

# UNA INTERSEZIONE (QUADRATICA) INVERSA UNIFICATRICE NEL PIANO

COMUNICAZIONE PRESENTATA AL XVI CONGRESSO SIFET  
FIUGGI 30 SETTEMBRE - 4 OTTOBRE 1971

Valentino Tomelleri del Politecnico di Milano  
(seguito e fine dal n. 1/1972, pag. )

## 4 - Procedimento d'univocità.

4.1 — La possibilità teoretica d'una coppia di configurazioni obbliga, come s'è detto, all'acquisizione, in fase di rilievo (in mancanza di altre possibilità o notizie), di un qualche ulteriore elemento, ampliando eventualmente la catena, che metta in grado di operare una scelta *a posteriori*. Poiché un qualche dato sovrabbondante, per ragioni di controllo e precisione, v'è sempre in qualsiasi operazione topografico-geodetica, converrà adottare fin dall'inizio dell'elaborazione un procedimento a soluzione unica annoverando l'elemento « *súperfluo* » nella famiglia, ampliata, degli « strettamente necessari ».

Precisamente, oltre ai dati angolari e lineari di cui s'è detto al precedente numero, con  $n$  però ora non inferiore a 4, si ponga di conoscere, per rilievo diretto od indiretto o comunque altrimenti, pure la distanza  $d_{i, i+1}$ , (ridotta alla proiezione cartografica in uso), tra le stazioni o vertici  $V_i$  e  $V_{i+1}$ , ( $2 \leq i \leq n-2$ ).

Si è allora in grado di associare la  $(2n+2)$ -esima equazione, del tipo della (2.13) o (2.14), alle  $2n+1$  strettamente necessarie del quadro 1.

Data la presenza lineare delle incognite  $\cos \delta$ ,  $\sin \delta$  a 2° membro delle equazioni relative alle direzioni  $V_r T_r$ , una volta portati questi termini a 1° membro ne consegue un sistema di  $2n+2$  equazioni lineari nelle altrettante incognite  $(\bar{x}_r, \bar{y}_r)$ , ( $r = 1, 2, \dots, n-1, n$ ),  $\cos \delta$ ,  $\sin \delta$ , i cui termini noti sono per lo più nulli, all'infuori dei tre relativi alle distanze  $d_{12}$ ,  $d_{i, i+1}$ ,  $d_{n-1, n}$  (non tutte nulle, almeno in una prima ipotesi generale).

Si ha così il sistema generale del quadro 3 da risolvere con i noti algoritmi.

4.2 — Per una proficua riduzione a dimensioni alquanto ristrette e l'acquisizione di formule generali risolventi finite da utilizzare sia in fase pratico-numerica (quando possibile) che in sede di discussione teoretica in tema di unicità e particolarizzazioni secondo i classici noti procedimenti, si suppongano ora non nulli, ad esempio, tutti i coseni  $c_r$  e  $c_{r'}$ . Divisa ciascuna equazione per il corrispondente  $c_r$  o  $c_{r'}$ , nel quadro 3 modificato appariranno 1 in luogo dei  $c_r$  e  $c_{r'}$ , le tangenti  $t_r$  e  $t_{r'}$  al posto dei seni  $s_r$  ed  $s_{r'}$ , le funzioni  $p_r$  e  $q_r$  ove stanno le  $P_r$  e  $Q_r$ , ed infine nei 2° membri compariranno i divisori non nulli  $c'_r$ ,  $c'_i$ ,  $c'_{n-1}$ .

Si chiami  $\Delta$  il determinante di un tal sistema, cioè della matrice quadrata dei coefficienti delle  $2n+2$  incognite (quadro 3 modificato).

$s'_1$	$c'_1 - s'_1$	$-c'_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\overline{y}_1$	$d_{12}$
$c_1$	$-s_1$	0	0	0	0	0	0	0	$-P_1$	$-Q_1$	$\overline{x}_1$	0
$c'_1$	$-s'_1$	$-c'_1$	$s'_1$	0	0	0	0	0	0	0	$\overline{y}_2$	0
0	0	$c_2$	$-s_2$	0	0	0	0	0	0	$-P_2$	$-Q_2$	0
0	0	$c'_2$	$-s'_2$	$-c'_2$	$s'_2$	0	0	0	0	0	$\overline{x}_2$	0
.....												
sub-matrice												
.....												
0	$c_{i-1}$	$-s_{i-1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\overline{x}_{i-1}$	0
0	0	$c'_{i-1}$	$-s'_{i-1}$	$-c'_{i-1}$	$s'_{i-1}$	0	0	0	0	0	$\overline{y}_i$	0
0	0	0	0	$c_i$	$-s_i$	0	0	0	0	$-P_i$	$-Q_i$	0
0	0	0	0	0	0	$c'_i$	$-s'_i$	$-c'_i$	$s'_i$	0	0	0
0	0	0	0	0	0	$s'_i$	$c'_i - s'_i$	$-c'_i$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	$c_{i+1}$	$-s_{i+1}$	0	$\overline{y}_{i+2}$	0
.....												
sub-matrice												
.....												
0	0	$c_{n-1}$	$-s_{n-1}$	0	0	0	0	0	0	$-P_{n-1}$	$-Q_{n-1}$	0
0	0	0	0	$c'_n$	$-s'_n$	$-c'_n$	$s'_n$	0	0	0	$\overline{y}_n$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	$c_n$	$-s_n$	$-P_n$	$-Q_n$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\overline{x}_n$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\cos \theta$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\sin \theta$	0

Quadro 3

Inserendo l'equazione del tipo (2.14) relativa alla distanza  $d_{i, i+1}$  tra quella della direzione  $V_i V_{i+1}$  e quella della  $V_{i+1} T_{i+1}$ , ed orlando la matrice a 1° membro del quadro 1 con le colonne di  $2n + 2$  elementi:

$$0, -p_1, 0, -p_2, \dots, -p_{i-1}, 0, -p_i, 0, 0, -p_{i+1}, \\ \dots, -p_{n-1}, 0, -p_n, 0,$$

per la funzione incognita  $\cos \vartheta$ , e:

$$0, -q_1, 0, -q_2, \dots, -q_{i-1}, 0, -q_i, 0, 0, -q_{i+1}, \\ \dots, -q_{n-1}, 0, -q_n, 0,$$

per l'altra  $\sin \vartheta$ , per il determinante  $\Delta$  del sistema, con analoghe elaborazioni alle già in precedenza attuate, si ottiene l'espressione presentata nel quadro 4 qui a lato.

Trattasi di determinante a matrice quadrata d'ordine  $n - 1$ , per la cui struttura e stesura, in termini generici, sarà solo da sottolineare la diversa composizione delle colonne 1<sup>a</sup>,  $(i - 1)^a$  ed  $(n - 3)^a$  dalle altre intermedie a motivo, appunto, della influenza delle tre anzidette distanze.

Si indichino a loro volta con

$$\Delta \cos \text{ e } \Delta \sin$$

i determinanti delle matrici quadrate per la determinazione delle incognite rispettive  $\cos \vartheta$ ,  $\sin \vartheta$  tramite l'applicazione della consueta regola di KRAMER. Con la sostituzione della colonna dei termini noti alle corrispondenti  $(2n + 1)^a$  nella matrice quadrata del sistema (quadro 3 modificato), se ne traggono le espressioni ridotte opportunamente sintetizzate nel quadro 5 con la legenda seguente per i simboli  $fun$ ,  $\varepsilon$  ed  $f_r$  della colonna  $(n - 1)$ -esima:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \text{I) } fun &= \cos, \quad \varepsilon = i - 1, \quad f_r = \bar{q}_r, \\ & \quad \quad \quad (r = 1, 2, \dots, n - 2, n - 1); \\ \text{II) } fun &= \sin, \quad \varepsilon = i, \quad f_r = \bar{p}_r, \\ & \quad \quad \quad (r = 1, 2, \dots, n - 2, n - 1). \end{aligned}$$

Volendo, complicando alquanto l'ultima colonna ad esempio con  $i$  termini:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} & (-1)^i \cdot d_{i, i+1} \cdot \sin \alpha_{i+1} / \cos \sigma_{i+1}, \\ & (-1)^i \cdot d_{i, i+1} \cdot \sin (\alpha'_{i+1} - \alpha_{i+1}) \cdot \cos \sigma'_i / (\cos \sigma_{i+1} \cdot \cos \sigma'_{i+1}), \end{aligned}$$

previa fusione delle colonne  $(i - 1)^a$  ed  $i^a$  (aggiungendo questa a quella), si potrebbe eliminare la riga  $(i + 1)^a$  e la colonna  $i^a$ , conseguendo così una matrice quadrata d'ordine  $n - 1$  con le prime  $n - 3$  colonne uguali alle corrispondenti della matrice di  $\Delta$  del quadro 4.

