sin \vartheta$	
0	sub-matrice	0	$t_{i-1}-t_{i-1}$	$t_i-t_i$	0	0	0
0	0	0	$t_i-t_i$	$t_i-t_{i+1}$	0	0	0
0	nulla	0	0	$t_{i+1}-t_{i+1}$	$t_{i+1}-t_{i+2}$	0	0
0	sub-matrice	0	$t_{n-3}-t_{n-3}$	$t_{n-3}-t_{n-2}$	0	$\overline{p}_{n-3} \cdot \cos \vartheta + \overline{q}_{n-3} \cdot \sin \vartheta$	
0	0	0	0	$t_{n-2}-t_{n-2}$	$t_{n-2}-t_{n-1}$	$\overline{p}_{n-2} \cdot \cos \vartheta + \overline{q}_{n-2} \cdot \sin \vartheta$	
0	nulla	0	0	0	$t_{n-1}-t_{n-1}$	$\overline{p}_{n-1} \cdot \cos \vartheta + \overline{q}_{n-1} \cdot \sin \vartheta$	$\frac{\sin \alpha_n}{\cos \sigma_n}$

=0

L'opzione tra i due (nel primo giro angolare) possibili teorici valori del parametro  $\vartheta$  si effettuerà in genere per raffronto di un qualche elemento, rigoroso od approssimato od anche qualitativo (annotato in fase di rilievo o comunque noto od acquisibile in tempi e modi opportuni), con l'analogo elemento prodotto dai valori di  $\vartheta$  da discriminare.

3.5. — Ed infine s'osservi, ad esempio, che, al tendere di  $V_n$  a  $V_{n-1}$ ,  $d_{n-1, n}$  tenderà ad annullarsi ed  $\alpha'_{n-1}$ ,  $\alpha_n$  tenderanno a dei limiti dipendenti dal percorso di  $V_n$  verso  $V_{n-1}$ . Si può pensare che, al di là o a partire da una certa posizione,  $V_n$  tenda a  $V_{n-1}$  muovendo lungo la visuale da  $V_{n-1}$  a  $T_n$ , e quindi sia, al limite:

$$V_n \equiv V_{n-1}, \quad \alpha'_{n-1} \equiv V_{n-2} \hat{V}_{n-1} T_n \pmod{\pi}, \quad \alpha_n \equiv 0 \pmod{\pi}, \\ d_{n-1, n} = 0, \quad \sigma_n = \sigma'_{n-1} + \alpha_n, \quad t_n = t'_{n-1}.$$

In tali condizioni l'ultima riga dell'equazione del quadro rientra nella normalità con  $t_n = t'_{n-1}$ , e  $d_{n-1, n} = 0$ , cioè di struttura pari alle precedenti, meno che la prima se  $d_{12} \neq 0$ .

Se  $d_{12}$  si conserva  $\neq 0$ , pur con  $d_{n-1, n} = 0$  il problema dipenderà in genere ancora da un'equazione quadratica, e perciò: « se anche un sol estremo della catena di quadrangoli del problema ampliato di MAREK non è triangolare, le configurazioni possibili (se in numero limitato) saranno in genere due ».

Analoghe considerazioni limite potranno introdursi per l'altra coppia estrema  $V_1, V_2$  ed al limite s'assumerà:

$$V_1 \equiv V_2, \quad \alpha_1 = V_0 \hat{V}_2 T_1, \quad \alpha'_1 \equiv \alpha_1 \pmod{\pi}, \\ d_{12} = 0, \quad t'_1 = t_1,$$

$$\alpha_2 \equiv T_1 \hat{V}_2 T_2 \pmod{\pi}, \quad \alpha'_2 \equiv T_1 \hat{V}_2 V_3 \pmod{\pi}.$$

Dopo di che è immediato constatare che in caso di nullità di entrambe le distanze  $d_{12}$ ,  $d_{n-1, n}$  estreme, e cioè di coincidenza sia di  $V_1$  con  $V_2$  che di  $V_{n-1}$  con  $V_n$ , si che la configurazione è quella d'un problema ampliato di MAREK, l'equazione del parametro  $\vartheta$  diventa lineare in  $\tan \vartheta$  e coincide appunto, assumendo  $V_0 \equiv T_1$  e  $t_1 = 0$ , con quanto suggerisce direttamente un siffatto problema. (Cfr. equazioni [1'] e [3] della già citata nota « Sul problema di MAREK etc. »).