Per completezza di indagine e per una maggiore semplicità d'elaborazione teoretica di qualche problema, atteso che lo scopo finale è la determinazione delle coordinate  $(x_r, y_r)$  dei punti in questione, si potrebbero procurare pure le eventuali espressioni generali dei determinanti delle matrici relative alle incognite  $\bar{y}_r, \bar{x}_r$ . Ci si esime però da una tale indagine, anche se non difficile, dovendosi, ad un primo esame, distinguere vari casi per il diverso intervento dei termini noti a causa della differente struttura di alcune equazioni del sistema. E cioè, oltre ad una distinzione tra la determinazione della coordinata generica  $\bar{y}_r$  da quella concernente la  $\bar{x}_r$ , così come s'è qui fatto per  $\Delta \cos$  e  $\Delta \sin$ , saranno ovviamente da esaminare a parte le matrici relative ad  $\bar{y}_j, \bar{x}_j, \bar{y}_{j+1}, \bar{x}_{j+1}$ , ( $j = 1, i, n - 1$ ), e trarne eventualmente una o più espressioni generali concise del tipo di quanto appare nel quadro 5.

$$A = \frac{(-1)^{i-1}}{(c_1' c_1' c_1' \dots c_1' n-1)^2}$$

$t_1-t_2$	0	0	0	sub-matrice	$P_i$	$q_i$
$t_2-t_1'$	$t_2-t_3$	0	0		$P_2$	$q_2$
0	$t_3-t_1'$	$t_3-t_4$	0	nulla	$P_3$	$q_3$
.....						
0	sub-matrice	$0$	$t_{i-2}-t_{i-2}'$	$t_{i-2}-t_{i-1}$	0	0
0	0	0	$t_{i-1}-t_{i-1}'$	$t_{i-1}-t_i$	0	0
0	0	0	0	$t_i-t_{i+1}$	0	0
0	0	0	0	$t_{i+1}-t_{i+1}'$	$t_{i+1}-t_{i+2}$	0
0	nulla	0	0	$t_{i+2}-t_{i+2}'$	$t_{i+2}-t_{i+3}$	0
.....						
0	sub-matrice	0	$t_{n-3}-t_{n-3}'$	$t_{n-3}-t_{n-2}$	0	0
0	0	0	0	$t_{n-2}-t_{n-2}'$	$t_{n-2}-t_{n-1}$	0
0	nulla	0	0	0	$t_{n-1}-t_{n-1}'$	0

colonna  
(i-1)<sup>o</sup>

colonna  
(n-3)<sup>o</sup>

Quadro 4

riga  
 $i$ <sup>a</sup>

riga  
(n-1)<sup>a</sup>

$t_1-t_2$  0 0 0 sub-matrice  $f_1$   $d_{12}$   $\frac{\sin(\alpha'_1 - \alpha_1)}{\cos \sigma_1}$   
 $t_2-t_1$   $t_2-t_3$  0 0  $f_2$  0  
 0  $t_3-t_1$   $t_3-t_4$  0 nulla  $f_3$  0  
 .....  
 .....

$$\Delta fun = \frac{(-1)^{\epsilon}}{(c_1^t c_1^t)^2}$$

0 sub-matrice 0  $t_{i-1}-t_i$   $t_i-t_{i+1}$  0 0 sub-matrice 0  $f_{i-1}$  0  
 0 0  $t_i-t_{i+1}$   $t_{i+1}$  0 0  $f_i$  0  
 0 0 0 0 -1 0 0 0  $(-1)^{i-1} d_{i,i+1} \cdot \cos \sigma_i$   
 0 nulla 0  $t_{i+1}-t_{i+2}$   $t_{i+1}-t_{i+2}$  0 nulla 0  $f_{i+1}$  0  
 .....  
 .....

riga  
 $\leftarrow$   
 $(i+1)^2$

0 sub-matrice 0  $t_{n-3}-t_{n-2}$   $t_{n-3}-t_{n-2}$  0  $f_{n-3}$  0  
 0 0 0  $t_{n-2}-t_{n-1}$   $t_{n-2}-t_{n-1}$   $f_{n-2}$  0  
 0 nulla 0 0 0  $t_{n-1}-t_n$   $f_{n-1}$   $(-1)^{n-1} d_{n-1,n} \cdot \frac{\sin \alpha_n}{\cos \sigma_n}$   
 .....  
 .....

riga  
 $\leftarrow$   
 $\frac{n}{a}$

A colonna  $\frac{1}{a}$  colonna  $\frac{1}{(n-2)^2}$

fun=cos	fun=sin
$\epsilon=i-1$	$\epsilon=i$
$f^r = q^r$	$f^r = p^r$
$(r=1, 2, \dots, n-2, n-1)$	$(r=1, 2, \dots, n-2, n-1)$

4.3 - A questo punto non resta che far osservare l'indipendenza del determinante  $\Delta$  del sistema dalle distanze in gioco, intervenendovi solo gli angoli misurati  $\alpha_r, \alpha_r'$  e le coordinate  $X_r, Y_r$  dei  $T_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n-1, n$ ). L'annullarsi di  $\Delta$  è quindi sinonimo di un legame tra dette generiche grandezze. Salvo casi particolari, perciò, in genere riuscirà  $\Delta \neq 0$  e sarà possibile conseguire:

$$(4.3) \quad \cos \vartheta = \frac{\Delta \cos}{\Delta}, \quad \sin \vartheta = \frac{\Delta \sin}{\Delta},$$

$$(4.4) \quad \tan \vartheta = \frac{\Delta \sin}{\Delta \cos}.$$

Anzitutto, questi rapporti sono indipendenti dal comune fattore  $1/(c_1' \text{ ci } c_{n-1})^2$ .

E' pure immediata la constatazione dell'indipendenza della (4.4) dal fattore  $(-1)^{i-1} \cdot d_{i, i+1} \cdot \cos \sigma_i'$  attinente la distanza intermedia  $d_{i, i+1} \neq 0$  (anche incognita) quando simultaneamente fosse:

$$d_{i2} \cdot \sin(\alpha_1' - \alpha_1) = 0 = d_{n-1, n} \cdot \sin \alpha_n.$$

Ed in questo ci si accorda con il noto procedimento cosiddetto « di falsa posizione » per la soluzione del classico problema di HANSEN o della distanza inaccessibile.

Più in generale, quando fosse:

$$d_{i2} \cdot \sin(\alpha_1' - \alpha_1) = 0 = d_{i, i+1} \cdot \sin \alpha_{i+1}$$

assieme ad una, almeno, delle disuguaglianze:

$$d_{i, i+1} \cdot \sin \alpha_{i+1}' \cdot \cos \alpha_{i+1} \neq 0, \quad d_{n-1, n} \cdot \sin \alpha_n \neq 0,$$

oppure, in altra situazione, avessero luogo le uguaglianze:

$$d_{i, i+1} \cdot \sin(\alpha_{i+1}' - \alpha_{i+1}) = 0 = d_{n-1, n} \cdot \sin \alpha_n,$$

con una, almeno, delle disuguaglianze:

$$d_{i2} \cdot \sin(\alpha_1' - \alpha_1) \neq 0, \quad d_{i, i+1} \cdot \sin \alpha_{i+1} \neq 0$$

od, infine, come già detto, si avesse:

$$d_{i2} \cdot \sin(\alpha_1' - \alpha_1) = 0 = d_{n-1, n} \cdot \sin \alpha_n$$

con  $d_{i, i+1}$  non nulla, anche non conosciuta, ci si troverebbe di fronte ad altrettante configurazioni di MAREK estese a parte od a tutti i punti interessati. In tali casi il rapporto a 2° membro della (4.4) è indipendente dagli elementi  $\alpha_r, \alpha_r', X_r, Y_r, d_s, s+1$  esterni alla catena di MAREK ad estremi triangolari.

Ad esempio, sia:

$$d_{i2} \neq 0, \quad d_{i, i+1} = 0 = d_{n-1, n}, \quad (2 \leq i \leq n-2),$$

cioè:

$$V_i \equiv V_{i+1}, \quad V_{n-1} \equiv V_n,$$

$$\alpha_i = V_{i-1} \hat{V}_{i+1} T_i, \quad \alpha_i \equiv \alpha_i \pmod{\pi}, \quad \alpha_{i+1} = T_i \hat{V}_{i+1} T_{i+1},$$

$$\alpha_{n-1} = T_{n-1} \hat{V}_{n-1} T_n, \quad \alpha_n \equiv 0 \pmod{\pi},$$

e quindi:

$$t_i = t_i', \quad t'_{n-1} = t_n.$$

Ed allora, una volta che, nel determinante  $\Delta_{fun}$  del quadro 5, si siano addizionate la colonna  $(i-1)^a$  alla  $i^a$  e sopresse le righe  $1^a$  ed  $(i+1)^a$  e le colonne  $(i-1)^a$  ed  $n^a$ , nelle prime  $i-2$  colonne appare una matrice nelle cui  $i-2$  prime righe solamente è presente l'unico minore (a matrice triangolare, essendo nulli tutti gli elementi da una parte della diagonale principale) non nullo. Il risultato sarebbe quello del quadro 6. Il rapporto, secondo la (4.4), è così indipendente dal comune fattore:

$$\Delta_{fun} = \frac{(-1)^{n+\epsilon} \cdot d_{12} \cdot \sin(\alpha'_1 - \alpha_1)}{(c'_1 c'_1 c'_1)^2 \cdot c_1} \prod_{r=2}^{r=i-1} (t_r - t'_r).$$

$t'_i - t_{i+1}$	0	0	0	sub-matrice	$f_i$	
$t_{i+1} - t'_{i+1}$	$t'_{i+1} - t_{i+2}$	0	0		$f_{i+1}$	
0	$t_{i+2} - t'_{i+2}$	$t'_{i+2} - t_{i+3}$	0	nulla	$f_{i+2}$	
.....	.....	.....	.....	.....	.....	
.....	.....	.....	.....	.....	.....	
0	sub-matrice	0	$t_{n-3} - t'_{n-3}$	$t'_{n-3} - t_{n-2}$	0	$f_{n-3}$
0	0	0	0	$t_{n-2} - t'_{n-2}$	$t'_{n-2} - t_{n-1}$	$f_{n-2}$
0	nulla	0	0	0	$t_{n-1} - t_n$	$f_{n-1}$

(4.5)

$$\frac{(-1)^n \cdot d_{12} \cdot \sin(\alpha_1' - \alpha_1)}{(c_1' c_1' c_{n-1})^2 \cdot c_1} \prod_{r=2}^{r=1-1} (t_r - t_r'),$$

e fornisce la tangente dell'angolo d'orientamento  $\hat{\vartheta}$  del primo lato o direzione  $V_0 V_1$  che con il primo lato  $V_i T_i = V_{i+1} T_i$  della catena tri-quadri-angolare di MAREK forma l'angolo, a meno di multipli di  $\pi$ ,  $\sigma_1 \equiv \sigma_1' \pmod{\pi}$  di tangente  $t_i = t_i'$ . E tutto ciò è appunto in accordo con la relazione generale relativa al problema ampliato di MAREK a catena quadri-triangolare. (Cfr. « Sul problema di MAREK ampliato etc. », op. cit., ove pure, al n. 4, si fa constatare la deducibilità della formula risolutiva per il problema semplice di SNELLIUS-COLLINS-POTHENOT, con opportune particolarizzazioni, da quella generale del problema ampliato di MAREK).

Altrettanto d'analogo ha luogo nell'ipotesi sia invece:

$$d_{12} = 0 = d_{i+1}, \quad d_{n-1, n} \neq 0.$$

Una prima conclusione è dunque la seguente: nei casi di pratici rilievi topografico-geodetici, ove risulti  $\Delta \neq 0$ , la relazione generale (4.4) fornisce l'unico possibile coefficiente direzionale  $\tan \hat{\vartheta}$  della direzione iniziale di riferimento angolare nella prima stazione o vertice angolare della poligonale da posizionare.

4.4 — Resta ora da discutere il caso di  $\Delta = 0$ . Anzitutto, trattandosi di un problema di carattere pratico con almeno una soluzione reale, la compatibilità delle  $2n + 2$  equazioni del sistema del quadro 3 comporta che la matrice completa di tipo  $(2n + 2, 2n + 3)$  abbia caratteristica o rango minore di  $2n + 2$ , cioè, anche, tutti gli altri  $2n + 2$  suoi minori d'ordine massimo risulteranno pure nulli, od anche: una equazione, almeno, è combinazione lineare di al massimo  $2n + 1$  altre equazioni indipendenti del sistema. Le (4.3) e (4.4) risulterebbero così indeterminate.

Dopo di che saranno da distinguere le due eventualità: I) le distanze  $d_{12}, d_{i, i+1}, d_{n-1, n}$  sono tutte e tre nulle; II) una almeno delle predette distanze non è nulla.

I)  $\Delta = 0, \quad d_{12} = d_{i, i+1} = d_{n-1, n} = 0.$

Trattasi evidentemente di una configurazione a tre possibili catene tri-quadri-angolari ampliate di MAREK:

- 1)  $T_1, V_1 \equiv V_2, T_2, \dots, T_i, V_i \equiv V_{i+1}, T_{i+1};$
- 2)  $T_i, V_i \equiv V_{i+1}, T_{i+1}, \dots, T_{n-1}, V_{n-1} \equiv V_n, T_n;$
- 3)  $T_1, V_1 \equiv V_2, T_2, \dots, T_i, V_i, V_{i+2}, T_{i+2}, \dots,$   
 $T_{n-1}, V_{n-1} \equiv V_n, T_n,$

tra di loro equivalenti nel senso che una sola di esse basta a risolvere il problema.

Se ne trarranno altrettante equazioni del tipo della (3.1), o (3.0), con termine noto  $C$ , però, nullo. Assumendo allora, per definizione,  $\Delta \sin$  e  $\Delta \cos$  proporzionali rispettivamente ad  $A$  e  $-B$ , la (4.4) permane valida. S'osservi che  $A$  e  $B$  han la struttura del determinante presente a 2° membro della  $\Delta$  fun del quadro 6.

Nelle premesse ipotesi, dunque, il problema ammette un'unica soluzione tuttora fornita dalla (4.4) e la condizione  $\Delta = 0$  esprime che una delle misure angolari effettuate  $\alpha_r, \alpha_r'$  è subordinata alle altre; ed infatti, con le coincidenze  $V_1 \equiv V_2, V_i \equiv V_{i+1}, V_{n-1} \equiv V_n$  i punti  $V_r$  distinti sono in effetti solamente  $n - 3$ , mentre le misure angolari a disposizione, a parte l'iniziale  $V_0 V_1 T_1$  relativa a  $V_0$  eventualmente nulla, realmente effettuate per la loro



individuazione sono in numero di  $2(n-3) + 1$ , di cui una è quindi eccedente e condizionata dalle altre. Ad esempio, la catena sumenzionata 1) individuerà, anzitutto, i punti  $V_1 \equiv V_2, V_3, \dots, V_{i-1}, V_i \equiv V_{i+1}$ ; per ognuno dei rimanenti  $V_r$ , ( $r = i + 2, \dots, n - 1$ ), bastano le coppie rispettive  $\alpha'_{r-1}, \alpha_r$ ; l'ultimo dato angolare  $\alpha_{n-1}$  è condizionato dalle ubicazioni note di  $V_{n-1} \equiv V_n$  e  $T_n$ .

Nel caso tipico di  $n = 4$  punti  $T_1, T_2, T_3, T_4$  ed unico punto  $V_1 \equiv V_2 \equiv V_3 \equiv V_4$  da indicarsi semplicemente con  $V$ , la  $\Delta = O$  esprimerà l'appartenenza dei raggi  $VT_r$ , ( $r = 1, 2, 3, 4$ ) ad un fascio di rette del piano di centro (incognito)  $V$  da cui sono stati valutati, ad esempio, gli angoli consecutivi  $T_r VT_{r+1}$ , ( $r = 1, 2, 3$ ). Conclusione analoga vale per  $n \geq 4$  punti  $T_r$  visti da un unico vertice  $V$ .

Il problema di intersezione inversa semplice di SNELLIUS-COLLINS-POTHENOT può considerarsi un caso limite del precedente relativo ad  $n = 4$ , ove però due dei  $T_1, T_2, T_3, T_4$ , ad esempio  $T_3 \equiv T_4$ , coincidano tra loro. Questa condizione limite di coincidenza annulla automaticamente  $\Delta$ . La (4.4), con la suddetta definizione per  $\Delta \sin$  e  $\Delta \cos$ , deducibili anche come opportune particolarizzazioni della  $\Delta \text{fun}$  del quadro 6 (come poco fa ricordato in un inciso a proposito della formula generale risolutiva del problema ampliato di MAREK), rimane tuttora valida. (Cfr. formule di REUTZEL-KNEISSL-GALKIEWICZ per il problema di SNELLIUS-COLLINS-POTHENOT nei moderni trattati di Topografia, oppure anche i lavori già citati dell'autore).

II)  $\Delta = O$  e  $d_{12}, d_{i, i+1}, d_{n-1, n}$  non tutte nulle.

Ci ci troverebbe di fronte, come già detto, per ragioni di compatibilità delle  $2n + 2$  equazioni originarie del sistema del quadro 3 o di caratteristica della sua matrice completa, ad un complesso di  $2n + 3$  equazioni esprimenti l'annullarsi degli  $2n + 3$  minori di massimo ordine  $2n + 2$  estraibili da anzidetta matrice. Queste  $2n + 3$  equazioni involgono i  $2n + 1$  elementi angolari-lineari misurati  $\alpha'_r - \alpha_r, \alpha_r, (r = 2, \dots, n), \alpha'_r, (r = 2, \dots, n - 1), d_{12}, d_{i, i+1}, d_{n-1, n}$  e le  $2n$  coordinate a priori assegnate  $(X_r, Y_r)$  di  $T_r, (r = 1, 2, \dots, n - 1, n)$ . Se quindi fossero  $2n + 3$  effettive equazioni indipendenti, tutti i  $2n + 1$  elementi angolari-lineari rilevati ed in più una coppia  $(X_s, Y_s)$  sarebbero funzioni delle rimanenti  $n - 1$  coppie  $(X_r, Y_r)$ , e cioè  $n - 1$  punti  $T_r$  ubicherebbero automaticamente l' $n$ -esimo  $T_s$  della loro stessa famiglia e gli  $n$  altri qualsivoglia  $V_r$  della poligonale da posizionare!

Le  $2n + 3$  predette uguaglianze a zero non possono quindi essere che altrettante identità a zero per i valori interessati introdottivi.

Pongasi ora che tra le  $2n + 2$  equazioni del sistema del quadro 3 ve ne siano  $2n + 1$  linearmente indipendenti. Per la loro compatibilità varrà quanto già detto al n. 3 precedente, cioè si ritroverà una equazione del tipo della (3.0) o (3.1) per la determinazione dei valori possibili del parametro d'orientamento  $\delta$ . Una siffatta equazione, ove non sia una identità a zero per nullità di tutti e tre i suoi coefficienti, com'è nel caso di completa indeterminazione, ammetterebbe due soluzioni reali, nel primo giro angolare. Se due distinte fossero le configurazioni finali solutrici, si presenterebbe la necessità d'un ulteriore elemento di rilievo per operare l'opzione e nel contempo l'assurda impossibilità d'utilizzare quello a disposizione già rilevato a tale scopo indipendentemente dagli altri!

Nelle premesse ipotesi, dunque, la configurazione finale risolvete non può che essere unica e quindi di necessità, come già s'è visto alla fine

del n. 3, per i coefficienti della corrispondente equazione (3.1) in gioco o è  $C = 0$  oppure  $C^2 = A^2 + B^2$  se  $C \neq 0$ . Per  $C = 0$  si avrebbe, come già detto:

$$(4.6) \quad \tan \vartheta = -\frac{A}{B},$$

mentre che per  $C^2 = A^2 + B^2$  e  $C \neq 0$ , risulterebbe:

$$(4.7) \quad \tan \vartheta = B/A,$$

ancora del tipo della (4.4) previa opportuna definizione di  $\Delta \sin$  e  $\Delta \cos$  mediante i coefficienti  $A$  e  $B$ .

Se, invece, tra le  $2n + 2$  equazioni del quadro 3 le linearmente indipendenti fossero solamente  $2n$ , il problema risulterebbe completamente indeterminato.

Se, dunque, non si ha a che fare con un caso di indeterminazione, l'essere  $\Delta = 0$  è sinonimo d'unicità di soluzione tramite solo  $2n + 1$  equazioni del quadro 3, la  $(2n + 2)$ -esima essendone una diretta conseguenza lineare.

4.5 — In conclusione, per quanto qui ed altrove(\*) osservato, in caso di problema non completamente indeterminato, la (4.4) ha validità generale assegnando ai termini del rapporto quanto loro compete in base al quadro 5, con l'unica eccezione nella situazione ove siano  $\Delta = 0 = A^2 + B^2 - C^2$  e  $C \neq 0$  per cui s'ha da assumere  $\Delta \sin = B$ ,  $\Delta \cos = A$ . Per la completa univoca individuazione del parametro  $\vartheta$ , alla (4.4) saran da associare, secondo le circostanze, o le (4.3) o le (3.6) o le (3.18).