Altrettanto dicasi nel caso, un po' più generale, risultasse:

$$d_{12} \cdot \sin(\alpha'_1 - \alpha_1) = 0 = d_{n-1, n} \cdot \sin \alpha_n,$$

per terne allineate  $T_1 V_1 V_2, V_{n-1} V_n T_n$ .

Nello schema qui esposto rientra pure il problema ampiamente trattato in altra recente nota per  $n = 3$  (\*). Le costruzioni geometriche colà presentate evidenziano appunto per quel caso, tramite la visualizzazione delle due eventuali configurazioni solutrici possibili, l'ordine o grado dell'attuale problema (quadratico). A quelle soluzioni grafiche, anzi, ci si riconduce, tramite una successione ordinata di punti di COLLINS; nei casi in cui una delle due distanze estreme  $d_{12}$ ,  $d_{n-1, n}$  fosse nulla, e cioè la catena dei quadrangoli iniziasse o finisse con un quadrangolo degenerare in triangolo, è immediato.

Le figg. 2 e 3, di facile intelligenza, presentano due distinti esempi grafici di coppie di configurazioni solutrici acquisibili con l'elaborazione degli elementi « strettamente necessari ».

(\*) V. TOMELLERI, « Possibilità di un nuovo tipo di intersezione inversa multipla a soli quadrilateri nel posizionamento di poligonali planimetriche appoggiate "a visuali isolate" a punti noti inaccessibili », Rivista del Catasto e dei Servizi Tecnici Erariali, nuova serie, anno XXV, 1970.

Per la costruzione grafica relativa alla fig. 2 si rimanda alla già citata memoria: « Possibilità di un nuovo tipo etc. » e precisamente al « metodo del trapezio ».

Per quanto concerne, invece, la soluzione grafica della fig. 3, e cioè più in generale per quel che riguarda un qualche procedimento grafico di co-

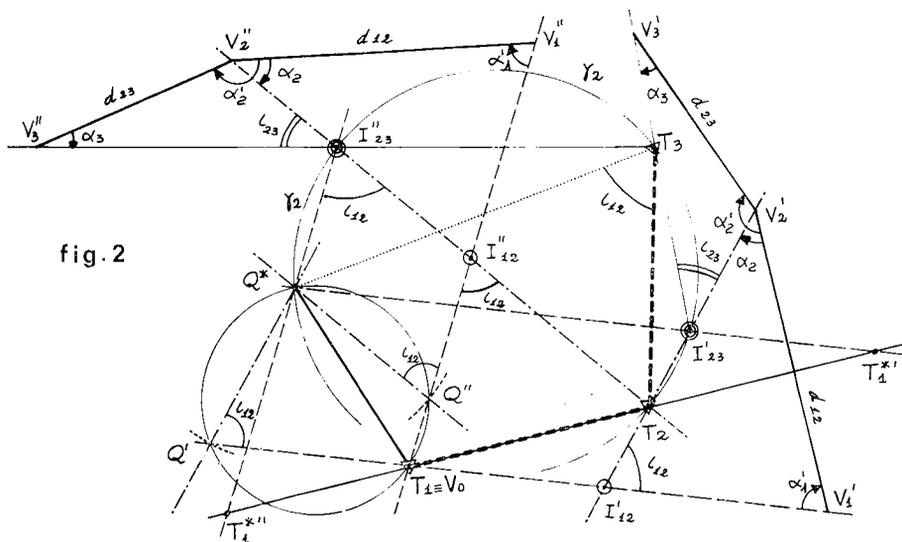


fig. 2

struzione e determinazione per l'intersezione quadratica inversa nel piano, si preferisce qui non dilungarsi e rimandare la trattazione dell'argomento ad altro prossimo lavoro.