La precedente discussione mirava, come s'è detto e visto, ad una generalizzazione, nella (4.4), di note formule atte alla determinazione del parametro d'orientamento e ad accertare l'unicità di soluzione, per problema non completamente indeterminato, sia per  $\Delta \neq 0$  che per  $\Delta = 0$ .

E' ovvio, però, che lo scopo finale e precipuo è l'acquisizione delle coordinate  $(x_r, y_r)$  dei punti  $V_r$ , ( $r = 1, 2, \dots, n - 1, n$ ), tramite le (2.8) una volta procuratisi le  $(\overline{x_r}, \overline{y_r})$  e  $\vartheta$  dal sistema del quadro 3 integrale o da qualche suo sottosistema, come s'è detto, ove si constatasse essere  $\Delta = 0$ .

## 5. - Determinazioni indirette unificate di distanze topografiche.

5.1 — Una volta acquisite le funzioni goniometriche circolari  $\sin \vartheta$ ,  $\cos \vartheta$  del parametro d'orientamento, è immediata, laddove per un qualche motivo necessiti, la determinazione, tramite le (2.15) o (2.16), della distanza  $V_i T_i$  corrente fra un vertice  $V_i$  e l'omonimo  $T_i$ , l'uno e l'altro vertici d'un quadrangolo, anche degenerare a triangolo, di cui sia *a priori* conosciuta la lunghezza, anche nulla,  $d_{i-1, i}$  oppure  $d_{i, i+1}$  del lato concorrente in  $V_i$  della poligonale da posizionare.

Una tale esigenza si presenta appunto nell'applicazione del procedi-

---

(\*) Cfr. « Sul problema di MAREK ampliato etc. », op. cit., n. 4.

mento e formulario esposto alla determinazione indiretta di distanze topografiche secondo la classica e ricca metodologia della prassi topografica (\*).

Avanti però di passare in rassegna le principali e caratteristiche procedure di siffatte determinazioni quali particolarizzazioni dell'intersezione quadratica inversa, converrà fin d'ora procurarsi le necessarie espressioni per configurazioni generali ad un ristretto numero di punti ( $n = 4$ ).(\*\*)

5.2 — Sia, dunque,  $n = 4$ ;  $T_1, T_2, T_3, T_4$  siano i 4 punti assegnati nel piano, ove il sistema d'assi cartesiani  $(X, Y)$  ortogonali orario abbia per ora ubicazione generica arbitraria:

$$T_r \equiv (X_r, Y_r), \quad (r = 1, 2, 3, 4).$$

$V_1, V_2, V_3, V_4$  sono gli altrettanti punti da determinarsi, le cui reciproche distanze (note od, in qualche caso, qualcuna anche sconosciuta) siano:

$$d_r, r+1 = \overline{V_r V_{r+1}}, \quad (r = 1, 2, 3),$$

ed  $\alpha_r, \alpha'_r, (r = 1, 2, 3, 4)$ , siano gli angoli ivi misurati o valutati secondo quanto già convenuto nella sinossi propedeutica.

Secondo la falsariga della trattazione generale, si avrà via via successivamente, secondo le (2.2) e (2.6):

$$\sigma_r' = \sum_1^r \alpha_i', \quad (r = 1, 2, 3),$$

(5.1)

$$\begin{aligned} s_r' &= \sin \sigma_r', & c_r' &= \cos \sigma_r', & t_r' &= \tan \sigma_r'; \\ \sigma_r &= \sigma_{r-1}' + \alpha_r, & (r &= 1, 2, 3, 4), & (\sigma_0' &= 0 = \alpha_0'), \\ s_r &= \sin \sigma_r, & c_r &= \cos \sigma_r, & t_r &= \tan \sigma_r; \end{aligned}$$

(5.2)

$$\begin{aligned} \overline{p_1} &= Y_2 - Y_1 + t_1 X_1 - t_2 X_2, & \overline{q_1} &= X_1 - X_2 + t_1 Y_1 - t_2 Y_2, \\ \overline{p_2} &= Y_3 - Y_2 + t_2 X_2 - t_3 X_3, & \overline{q_2} &= X_2 - X_3 + t_2 Y_2 - t_3 Y_3, \\ \overline{p_3} &= Y_4 - Y_3 + t_3 X_3 - t_4 X_4, & \overline{q_3} &= X_3 - X_4 + t_3 Y_3 - t_4 Y_4. \end{aligned}$$

Il quadro 4 diviene poi semplicemente:

(5.3)

$$\Delta = \frac{-1}{(c_1' c_2' c_3')^2} \begin{vmatrix} t_1 - t_2 & \overline{p_1} & \overline{q_1} \\ t_2 - t_3 & \overline{p_2} & \overline{q_2} \\ t_3 - t_4 & \overline{p_3} & \overline{q_3} \end{vmatrix},$$

mentre il quadro 5 porge a sua volta per le due funzioni circolari:

(5.4)

$$\Delta \sin = \frac{1}{(c_1' c_2' c_3')^2} \begin{vmatrix} t_1 - t_2 & 0 & \overline{p_1} & d_{12} \sin(\alpha_1' - \alpha_1)/c_1 \\ t_2 - t_2' & t_2' - t_3 & \overline{p_2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -d_{23} \cdot c_2' \\ 0 & t_3 - t_4 & \overline{p_3} & -d_{34} \cdot \sin \alpha_4/c_4 \end{vmatrix},$$

(5.5)

$$\Delta \cos = \frac{-1}{(c_1' c_2' c_3')^2} \begin{vmatrix} t_1 - t_2 & 0 & \overline{q_1} & d_{12} \cdot \sin(\alpha_1' - \alpha_1)/c_1 \\ t_2 - t_2' & t_2' - t_3 & \overline{q_2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -d_{23} \cdot c_2' \\ 0 & t_3 - t_4 & \overline{q_3} & -d_{34} \cdot \sin \alpha_4/c_4 \end{vmatrix}.$$

(\*) V. TOMELLERI, « *Determinazioni geometriche unificabili di distanze topografiche* », Rivista del Catasto e dei Servizi Tecnici Erariali, nuova serie, anno XXIV, 1969.

(\*\*) In una tale ipotesi, cioè per un ristretto numero di punti, ci si potrebbe procurare pure le espressioni generali delle coordinate  $(\overline{x}_r, \overline{y}_r)$ , secondo quanto già detto alla fine del n. 4. 2.

Indi, per  $\Delta \neq 0$ :

$$(5.6) \quad \sin \vartheta = \frac{\Delta \sin}{\Delta}, \quad \cos \vartheta = \frac{\Delta \cos}{\Delta},$$

indipendenti dal comune fattore  $(c_1' c_2' c_3')^2$ .

Analogamente:

(5.7)

$$\tan \vartheta = \frac{\begin{vmatrix} t_1 - t_2 & 0 & \overline{p_1} & d_{12} \cdot \sin(\alpha_1' - \alpha_1)/c_1 \\ t_2 - t_2' & t_2' - t_3 & \overline{p_2} & 0 \\ 1 & -1 & \overline{0} & -d_{23} \cdot c_2' \\ 0 & t_3 - t_4 & \overline{p_3} & -d_{34} \cdot \sin \alpha_4/c_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t_1 - t_2 & 0 & \overline{q_1} & d_{12} \cdot \sin(\alpha_1' - \alpha_1)/c_1 \\ t_2 - t_2' & t_2' - t_3 & \overline{q_2} & 0 \\ 1 & -1 & \overline{0} & -d_{23} \cdot c_2' \\ 0 & t_3 - t_4 & \overline{q_3} & -d_{34} \cdot \sin \alpha_4/c_4 \end{vmatrix}},$$

purchè non sia  $\Delta = 0 = A^2 + B^2 - C^2$ , con  $A, B, C$  ad esempio:

$$(5.9) \quad A = \begin{vmatrix} t_1 - t_2 & 0 & \overline{p_1} \\ t_2 - t_2' & t_2' - t_3 & \overline{p_2} \\ 0 & t_3 - t_4 & \overline{p_3} \end{vmatrix},$$

$$(5.10) \quad B = \begin{vmatrix} t_1 - t_2 & 0 & \overline{q_1} \\ t_2 - t_2' & t_2' - t_3 & \overline{q_2} \\ 0 & t_3 - t_4 & \overline{q_3} \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} t_1 - t_2 & 0 & d_{12} \cdot \sin(\alpha_1' - \alpha_1)/c_1 \\ t_2 - t_2' & t_2' - t_3 & 0 \\ 0 & t_3 - t_4 & -d_{34} \cdot \sin \alpha_4/c_4 \end{vmatrix},$$

non nulli, nel qual caso sarebbe invece:

$$(5.11) \quad \tan \vartheta = B/A.$$

Per un problema semplice di MAREK è da supporre:

(5.12)

$$(5.13) \quad V_1 \equiv V_2, \quad V_3 \equiv V_4, \quad V_2 \not\equiv V_3; \\ \text{indi: } d_{12} = 0 = d_{34}, \quad d_{23} \neq 0, \quad (\text{anche sconosciuta}),$$

$\alpha_1' \equiv \alpha_1 \pmod{\pi}$ ,  $t_1' = t_1$ ,  $\alpha_4 \equiv 0 \pmod{\pi}$ ,  $t_4 = t_3'$ ,

e la (5.7) diviene semplicemente:

(5.14)

$$\tan \vartheta = \frac{\begin{vmatrix} t_1 - t_2 & 0 & \overline{p_1} \\ t_2 - t_2' & t_2' - t_3 & \overline{p_2} \\ 0 & t_3 - t_3' & \overline{p_3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t_1 - t_2 & 0 & \overline{q_1} \\ t_2 - t_2' & t_2' - t_3 & \overline{q_2} \\ 0 & t_3 - t_3' & \overline{q_3} \end{vmatrix}}$$

Per la deduzione, dalla (5.14), della formula risolutiva concernente il problema semplice di SNELLIUS-COLLINS-POTHENOT sarà da fare qualche

particolarizzazione. E cioè,  $V_1 \equiv V_2$  e  $V_3 \equiv V_4$  tendano ora l'uno all'altro, così come pure, nello stesso tempo,  $T_2$  e  $T_3$  s'avvicinino tra loro, fino alla coincidenza in una certa posizione rispettiva  $V^*$  e  $T^*$ . Solo che, mentre  $T_2$  e  $T_3$  potranno comunque tendere l'un l'altro verso la posizione limite  $T_2 \equiv T_3 \equiv T^*$  secondo percorsi qualsivoglia,  $V_2$  e  $V_3$  tendano alla loro posizione limite  $V_2 \equiv V_3 \equiv V^*$  ortogonalmente alla direzione limite  $V^* T^*$ . Ciò posto, risulterà ulteriormente:

$$(5.15) \quad \begin{aligned} V_1 \equiv V_2 \equiv V_3 \equiv V_4 \equiv V^*, \quad T_2 \equiv T_3 \equiv T^*, \\ \alpha_2 \equiv T_1 \hat{V}^* T^* \pmod{\pi}, \quad \alpha_2' - \alpha_2 \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}, \\ \alpha_3 \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}, \quad \alpha_3' \equiv \frac{\pi}{2} + T^* \hat{V}^* T_4 \pmod{\pi}, \end{aligned}$$

conservandosi:

$$\alpha_1' \equiv \alpha_1 \pmod{\pi}, \quad \alpha_4 \equiv 0 \pmod{\pi},$$

ond'è:

$$(5.16) \quad t_2' = -1/t_2, \quad t_3 = t_2, \quad t_4 = t_3',$$

e per le (5.2) riesce:

$$(5.17) \quad \begin{aligned} \overline{p_1} &= Y_2 - Y_1 + t_1 X_1 - t_2 X_2, & \overline{q_1} &= X_1 - X_2 + t_1 Y_1 - t_2 Y_2, \\ \overline{p_2} &= 0, & \overline{q_2} &= 0, \\ \overline{p_3} &= Y_4 - Y_2 + t_2 X_2 - t_4 X_4, & \overline{q_3} &= X_2 - X_4 + t_2 Y_2 - t_4 Y_4. \end{aligned}$$

La (5.14) diviene conseguentemente:

$$(5.18) \quad \tan \hat{\vartheta} = \frac{\begin{vmatrix} t_2 - t_1 & \overline{p_1} \\ t_4 - t_2 & \overline{p_3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t_2 - t_1 & \overline{q_1} \\ t_4 - t_2 & \overline{q_3} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} t_2 - t_1 & \overline{p_1} \\ t_4 - t_1 & \overline{p_3} + \overline{p_1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t_2 - t_1 & \overline{q_1} \\ t_4 - t_1 & \overline{q_3} + \overline{q_1} \end{vmatrix}}.$$

Se, ulteriormente, per maggior semplicità, la direzione iniziale, arbitraria ed opportuna,  $V^* V_0$  la si assume coincidente con la  $V^* T_1$ , onde  $t_1 = 0$ , si otterrà l'aspetto finale ben noto (\*):

$$(5.19) \quad \begin{aligned} \tan \hat{\vartheta}^* &= \frac{\begin{vmatrix} t_2 & Y_2 - Y_1 - t_2 X_2 \\ t_4 & Y_4 - Y_1 - t_4 X_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t_2 & X_1 - X_2 - t_2 Y_2 \\ t_4 & X_1 - X_4 - t_4 Y_4 \end{vmatrix}} = \\ &= \frac{X_2 - X_4 + (Y_4 - Y_1) \cdot \cot \sigma_4 - (Y_2 - Y_1) \cdot \cot \sigma_2}{Y_4 - Y_2 + (X_4 - X_1) \cdot \cot \sigma_4 - (X_2 - X_1) \cdot \cot \sigma_2}, \end{aligned}$$

essendo, in chiaro:

$$(5.20) \quad \begin{aligned} \hat{\vartheta}^* &= T^* \hat{T}_1 V^*, \\ \sigma_2 &\equiv T_1 \hat{V}^* T^* \pmod{\pi}, \quad \sigma_4 \equiv T_1 \hat{V}^* T_4 \pmod{\pi}, \\ T_1 &\equiv (X_1, Y_1), \quad T^* \equiv T_2 \equiv T_3 \equiv (X_2, Y_2), \quad T_4 \equiv (X_4, Y_4), \\ V_1 &\equiv V_2 \equiv V_3 \equiv V_4 \equiv V^*. \end{aligned}$$

(\*) Cfr., ad esempio, G. BOAGA, « Trattato di Geodesia e Topografia con elementi di fotogrammetria », Vol. II, parte I, cap. VII, n. 2, i) pagg. 236 segg., Edizione CEDAM, Padova, 1948.

Si trasli, ora, e ruoti il sistema originario così da avere l'origine in  $T_1$  e l'asse  $X^+$  coincidente ed equiorientato con la  $T_1 T_2$  da  $T_1$  a  $T_2$ . Riesce allora:

$$X_1 = O = Y_1 = O = Y_2,$$

e successivamente dalla (5.19), con la (3.18), posto:

$$R = + \left\{ X_2^2 \cdot \sin^2 \sigma_4 + (X_4 + Y_4)^2 \cdot \sin^2 \sigma_2 - 2 X_2 \cdot [X_4 \cdot \cos (\sigma_4 - \sigma_2) + Y_4 \cdot \sin (\sigma_4 - \sigma_2)] \cdot \sin \sigma_2 \cdot \sin \sigma_4 \right\}^{1/2},$$

segue:

$$\sin \vartheta^* = \frac{\sin \sigma_2 \cdot | Y_4 \cdot \cos \sigma_4 + (X_2 - X_4) \cdot \sin \sigma_4 |}{R}$$

Ed ancora, per l'altra funzione circolare:

$$\cos \vartheta^* = \frac{(X_4 \cos \sigma_4 + Y_4 \sin \sigma_4) \sin \sigma_2 - X_2 \sin \sigma_4 \cos \sigma_2}{Y_4 \cos \sigma_4 + (X_2 - X_4) \sin \sigma_4} \cdot \frac{| Y_4 \cos \sigma_4 + (X_2 - X_4) \sin \sigma_4 |}{R}$$

E dal triangolo  $V^* T_1 T^*$ , per la (5.22), si ottiene:

$$\overline{V^* T^*} = X_2 \cdot \frac{| Y_4 \cos \sigma_4 + (X_2 - X_4) \cdot \sin \sigma_4 |}{R},$$

ed infine:

$$\sin (\vartheta^* + \sigma_2) = \frac{\sin \sigma_2}{R} \cdot \frac{| Y_4 \cos \sigma_4 + (X_2 - X_4) \sin \sigma_4 |}{Y_4 \cos \sigma_4 + (X_2 - X_4) \sin \sigma_4} \cdot [Y_4 \cos (\sigma_4 - \sigma_2) - X_4 \sin (\sigma_4 - \sigma_2)],$$

ond'è pure:

$$\overline{V^* T_1} = X_2 \cdot \frac{| Y_4 \cos \sigma_4 + (X_2 - X_4) \sin \sigma_4 |}{Y_4 \cos \sigma_4 + (X_2 - X_4) \sin \sigma_4} \cdot \frac{Y_4 \cos (\sigma_4 - \sigma_2) - X_4 \sin (\sigma_4 - \sigma_2)}{R}$$

5.3 — Ed ecco ora una rassegna dei classici metodi di determinazione indiretta di distanza topografica come particolarizzazioni del procedimento generale suestoso.

1) *Metodo clisimetrico od eclimetrico* o dell'angolo parallattico variabile con stadia verticale, (fig. 4).

Dalla stazione strumentale goniometrica posta in  $S$  si traguarda a due divisioni o tratti o punti  $T_1, T_2$  della stadia verticale posta sul secondo punto  $T$ , valutandone le distanze zenitale  $\zeta_1, \zeta_2$  nel centro strumentale di  $S$  e le loro corrispondenti ascisse lineari o letture sulla stadia  $X_1 = l_1, X_2 = l_2$ .

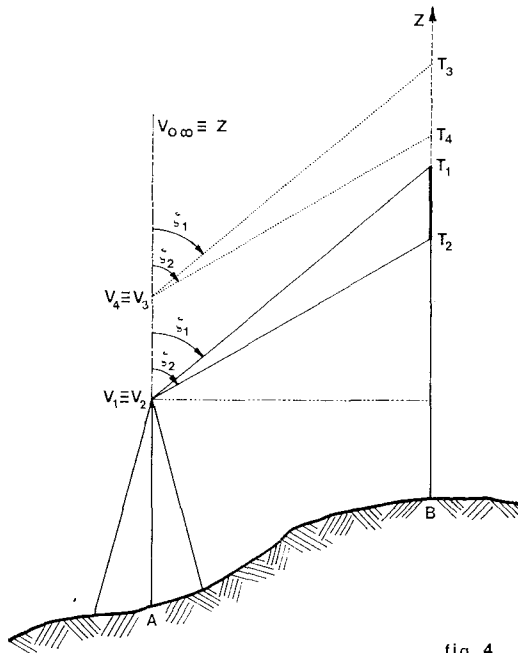


fig. 4

La schematizzazione sarà quindi la seguente. L'asse longitudinale della stadia verticale, a graduazione crescente verso l'alto, s'assumerà quale asse  $X^+$  equiverso con le letture crescenti; l'origine  $O$  si porrà nello zero della stadia; l'asse  $Y$ , nel piano verticale di  $S$  e  $T$ , orizzontale e diretto da parte opposta di  $S$  rispetto a  $T$ , sì che la ordinata  $Y_s$  di  $S$  risulterà negativa.