3.6. — Una volta acquisito il valore del parametro,  $2n$  opportune equazioni, a determinante non nullo, delle  $2n + 1$  del sistema iniziale (quadro 1) permetteranno di determinare le  $2n$  incognite principali  $(\bar{x}_r, \bar{y}_r)$ . Oppure anche, utilizzando la (2.15) o (2.16), ci si potranno procurare i raggi vettori  $\overline{T_1 V_1}, \overline{T_2 V_2}, \overline{T_{n-1} V_{n-1}}, \overline{T_n V_n}$  dei quadrilateri estremi a distanze  $d_{12}, d_{n-1, n}$  conosciute, e di seguito gli altri raggi vettori  $\overline{T_r V_r}$ ; atteso poi il significato di  $\vartheta + \sigma_r$ , l'acquisizione delle coordinate  $(x_r, y_r)$  di  $\overline{V_r}$  è immediata.

Per una pratica applicazione numerica, ad evitare gli inconvenienti di  $\sec \sigma_r = \tan \sigma_r = \infty = \tan \sigma_r' = \sec \sigma_r'$ , in una elaborazione elettronica a programma converrà stendere l'equazione del parametro  $\vartheta$  in termini delle funzioni circolari  $\sin$  e  $\cos$  anzichè  $\tan$ , riferendosi cioè alla (3.0) ed al quadro 1.

3.7. — Da ultimo, qualche osservazione, utile anche per il seguito, a proposito di unicità o meno di configurazioni solutrici.

1) La (3.1), in generale, salvi casi eccezionali, dipenderà dall'equazione di 2° grado:

$$(3.2) \quad (C - A) \cdot \tan^2 \frac{\vartheta}{2} + 2B \cdot \tan \frac{\vartheta}{2} + (C + A) = 0.$$

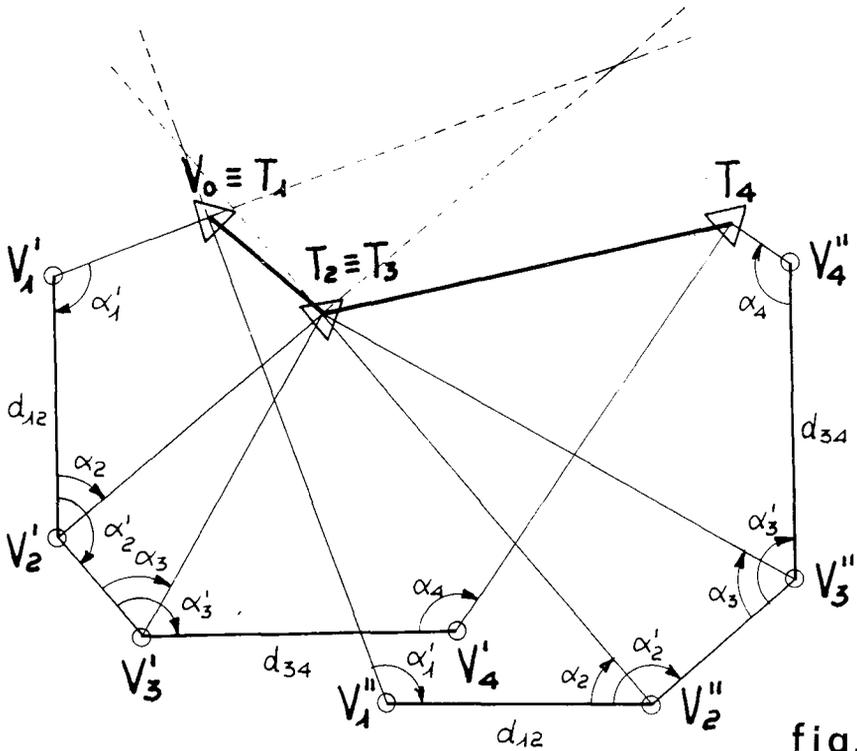


fig. 3

D'essa, le due radici reali coincidono tra di loro quando e solo sia:

$$(3.3) \quad A^2 + B^2 = C^2,$$

avendosi in tal caso, con  $A, B, C$  non nulli:

$$(3.4) \quad \tan \frac{\vartheta}{2} = \frac{B}{A-C} = \frac{A+C}{B} = \frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{B},$$

e quindi:

$$(3.5) \quad \tan \vartheta = \frac{B}{A},$$

$$(3.6) \quad \sin \vartheta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \cos \vartheta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

sì che il parametro  $\vartheta$  ne risulta pienamente individuato. In tale particolare situazione, dunque, la (3.3) fa le veci della condizione operante l'opzione nel caso generale di due distinte soluzioni.

II) Un altro caso d'unicità di soluzioni si presenta quando sussistano contemporaneamente le due uguaglianze di già ricordate

$$(3.7) \quad d_{12} \cdot \sin(\alpha_1' - \alpha_1) = 0 = d_{n-1, n} \cdot \sin \alpha_n,$$

(ad esempio: problemi di MAREK, HANSEN, SNELLIUS-COLLINS-POTHE-NOT), annullandosi di conseguenza anche il termine  $C$ , onde si ha:

$$(3.8) \quad \tan \vartheta = -A/B.$$

Valori  $\vartheta$  soddisfacenti alla (3.8) e differenti di multipli dispari di  $\pi$  porteranno alle medesime soluzioni  $(x_r, y_r)$  dato il contemporaneo intervento di  $\cos \vartheta$ ,  $\sin \vartheta$  nelle (2.8), oltrecchè beninteso nei quadri 2 ed 1, vigendo logicamente le (3.7).

Del resto, quando si voglia, avendo luogo la 1<sup>a</sup> delle (3.7), ci si potrebbe procurare, in particolari condizioni cui in genere ci si può facilmente ricondurre, un'altra funzione circolare del parametro d'orientamento valendosi delle seguenti considerazioni generali.

Per l'angolo  $T_2 T_1 V_2$ , interno od esterno al triangolo  $T_1 T_2 V_2$ , avendo luogo la 1<sup>a</sup> delle (3.7), si ha facilmente per intanto:

$$(3.9) \quad \sin T_2 \hat{T}_1 V_2 = -\cos(\alpha_1' - \alpha_1) \cdot \sin \alpha_2 \cdot \frac{|\overline{V_2 T_2}|}{|\overline{T_1 T_2}|},$$

$$(3.10) \quad \cos T_2 \hat{T}_1 V_2 = \cos(\alpha_1' - \alpha_1) \cdot \cos \alpha_2 \cdot \frac{|\overline{V_2 T_2}|}{|\overline{T_1 T_2}|} + \frac{|\overline{T_1 V_2}|}{|\overline{T_1 T_2}|}.$$

Chiamato ora  $\vartheta_{12}$  l'angolo di direzione della semiretta  $T_1 T_2$  orientata da  $T_1$  verso  $T_2$ , risulta:

$$(3.11) \quad \vartheta = \vartheta_{12} + T_2 \hat{T}_1 V_2 - \alpha_1.$$

Ne seguirebbe intanto, ad esempio, per la funzione  $\sin \vartheta$ :

$$(3.12) \quad \sin \vartheta = \cos(\alpha_1' - \alpha_1) \cdot \sin[\vartheta_{12} - (\alpha_1 + \alpha_2)] \cdot \frac{|\overline{V_2 T_2}|}{|\overline{T_1 T_2}|} + \\ + \sin(\vartheta_{12} - \alpha_1) \cdot \frac{|\overline{T_1 V_2}|}{|\overline{T_1 T_2}|}.$$