I punti  $T_1$  e  $T_2$  sono quelli della stadia traguardati da  $S$ , e quindi di coordinate:

$$T_1 \equiv (l_1, O), \quad T_2 \equiv (l_2, O),$$

mentre  $V_1$  e  $V_2$  coincideranno entrambi con il centro del goniometro vertice delle zenitali misurate  $\zeta_1$  e  $\zeta_2$  di  $T_1$  e  $T_2$ . Il punto  $V_0$  è stavolta improprio e coincide con lo zenit di  $S$ , la cui verticale andrà orientata verso il nadir. Si supprerà ancora:

$$\zeta_1 < \zeta_2, \quad l_1 > l_2,$$

e perciò:

$$\alpha_1 = \zeta_1, \quad \alpha_1' = \zeta_1, \quad \alpha_2 = \zeta_2 - \zeta_1 + \pi.$$

Per le altre due coppie  $V_3, V_4$  e  $T_3, T_4$  si può pensare di avere traslato idealmente lo strumento sulla stessa verticale di  $S$ , in alto od in basso, d'una quantità arbitraria, non nulla e limitata, anche sconosciuta,  $d$  e di aver battuta la stadia o suo ideale prolungamento con due altre visuali d'uguale zenitale delle precedenti. Cioè si avrà ulteriormente, anche per il parallelismo delle verticali in  $S$  e  $T$ , e supposto d'aver innalzato lo strumento in  $S$  di  $d > 0$ :

$$\begin{aligned} T_3 &\equiv (l_1 + d, O), & T_4 &\equiv (l_2 + d, O), \\ V_3 &\equiv V_4, & \overline{V_2 V_3} &= d, \\ \alpha_2' &= 3\pi - \zeta_1, & \alpha_3 &= \pi + \zeta_1, & \alpha_3' &= \pi + \zeta_2, \\ & & & & \alpha_4 &\equiv 0 \pmod{\pi}. \end{aligned}$$

indi:

$$\begin{aligned}
 d_{12} = O = d_{34}, \quad d_{23} = d, \\
 \sigma_1 = \alpha_1 = \zeta_1, \quad t_1 = \tan \zeta_1, \quad \sigma_1' = \zeta_1, \quad t_1' = t_1, \\
 \sigma_2 = \zeta_2 + \pi, \quad t_2 = \tan \zeta_2, \quad \sigma_2' = 3\pi, \quad t_2' = O, \\
 \sigma_3 = \zeta_1', \quad t_3 = t_1, \\
 \sigma_3' = \zeta_2, \quad t_3' = t_2 = t_4;
 \end{aligned}$$

(5.27)

$$\begin{aligned}
 \overline{p}_1 = t_1 l_1 - t_2 l_2, \quad \overline{q}_1 = l_1 - l_2, \\
 \overline{p}_2 = -\overline{p}_1 - t_1 d, \quad \overline{q}_2 = -\overline{q}_1 - d, \\
 \overline{p}_3 = \overline{p}_1 + (t_1 - t_2) d, \quad \overline{q}_3 = \overline{q}_1;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta = - \left[ \frac{d \cdot \sin(\zeta_1 - \zeta_2)}{\cos^2 \zeta_1 \cdot \cos^2 \zeta_2} \right]^2, \\
 \Delta \sin = O, \quad \Delta \cos = \left( \frac{d \cdot \sin(\zeta_1 - \zeta_2)}{\cos^2 \zeta_1 \cdot \cos^2 \zeta_2} \right)^2 = -\Delta, \\
 \sin \vartheta = O, \quad \cos \vartheta = -1, \quad \vartheta = \pi.
 \end{aligned}$$

E' questo un esempio di completa determinazione di  $\vartheta$  pur in difetto della conoscenza della distanza  $d$ , di cui si sa solo essere non nulla e limitata.

Dalla (2.15) per  $r = 1$ , si ha poi:

(5.28)

$$\overline{V}_1 \overline{T}_1 = \frac{(l_1 - l_2) \cdot \sin \zeta_2}{\sin(\zeta_2 - \zeta_1)},$$

ed analogamente la (2.16), per  $r = 2$ , porge:

(5.27)

$$\overline{V}_2 \overline{T}_2 = \frac{(l_1 - l_2) \cdot \sin \zeta_1}{\sin(\zeta_2 - \zeta_1)}.$$

Riducendo queste distanze oblique all'orizzonte, moltiplicando la prima per  $\sin \zeta_1$  e la seconda per  $\sin \zeta_2$ , si consegue la nota espressione:

(5.30)

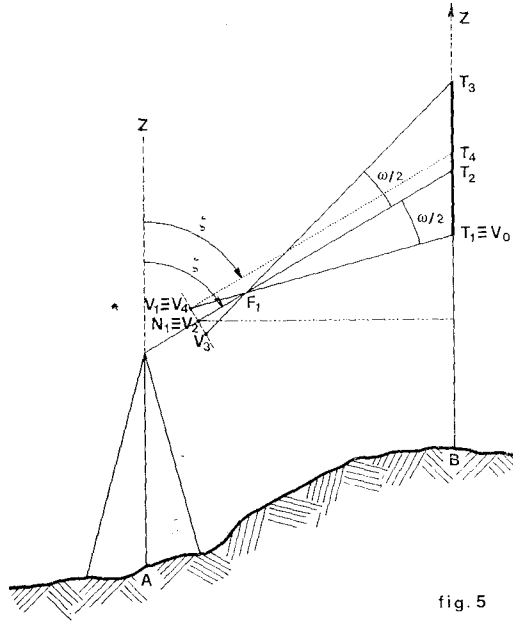
$$\text{distanza orizzontale} = \frac{l_1 - l_2}{\cot \zeta_1 - \cot \zeta_2}.$$

Ovviamente, questa stessa espressione si sarebbe ottenuta quale valore assoluto dell'ordinata  $\overline{y}_2 = y_2$  del centro  $V^* \equiv V_1 \equiv V_2$  del goniometro quando si impostasse e risolvesse un sistema del tipo di quello del quadro 3.

Quanto esposto implica la conoscenza d'una base  $l_1 - l_2$  e degli angoli, ai suoi estremi, dei lati diretti al vertice incognito  $V$ . S'intende, quindi, che il procedimento d'elaborazione qui presentato per il metodo in parola potrà, con ovvie modifiche di forma e di linguaggio, applicarsi a tutti i vari metodi ad esso similari facenti capo ad una base ed alla coppia di angoli ai suoi estremi: metodi delle triangolazioni in avanti e laterale, metodi telemetrici, metodi dell'angolo parallattico costante o variabile con stadia verticale od orizzontale, ecc.

Data, cioè, in altre parole, la generalità del principio del metodo clisimetrico, da cui, com'è noto, possono trarsi le formule di tutti gli altri metodi di determinazione indiretta di distanza, quanto dedotto basterebbe a confermare l'asserita validità generale del procedimento suggerito e trattato nei precedenti numeri.





Si possono, però, com'è noto, considerare le formule di questo metodo deducibili da altri principi od anche quali casi particolari di altri procedimenti.

Per questo e per completezza di indagine merita comunque vedere come poterne dedurre qualche altro metodo indipendentemente dal clisimetrico.

## 2) Metodo dell'angolo parallattico costante con stadia verticale, (fig. 5).

L'asse longitudinale della stadia verticale in  $T$  s'assumerà ancora quale asse  $X^+$ , equiverso con la numerazione crescente, del sistema d'assi cartesiani ortogonali, la cui origine si porrà, come prima, nello zero della stadia ed il cui asse  $Y$  sarà orizzontale, nel piano verticale di  $T$  e della stazione strumentale  $S$ , diretto contrapposto ad  $S$ .

In  $S$  vi sia un usuale tacheometro, cioè, al limite, un goniometro a cerchio verticale con cannocchiale distanziometrico ad angolo parallattico costante a reticolo trifilare (sistema MONTANARI-REICHENBACH) ad incisioni laterali orizzontali simmetriche rispetto alla centrale. Il dispositivo può essere o meno centralmente anallattico; della situazione si terrà debito conto eventualmente alla fine del calcolo.

Per l'impostazione del problema secondo le precedenti linee, si assumerà  $V_2$  coincidente con il primo (relativo, cioè, allo spazio-oggetti) punto principale o nodale  $N_1$  di tutto il sistema obiettivo (inclusa, cioè, l'eventuale lente anallattica o di adattamento alla distanza), mentre  $V_1$  e  $V_3$  giaceranno sulla retta-intersezione del piano verticale in  $V_2 \equiv N_1$  con il primo piano principale

dell'obiettivo simmetricamente equidistanti di  $h/2$  da  $V_2$ , convenendo sia  $V_1$  quello superiore.

$F_1$ , primo fuoco, sia il centro anallattico,  $f = \overline{V_2 F_1}$  la distanza focale,  $\omega = \widehat{V_1 F_1 V_3}$  l'angolo parallattico costante,  $K$  l'usuale costante diastimometrica:

$$K = \frac{f}{h} = \frac{1}{2} \cot \frac{\omega}{2} .$$

Sulla stadia verticale in  $T$ , le visuali  $V_r F_1$ , ( $r = 1, 2, 3$ ), individuano i tre punti omonimi  $T_r$ , ( $r = 1, 2, 3$ ), dal basso verso l'alto, caratterizzati dalle ascisse  $X_r = l_r$ , ( $r = 1, 2, 3$ ), essendo  $l_r$  le corrispondenti letture effettuabili o meno, e quindi di fatto note od ipotizzabili come tali. Nell'usuale prassi, infatti, com'è noto, la lettura centrale  $l_2$ , relativa alla visuale centrale secondo l'asse di collimazione, viene appunto surrogata dalla distanza zenitale  $\zeta$  dello stesso asse. In tale ipotesi, si ha intanto la catena di rapporti:

$$(5.32) \quad \frac{l_3 - l_2}{\sin \left( \zeta + \frac{\omega}{2} \right)} = \frac{l_2 - l_1}{\sin \left( \zeta - \frac{\omega}{2} \right)} = \frac{l_3 - l_1}{2 \sin \zeta \cos \frac{\omega}{2}} = \frac{l_3 + l_1 - 2 l_2}{2 \cos \zeta \sin \frac{\omega}{2}} .$$

La conoscenza di  $\zeta$ , in luogo di  $l_2$ , permette poi di ubicare *ad hoc*, per le esigenze schematiche dell'impostazione, la 4ª coppia  $V_4, T_4$ . Il vertice  $V_4$  si potrà, ad esempio, far coincidere con  $V_1$  e quale visuale ideale  $V_4 T_4$  assumere la parallela per  $V_1 \equiv V_4$  all'asse di collimazione  $V_2 T_2$ , così che la sua intersezione con l'asse della stadia non sarà altro che il punto  $T_4$  d'ascissa teorica  $X_4 = l_2 + h / (2 \cdot \sin \zeta)$ .