Ed ora, quando non vi siano particolari difficoltà, si potrebbe pensare di riferire la configurazione piana in studio ad un sistema cartesiano  $(T_1; X^*, Y^*)$  ottenuto trasladando e ruotando l'originario  $(O; X, Y)$  fino a portarne l'origine in  $T_1$  e l'asse  $X^+$  a coincidere con la  $T_1 T_2$  orientata da  $T_1$  a  $T_2$ ; cioè:

$$(3.13) \quad \begin{cases} X^* = (X - X_1) \cdot \cos \vartheta_{12} + (Y - Y_1) \cdot \sin \vartheta_{12}, \\ Y^* = -(X - X_1) \cdot \sin \vartheta_{12} + (Y - Y_1) \cdot \cos \vartheta_{12}. \end{cases}$$

Di più, quale punto iniziale  $V_0$  si pensi d'assumere lo stesso  $T_1$ , onde le varie somme  $\sigma_r$ ,  $\sigma_r'$  ed  $\alpha_1'$  andran corrette di  $-\alpha_1$ :

$$(3.14)$$

$$\sigma_r^* = \sigma_r - \alpha_1, \quad \sigma_r'^* = \sigma_r' - \alpha_1, \quad \alpha_1'^* = \alpha_1' - \alpha_1,$$

il che equivale a porre, in tutte le formule della precedente trattazione,

$$\alpha_1 = 0, \quad \sigma_r = \sigma_r^*, \quad \sigma_r' = \sigma_r'^*, \quad \alpha_1' = \alpha_1'^*.$$

Sempre vigendo le (3.7), cioè:

$$(3.15) \quad d_{12} \cdot \sin \alpha_1'^* = O = d_{n-1, n} \cdot \sin \alpha_n,$$

il parametro d'orientamento  $\vartheta^*$  coincide ora con l'angolo  $T_2 T_1 V_2$  e si avrà:

$$(3.16) \quad \tan \vartheta^* = -A^*/B^*,$$

$$(3.17) \quad \sin \vartheta^* = -\cos \alpha_1'^* \cdot \sin \alpha_2 \cdot \frac{|\overline{V_2 T_2}|}{|X_2^*|},$$

avendo ora indicato con  $A^*$ ,  $B^*$  quanto divengono le  $A$ ,  $B$  secondo la pre-

detta trasformazione roto-traslatoria di coordinate e riuscendo pure ovviamente  $X_2^* = |\overline{T_1} \overline{T_2}|$ .

Dal che risulta essere, in simili condizioni,  $\sin \vartheta^*$  discorde da  $\cos \alpha_1'^*$ ,  $\sin \alpha_2$  e quindi:

(3.18)

$$\sin \vartheta^* = - \frac{\cos \alpha_1'^* \cdot \sin \alpha_2}{|\cos \alpha_1'^* \cdot \sin \alpha_2|} \cdot \frac{|\tan \vartheta^*|}{\sqrt{1 + \tan^2 \vartheta^*}}.$$

Le (3.7) o (3.15) costituiscono, dunque, in tale caso, le condizioni di opzione per dir così automatica.

III) Da sottolineare, infine, che le (3.3) e (3.7) non sono altro che due possibili esempi di condizioni sufficienti per l'unicità della configurazione risolvente; pare infatti non debbano essere anche del tutto necessarie, come apparirà dal seguito immediato.

In tema, appunto, di condizioni necessarie e sufficienti per l'unicità di soluzione si presentano spontanee ed opportune le seguenti considerazioni ed osservazioni.

Si dicano  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$  i due possibili valori reali (nel primo giro angolare) del parametro d'orientamento  $\vartheta$  acquisiti tramite la soluzione dell'equazione (3.0) o (3.1), che si supporranno a coefficienti non tutti nulli.