Dopo di che, la gamma dei dati via via utilizzabili nella sequenza di formule (5.1), (5.2), ecc. .... dello schema generale sarà, assumendo  $V_0 \equiv T_1$  (\*) e viste pure le (5.31), (5.32):

(5.33)

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0, & \sigma_1 &= 0, & t_1 &= 0, & c_1 &= 1, \\ \alpha_1' &= \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2} = \sigma_1', & t_1' &= \cot \frac{\omega}{2}, \\ \alpha_2 &= \frac{\pi}{2}, & \sigma_2 &= \pi - \frac{\omega}{2}, & t_2 &= -\tan \frac{\omega}{2} = -1 / t_1', \\ \alpha_2' &= \pi, & \sigma_2' &= 3 \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2} \equiv -\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}, \\ c_2' &= -\sin \frac{\omega}{2}, & t_2' &= \cot \frac{\omega}{2} = t_1', \\ \alpha_3 &= \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}, & \sigma_3 &\equiv -\omega \pmod{2\pi}, & t_3 &= -\tan \omega, \end{aligned}$$

\* L'assumere, quale  $V_0$ , il punto improprio della retta  $V_1 V_2 V_3$  o quello della ad essa ortogonale  $V_2 T_2$  comporterebbe l'annullarsi di qualche funzione  $c_r$  o  $c'_r$ .

$$\begin{aligned}
\alpha^{3'} &= 2\pi, & \sigma^{3'} &\equiv \sigma^{2'} \pmod{2\pi}, & t^{3'} &= \cot \frac{\omega}{2} = t^{2'}, \\
\alpha^4 &= 3\frac{\pi}{2}, & \sigma^4 &\equiv \sigma^2 \pmod{2\pi}, & t_4 &= -\tan \frac{\omega}{2} = t_2, \\
\sin \alpha^4 &= -1, & c_4 &= -\cos \frac{\omega}{2};
\end{aligned}$$

(5.34)

$$\begin{aligned}
T_1 &\equiv (l_1, O), & T_2 &\equiv (l_2, O), & T_3 &\equiv (l_3, O), \\
T_4 &\equiv \left( l_2 + \frac{h}{2 \cdot \sin \zeta}, O \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{p}_1 &= l_2 \cdot \tan \frac{\omega}{2}, & \bar{q}_1 &= l_1 - l_2, \\
\bar{p}_2 &= -\bar{p}_1 + l_3 \cdot \tan \omega, & \bar{q}_2 &= l_2 - l_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{p}_3 &= -\bar{p}_2 + \frac{h \cdot \tan \frac{\omega}{2}}{2 \cdot \sin \zeta}, & \bar{q}_3 &= -\bar{q}_2 - \frac{h}{2 \cdot \sin \zeta};
\end{aligned}$$

(5.35)

$$\Delta = \frac{1}{(\alpha^{1'} c_2' c_3')^2} \cdot \frac{h \cdot \tan^2 \frac{\omega}{2}}{2 \cdot \sin \zeta \cdot \cos \omega} \cdot (l_3 - l_1);$$

$$\Delta \sin = -\Delta \cdot \sin \left( \zeta + \frac{\omega}{2} \right); \quad \Delta \cos = -\Delta \cdot \cos \left( \zeta + \frac{\omega}{2} \right);$$

$$\sin \vartheta = -\sin \left( \zeta + \frac{\omega}{2} \right), \quad \cos \vartheta = -\cos \left( \zeta + \frac{\omega}{2} \right),$$

$$\vartheta = \zeta + \frac{\omega}{2} + \pi.$$

Infine, dall'a (2.16), per  $r = 2$ , si trae, viste ancora le (5.31) e (5.32):

$$V_2 T_2 = (l_2 - l_1) \cdot \frac{\sin \left( \zeta + \frac{\omega}{2} \right)}{\sin \frac{\omega}{2}} + \frac{h}{2} \cot \frac{\omega}{2},$$

cioè:  
(5.36)

$$\overline{V_2 T_2} = K(l_3 - l_1) \cdot \sin \zeta - \frac{l_3 - l_1}{4K} \cdot \frac{\cos^2 \zeta}{\sin \zeta} + f,$$

la cui riduzione all'orizzonte, con il fattore  $\sin \zeta$ , è immediata e porge la ben nota distanza orizzontale tra il 1° punto nodale o principale  $N_1 \equiv V_2$  ed il punto  $T$  d'ubicazione della stadia verticale.

### 3) Metodo biangolare a tre letture stadimetriche.

Trattasi del metodo rifacentesi direttamente al problema semplice di SNELLIUS-COLLINS-POTHENOT, ove però i tre punti noti appartengono ad una stadia graduata disposta sul punto  $T$  di cui s'ha da determinare la distanza (orizzontale) dalla stazione  $S$ , ove s'intende sia un dispositivo che permetta di realizzare tre distinte puntate alla stadia in  $T$  secondo reciproche inclinazioni (tra le tre rette di collimazione) di già note o valutabili all'occorrenza.

Nel procedimento generale rientra come particolarizzazione delle (5.19), ecc. relative all'intersezione inversa semplice nel piano.

Con notazione un po' diversa dalla precedente, si indicherà ora semplicemente con  $V$  il vertice angolare delle tre distinte visuali  $VT_1$ ,  $VT_2$ ,  $VT_3$  a tre distinti punti  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  della stadia caratterizzati dalle tre corrispondenti ascisse o letture  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$ , avendo ancora assunto l'asse longitudinale della stadia quale asse  $X^+$  con origine in  $T_1$  ed orientato da  $T_1$  a  $T_2$ .

Si supporrà ancora:

$$l_1 > l_2 > l_3.$$

I punti  $T_r$  son caratterizzati dalle coordinate:

$$T_1 \equiv (0, 0), \quad T_2 \equiv (l_1 - l_2, 0), \quad T_3 \equiv (l_1 - l_3, 0).$$

Si chiamino:

$$\sigma_2 = T_1 \hat{V} T_2, \quad \sigma_3 = T_1 \hat{V} T_3$$

gli angoli delle visuali  $VT_2$ ,  $VT_3$  rispetto alla  $VT_1$  assegnati, ad esempio, tramite un classico reticolo trifilare o valutabili su un qualche settore circolare graduato.

Le (5.19), (5.21) e (5.22) porgono per l'angolo  $\hat{\delta}$  tra la direzione della stadia orientata da  $T_1$  a  $T_2$  e la prima visuale diretta da  $T_1$  a  $V$ :

(5.37)

$$\begin{aligned} \tan \hat{\delta} &= \frac{l_2 - l_3}{(l_1 - l_2) \cdot \cot \sigma_2 - (l_1 - l_3) \cdot \cot \sigma_3}, \\ R &= + (l_1 - l_2)^2 \cdot \sin^2 \sigma_3 + (l_1 - l_3)^2 \cdot \sin^2 \sigma_2 - \\ &\quad - 2(l_1 - l_2)(l_1 - l_3) \cdot \sin \sigma_2 \cdot \sin \sigma_3 \cdot \cos(\sigma_3 - \sigma_2) \\ \sin \hat{\delta} &= \frac{(l_2 - l_3) \cdot \sin \sigma_2 \cdot \sin \sigma_3}{R} \end{aligned}$$

A loro volta, le (5.24) e (5.25) divengono:

(5.38)

$$\overline{VT_2} = \frac{(l_1 - l_2) \cdot (l_2 - l_3) \cdot \sin \sigma_3}{R},$$

$$\sin(\vartheta + \sigma_2) = \frac{(l_1 - l_3) \cdot \sin \sigma_2 \cdot \sin(\sigma_3 - \sigma_2)}{R},$$

e la componente della  $VT_2$  secondo l'ortogonale alla stadia sarà:

(5.39)

$$\begin{aligned} (\overline{VT_2})_o &= \overline{VT_2} \cdot \sin(\vartheta + \sigma_2) = \\ &= \frac{(l_1 - l_2)(l_2 - l_3)(l_1 - l_3)}{R^2} \cdot \sin \sigma_2 \cdot \sin \sigma_3 \cdot \sin(\sigma_3 - \sigma_2). \end{aligned}$$

Di qui alcune immediate note conclusioni.

I) La stadia sia verticale e le visuali  $VT_1$ ,  $VT_3$  siano inclinate entrambe di  $\omega/2$ , definito dalla (5.31), rispetto alla  $VT_2$  e l'una da parte opposta dell'altra, ond'è:

(5.40)

$$\sigma_2 = \frac{\omega}{2} = \sigma_3 - \sigma_2, \quad \sigma = \omega,$$

(5.41)

$$\begin{aligned} R^2 &= \sin^2 \frac{\omega}{2} \cdot \left\{ (l_1 - l_3)^2 - 4(l_1 - l_2)(l_2 - l_3) \cdot \cos^2 \frac{\omega}{2} \right\} = \\ &= \sin^2 \frac{\omega}{2} \left\{ (l_1 - l_3)^2 \cdot \sin^2 \frac{\omega}{2} + (l_1 - l_2 + l_2 - l_3)^2 \cdot \cos^2 \frac{\omega}{2} - \right. \\ &\quad \left. - 4(l_1 - l_2)(l_2 - l_3) \cdot \cos^2 \frac{\omega}{2} \right\} = \\ &= \sin^4 \frac{\omega}{2} \left\{ (l_1 - l_3)^2 + [(l_1 - l_2) - (l_2 - l_3)]^2 \cdot \cot^2 \frac{\omega}{2} \right\}, \end{aligned}$$

e la (5.39), vista pure la (5.31), diviene:

(5.42)

$$(\overline{VT_2})_o = \frac{4K \cdot (l_1 - l_2)(l_2 - l_3)(l_1 - l_3)}{(l_1 - l_3)^2 + 4K^2 \cdot [(l_1 - l_2) - (l_2 - l_3)]^2},$$

in accordo alla nota formula per la determinazione indiretta di distanza topografica con un siffatto procedimento (stadia verticale e reticolo trifilare simmetrico, senza cerchio verticale)(\*).

(\*) Cfr. V. TOMELLERI, «Determinazioni geometriche unificabili etc.», op. cit.

II) Nella (5.39) si dividan entrambi i termini del rapporto a 2° membro per  $l_1^2$  e si faccia tendere  $T_1$  e la corrispondente ascissa  $l_1$  a  $+\infty$ . Pongasi pure che la stadia sia verticale, onde:

$$\lim_{T_1 \rightarrow +\infty} \sigma_2 = \zeta_2, \quad \lim_{T_1 \rightarrow +\infty} \sigma_3 = \zeta_3,$$

essendo  $\zeta_2$  e  $\zeta_3$  le distanze zenitali delle  $VT_2$  e  $VT_3$ .

Al limite, per  $l_1 = +\infty$ , la (5.39) diviene:

(5.43)

$$(\overline{VT_2})_0 = \frac{(l_2 - l_3) \sin \zeta_2 \cdot \sin \zeta_3 \cdot \sin(\zeta_3 - \zeta_2)}{\sin^2 \zeta_3 + \sin^2 \zeta_2 - 2 \sin \zeta_2 \cdot \sin \zeta_3 \cdot \cos(\zeta_3 - \zeta_2)},$$

e poichè un tal denominatore s'identifica con:

$$\sin^2(\zeta_3 - \zeta_2),$$

ne risulterà alla fin fine:

(5.44)

$$(\overline{VT_2})_0 = \frac{l_2 - l_3}{\cot \zeta_2 - \cot \zeta_3},$$

giusto quanto proviene dal metodo clisimetrico od eclimetrico, che dir si voglia, acquisibile anche, appunto per questi motivi, come particolarizzazione del metodo di SNELLIUS-COLLINS-POTHENOT.

III) Con stadia verticale ed usuale distanziometro a reticolo trifilare ed a cerchio verticale, in luogo della  $l_2$  si rileva la corrispondente zenitale  $\zeta$ . Onde, la 2ª delle (5.38) darà:

(5.45)

$$R = \frac{l_1 - l_3}{\sin \zeta} \cdot \sin \sigma_2 \cdot \sin(\sigma_3 - \sigma_2)$$

e di conseguenza la prima delle (5.38) diviene:

(5.46)

$$\overline{VT_2} = \frac{(l_1 - l_2)(l_2 - l_3)}{l_1 - l_3} \cdot \frac{\sin \zeta \cdot \sin \sigma_3}{\sin \sigma_2 \cdot \sin(\sigma_3 - \sigma_2)}.$$

Utilizzando le (5.40) e le proporzioni:

(5.47)

$$\frac{l_1 - l_2}{\sin(\zeta + \frac{\omega}{2})} = \frac{l_2 - l_3}{\sin(\zeta - \frac{\omega}{2})} = \frac{l_1 - l_3}{2 \sin \zeta \cos \frac{\omega}{2}},$$

s'ottiene:

(5.48)

$$\begin{aligned}\overline{V T_2} &= \frac{(l_1 - l_3) \cdot \sin\left(\zeta + \frac{\omega}{2}\right) \cdot \sin\left(\zeta - \frac{\omega}{2}\right)}{\sin \zeta \cdot \sin \omega} = \\ &= K \cdot (l_1 - l_3) \cdot \sin \zeta - \frac{l_1 - l_3}{4K} \cdot \frac{\cos^2 \zeta}{\sin \zeta},\end{aligned}$$

in accordo con i risultati del metodo usuale ad angolo parallattico costante con cannocchiale centralmente anallattico e stadia verticale.

IV) Quando, per reciproca disposizione *ad hoc* di stadia e goniometro, dovesse risultare, assieme alle (5.40):

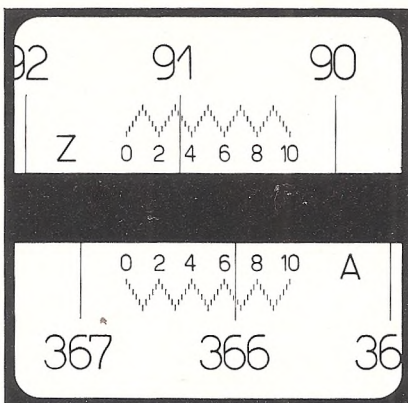
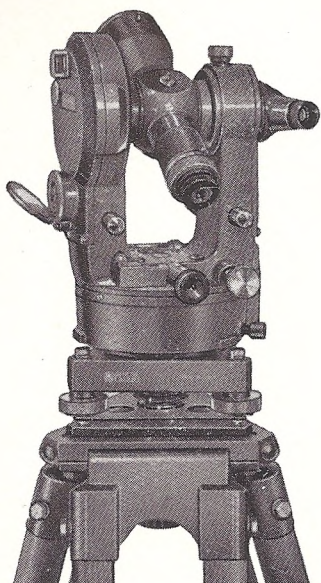
$$\begin{aligned}2(l_1 - l_2) &= 2(l_2 - l_3) = l_1 - l_3 = b, \\ \vartheta + \sigma_2 &= \pi / 2,\end{aligned}$$

le (5.38) porgerebbero:

$$R = b \cdot \sin^2 \frac{\omega}{2},$$

$$\overline{V T_2} = \frac{b}{2} \cdot \cot \frac{\omega}{2},$$

su cui si basano, ad esempio, il metodo dell'angolo parallattico variabile con stadia orizzontale a lunghezza costante e così pure quelle dell'angolo costante a cuneo ottico.



**Esempio di lettura:** Zenitale 91°, 33  
Azimutale 366°, 67

### TACHEOMETRO TG2c

Precisione (a stima)  $\left\{ \begin{array}{l} 360^\circ - 1'(15'') \\ 400^\circ - 2''(50'') \end{array} \right.$

- Il tacheometro TG2c è derivato direttamente dal teodolite universale TG1b del quale adotta il cannocchiale e la meccanica
- Progettato per l'esecuzione di rilievi topografici col metodo celerimetrico, utilizza gli accorgimenti tecnici più moderni e razionali per eseguire con rapidità e con la necessaria precisione le misure richieste dalla celerimensura
- È dotato di dispositivo ripetitore per l'orientamento del cerchio azimutale e di piombino ottico
- Le letture angolari, sia azimutali che zenitali, si eseguono con un unico microscopio a mezzo di originale scala graduata realizzata in modo da rendere le letture facili e rapide
- Il cannocchiale, dotato di obiettivo apocromatico costituito da tre lenti trattate antiriflesso, è di grande luminosità, dotato di elevato potere risolutivo e consente anche collimazioni nadirali
- Il TG2c può essere corredato di un notevole numero di accessori.

### STRUMENTI TOPOGRAFICI GALILEO

**LG2** Errore medio chilometrico  $\pm 1$  mm. Adatto all'impiego in livellazioni geometriche di alta precisione.

**LG3** Errore medio chilometrico  $\pm 2$  mm. Adatto all'impiego in livellazioni geometriche di media precisione.

**LG5bS** Errore medio chilometrico  $\pm 5$  mm. Livello di moderna concezione dotato di snodo sferico (con dispositivo di bloccaggio) per la rapida messa in stazione.

**LG5b** Errore medio chilometrico  $\pm 5$  mm. È destinato a livellazioni geometriche speditive con facilità e rapidità d'impiego.

**LG6** Errore medio chilometrico  $\pm 6$  mm. È simile al modello LG5b dal quale si differenzia per l'assenza del movimento della elevazione.

**ALG7 Autolivello** Errore medio chilometrico  $\pm 50$  mm. È indicato per lavori di edilizia, si utilizza vantaggiosamente in sostituzione di squadri, livelli ad acqua e simili.

**TG1b Teodolite Universale** Precisione (a stima)  $\left\{ \begin{array}{l} 360^\circ - 1''(0''),5 \\ 400^\circ - 2''(1''),5 \end{array} \right.$

Strumento particolarmente adatto per osservazioni astronomiche speditive, triangolazioni dal 2° al 4° ordine, poligonazioni di precisione.

**TG2b Tacheometro Teodolite** Precisione (a stima)  $\left\{ \begin{array}{l} 360^\circ - 10''(5'') \\ 400^\circ - 20''(10'') \end{array} \right.$

Riunisce gran parte delle possibilità del teodolite per triangolazioni di 3° e 4° ordine a quello del tacheometro della maggior classe.

**TG3b Tacheometro** Precisione (a stima)  $\left\{ \begin{array}{l} 360^\circ - 1'(15'') \\ 400^\circ - 2''(50'') \end{array} \right.$

Strumento di dimensioni ridotte ma con elevate caratteristiche di precisione.

**TG4bR Tacheometro Livello** Precisione (a stima)  $\left\{ \begin{array}{l} 360^\circ - 2'(1') \\ 400^\circ - 5''(2''),5 \end{array} \right.$

Strumento semplice e robusto, studiato per l'impiego sia in cantiere che in campagna. Dispositivo di ripetizione sul cerchio orizzontale.

**Tavoletta da campagna « Monticolo »** Estremamente pratica per il rilevamento grafico speditivo.

**Accessori per Teodolite Universale TG1b, Tacheometro Teodolite TG2b e Tacheometro TG2c**

● stadia INVAR orizzontale mt. 2 ● mire di poligonazione ● piombino ottico ● declinatore magnetico ● livella a cavaliere ● camera fotogrammetrica per fototeodoliti **FTG1 - FTG2**