Ogni  $\vartheta_r$ , ( $r = 1, 2$ ), genererà un sistema del tipo quadro 1. Delle  $2n + 1$  equazioni di ciascun sistema,  $2n$  al massimo risulteranno indipendenti e compatibili esistendo di fatto, per la realtà del problema proveniente da una situazione del mondo fisico, almeno una soluzione reale. Se le equazioni indipendenti fossero  $2n - 1$ , due di esse sarebbero una combinazione delle altre ed il problema sarebbe completamente indeterminato ed i coefficienti della (3.0), o (3.1), sarebbero tutti e tre nulli.

Fatta, dunque, eccezione per il caso di completa indeterminazione, le  $2n$  equazioni indipendenti sono le medesime per l'uno (relativo a  $\vartheta = \vartheta_1$ ) e l'altro (dipendente da  $\vartheta = \vartheta_2$ ) sistema generato, data la supposta esistenza di almeno una configurazione risolvente reale e tra di esse apparirà una, almeno, delle due equazioni (prima ed ultima del quadro 1) nei cui termini noti appaiono le distanze  $d_{12}$ ,  $d_{n-1, n}$ .

Le coordinate  $(\overline{x}_{rs}, \overline{y}_{rs})$  della posizione  $V_{rs}$  del punto  $V_r$ , per  $\vartheta = \vartheta_s$ , saranno esprimibili da relazioni lineari del tipo:

(3.19)

$$\begin{cases} \overline{x}_{rs} = h_r \cdot \sin \vartheta_s + k_r \cdot \cos \vartheta_s + l_r \cdot d_{12} + m_r \cdot d_{n-1, n}, \\ \overline{y}_{rs} = \eta_r \cdot \sin \vartheta_s + \chi_r \cdot \cos \vartheta_s + \lambda_r \cdot d_{12} + \mu_r \cdot d_{n-1, n}, \\ (r = 1, 2, \dots, n-1, n; s = 1, 2), \end{cases}$$

con  $h_r$ ,  $k_r$ ,  $l_r$ ,  $m_r$ ,  $\eta_r$ ,  $\chi_r$ ,  $\lambda_r$ ,  $\mu_r$  opportune funzioni, anche nulle, dei coefficienti presenti, a 1° e 2° membro, nelle  $2n$  equazioni indipendenti considerate.

Le (3.19), sostituite nelle (2.8), assieme all'omonimo  $\vartheta = \vartheta_s$ , condurranno alle richieste  $(x_{rs}, y_{rs})$ .

S'impongano ora le uguaglianze d'unicità di soluzione:

(3.20)

$$\begin{aligned} x_{r1} &= x_{r2}, & y_{r1} &= y_{r2} \\ & & (r &= 1, 2, \dots, n-1, n). \end{aligned}$$

Ne seguono le  $2n$  seguenti equazioni, necessarie e sufficienti per l'unicità d'una configurazione risolvente:

(3.21)

$$\begin{aligned} k_r \cdot E_1 - \eta_r \cdot E_2 + (h_r - \chi_r) \cdot E_3 + g_r \cdot E_4 - \gamma_r \cdot E_5 &= 0, \\ \chi_r \cdot E_1 + h_r \cdot E_2 + (k_r + \eta_r) \cdot E_3 + \gamma_r \cdot E_4 + g_r \cdot E_5 &= 0, \\ &(r = 1, 2, \dots, n-1, n), \end{aligned}$$

lineari nelle espressioni:

(3.22)

$$\begin{aligned} E_1 &= \cos^2 \vartheta_1 - \cos^2 \vartheta_2, & E_2 &= \sin^2 \vartheta_1 - \sin^2 \vartheta_2, \\ E_3 &= \sin \vartheta_1 \cdot \cos \vartheta_1 - \sin \vartheta_2 \cdot \cos \vartheta_2, \\ E_4 &= \cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2, & E_5 &= \sin \vartheta_1 - \sin \vartheta_2, \end{aligned}$$

contenenti funzioni goniometriche circolari di  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$ , ed una volta che si sia pure posto:

(3.23)

$$\begin{aligned} g_r &= l_r d_{12} + m_r d_{n-1, n}, \\ \gamma_r &= \lambda_r d_{12} + \mu_r d_{n-1, n}, \\ &(r = 1, 2, \dots, n-1, n). \end{aligned}$$

Ora, per questioni ove sia  $d_{12} = 0 = d_{n-1, n}$ , o a queste condizioni praticamente riconducibili, com'è quando hanno luogo le (3.7), o quando per ogni  $r$  sia:

$$l_r = m_r = \lambda_r = \mu_r = 0,$$

le (3.21) si riducono alle più semplici trinomie:

(3.24)

$$\begin{aligned} k_r \cdot E_1 - \eta_r \cdot E_2 + (h_r - \chi_r) \cdot E_3 &= 0, \\ \chi_r \cdot E_1 + h_r \cdot E_2 + (k_r + \eta_r) \cdot E_3 &= 0, \\ &(r = 1, 2, \dots, n-1, n). \end{aligned}$$

Per un problema semplice di SNELLIUS-COLLINS-POTHENOT, è  $r = 1$  e la matrice dei coefficienti delle (3.24):

(3.25)

$$\left\| \begin{array}{ccc} k_1 & -\eta_1 & h_1 - \chi_1 \\ \chi_1 & h_1 & k_1 + \eta_1 \end{array} \right\|$$

ha caratteristica 2, altrimenti intercorrerebbero dei legami di dipendenza tra le grandezze intervenienti nelle  $h_1, k_1, \eta_1, \chi_1$  provenienti da due sole equazioni delle tre del sistema del quadro 1 corrispondente.

Le due (3.24) stesse, od altre equivalenti deducibili con la teoria delle equazioni lineari omogenee, costituirebbero dunque due equazioni indipendenti per la determinazione di  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$ , adducanti ad un'unica configurazione risolvente, che verrebbero così a dipendere, non già dalla terna di equazioni del sistema del quadro 1, come vuole l'equazione risolvente generale (3.0), ma esclusivamente da due sole di esse. Nelle premesse ipotesi, dunque, le due (3.24) in parola non potranno che essere soddisfatte dalle contemporanee:

(3.26)

$$E_1 = 0, \quad E_2 = 0, \quad E_3 = 0,$$

e cioè da:

(3.27)

$$\vartheta_1 \equiv \vartheta_2 \pmod{\pi}.$$

In altre parole, se così non fosse, cioè se non sussistessero le (3.26), le due (3.24) (ove  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$  s'intendano espressi mediante i coefficienti della (3.0)), assieme alla matrice (3.25) di caratteristica 2 od 1, darebbero luogo a due o tre distinti legami di reciproca dipendenza tra tutti gli elementi assegnati o rilevati ( $X_r, Y_r$ ),  $\alpha_r, \alpha'_r$ , ed in genere indipendenti, indispensabili alla soluzione del problema non indeterminato.

La (3.27) comporta sia  $C = 0$  nell'equazione (3.1).

Per  $n \geq 2$  punti  $V_r$ , ( $r = 1, 2, \dots, n-1, n$ ) e  $d_{12}$ ,  $d_{n-1, n}$  ambo assenti da tutte le corrispondenti (3.21), delle  $2n \geq 4$  equazioni (3.24) o ve ne sono tre tra di loro linearmente indipendenti o  $2n-2$  sono combinazioni lineari di due indipendenti. In questa seconda alternativa varrebbe quanto già poc'anzi osservato per  $n=1=r$ . Dunque, nell'una o nell'altra situazione, le  $2n$  equazioni (3.24) saranno soddisfatte solo dalle (3.26) e cioè ancora dalla (3.27).

Per  $n \geq 2$  punti  $V_r$ , ( $r = 1, 2, \dots, n-1, n$ ), e per  $d_{12}$  o  $d_{n-1, n}$  od entrambi presenti in qualcuna delle (3.21), in tutto il loro insieme appariranno in genere tutte e cinque le espressioni  $E_i$ , ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ), dipendenti da funzioni circolari  $\sin$  e  $\cos$  di  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$ .

Ed ora, se il numero dei  $V_r$  è due, le quattro equazioni (3.21) o sono tutte e quattro linearmente indipendenti o la matrice dei coefficienti  $k_r$ ,  $\eta_r$ , etc. ha caratteristica non superiore a 3.

Nell'uno e nell'altro caso avremmo, ove si esprimano  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$  mediante i coefficienti della (3.0) o (3.1) e si tenga pure conto dell'annullamento dei minori quando la caratteristica sia inferiore a 4, almeno 4 distinti legami di reciproca dipendenza tra tutti gli elementi assegnati o rilevati ( $X_r$ ,  $Y_r$ ),  $\alpha_r$ ,  $\alpha_r'$ , ed in genere indipendenti, indispensabili alla soluzione del problema non indeterminato. A ciò si ovvia con la conclusione che per la coesistenza delle 4 equazioni (3.21) dovrà essere contemporaneamente:

$$(3.28) \quad E_1 = 0, E_2 = 0, E_3 = 0, E_4 = 0, E_5 = 0,$$

e cioè:

$$(3.29) \quad \vartheta_1 \equiv \vartheta_2 \pmod{2\pi}.$$

Se il numero dei  $V_r$  è superiore a 2, tra le almeno 6 equazioni (3.21) o ve ne sono 5 linearmente indipendenti o l'indipendenza lineare si limita a non più di 4 di esse. Nell'uno e nell'altro caso, comunque, o per la teoria delle equazioni lineari omogenee o per le considerazioni poc'anzi svolte, avranno luogo le (3.28) e (3.29).

La (3.29) implicherà la (3.3).

In conclusione, dunque, l'unicità di soluzione, in caso di problema determinato, comporta sia di necessità  $C = 0$  oppure  $C^2 = A^2 + B^2$  se  $C \neq 0$ . Questa seconda alternativa si rivela pure sufficiente; non vale altrettanto per la prima condizione  $C = 0$ .

Assieme a  $C = 0$ , equivalente alla  $\vartheta_1 = \vartheta_2 \pm \pi$  per modo che le (3.21) si riducono alle:

$$(3.30) \quad \begin{cases} g_r \cdot \cos \vartheta_1 - \gamma_r \cdot \sin \vartheta_1 = 0, \\ \gamma_r \cdot \cos \vartheta_1 + g_r \cdot \sin \vartheta_1 = 0, \end{cases} \quad (r = 1, 2, \dots, n-1, n),$$

se si pretende l'unicità di soluzione, occorrerà ipotizzare sussistano pure le uguaglianze:

$$(3.31) \quad \begin{cases} l_r \cdot d_{12} + m_r \cdot d_{n-1, n} = 0, \\ \lambda_r \cdot d_{12} + \mu_r \cdot d_{n-1, n} = 0, \end{cases} \quad (r = 1, 2, \dots, n-1, n),$$

in particolare soddisfatte da

$$d_{12} = 0 = d_{n-1, n},$$

com'è nei problemi classici, semplici od ampliati, di SNELLIUS-COLLINS-POTHENOT, HANSEN, MAREK.

(continua)



**SOCIETA' AEROFOTOGRAFIE E  
RILEVAMENTI AEROFOTOGRAMMETRICI  
S.A.R.A. S.p.A.**

**00146 ROMA - VIA ODERISI DA GUBBIO 101**

**TELEGRAMMI: SARANISTRI - TEL. 555708 - 553643**

**aerofotogrammetria**

**dal 1921**

