

SULL'INTERSEZIONE QUADRATICA INVERSA MULTIPLA NEL PIANO: UNA POSSIBILE ELABORAZIONE GRAFICO-GEOMETRICA GENERALE

Valentino Tomelleri *del Politecnico di Milano*

Riassunto

A seguito e compimento del procedimento algebrico-analitico, già esposto in altra precedente nota di questo Bollettino, per il problema dell'intersezione quadratica inversa multipla nel piano, se ne propone una possibile soluzione grafica tramite roto-traslazioni, punti di COLLINS in archi capaci di angoli noti su opportuni segmenti, triangoli a catena, ricerca di corde co-polari di assegnata differenza in lunghezza od individuazione di coppie di corde equipollenti spiccabili da poli omonimi assegnati su certune circonferenze acquisibili nel corso dello sviluppo grafico-geometrico elementare.

1. GENERALITÀ INTRODUTTIVE

In una precedente comunicazione sulla intersezione quadratica inversa multipla nel piano, recentemente apparsa su questo Bollettino (1), nel presentare alcune illustrazioni (particolari o meno) esemplificanti possibili configurazioni solutrici ci si riservava di riprendere in altro momento e sede la questione relativa a qualche procedimento elementare d'elaborazione grafico-geometrica del problema nel suo aspetto generale.

Ed è questo appunto l'argomento dell'attuale nota, in analogia e compimento di quanto di già effettuato in altra precedente memoria (2), pur senza quella ricchezza di metodi elementari diversi ivi presentati (cui in genere ci si ricondurrà) per una particolare prima situazione ristretta a terne di vertici consecutivi.

Alla vera e propria procedura grafica risolvete si antepongono, per ragioni di sintesi e chiarezza di trattazione, alcune questioni geometriche preliminari (che s'affacciano via via naturalmente nelle considerazioni relative ad un eventuale nuovo particolare metodo generale) attinenti l'individuazione di corde equipollenti in una coppia di circonferenze complanari.

Trattandosi in sostanza di una prosecuzione del primo dei due lavori testè

(1) V. TOMELLERI, *Una intersezione (quadratica) inversa unificatrice nel piano*, Bollettino della S.I.F.E.T., 1972, n. 1, pag. 7.

(2) V. TOMELLERI, *Possibilità di un nuovo tipo di intersezione inversa multipla a soli quadrilateri nel posizionamento di poligonali planimetriche appoggiate "a visuali isolate" a punti noti inaccessibili*, Rivista del Catasto e dei Servizi Tecnici Erariali, nuova serie, anno XXV, 1970.

citati, ci si esenta da una introduzione anche succinta sulla essenza del problema colà ampiamente studiato dal punto di vista algebrico-analitico.

Salvo esplicite contrarie dichiarazioni, per quanto riguarda notazioni, convenzioni, dettagli, ecc., ci si atterrà a quanto introdotto in quella comunicazione, cui appunto si rimanda il lettore per ragioni di sintesi tipografica.

Analogamente, per i medesimi motivi, al secondo dei due citati lavori si intende fare riferimento in tema di considerazioni generali sull'utilizzabilità proficua di procedimenti risolvanti grafici elementari.

2. CORDE UGUALI CO-POLARI

Una prima questione preliminare riguarda l'individuazione delle coppie di corde uguali co-polari in due distinte circonferenze proprie complanari intersecantisi.

Precisamente, (fig. 1), siano γ_1 e γ_2 due distinte circonferenze proprie di centri C_1, C_2 e raggi r_1, r_2 e ne siano B_1, B_2 i due comuni punti base reali propri. Si richiede di determinare le rette, quali b e d , spiccate da uno dei due punti base, quale ad esempio B_1 , sulle quali le circonferenze γ_1 e γ_2 intercettano delle coppie (B_1B_2, B_1B_2) e (B_1D_1, B_1D_2) di corde uguali allineate.

Fissato appunto, ad esempio, quale polo il punto base B_1 , è evidente che alle richieste condizioni soddisfa la comune corda B_1B_2 appartenente all'asse radicale $b \equiv B_1B_2$ delle due distinte γ_1, γ_2 . Ci si domanda poi se, come v'è appunto la B_1B_2 , vi siano e quali che siano pure altre rette del fascio di centro B_1 , sulle quali γ_1 e γ_2 intercettano corde di ugual lunghezza, appartenenti alla stessa generica retta, anche se la lunghezza varia da retta a retta.

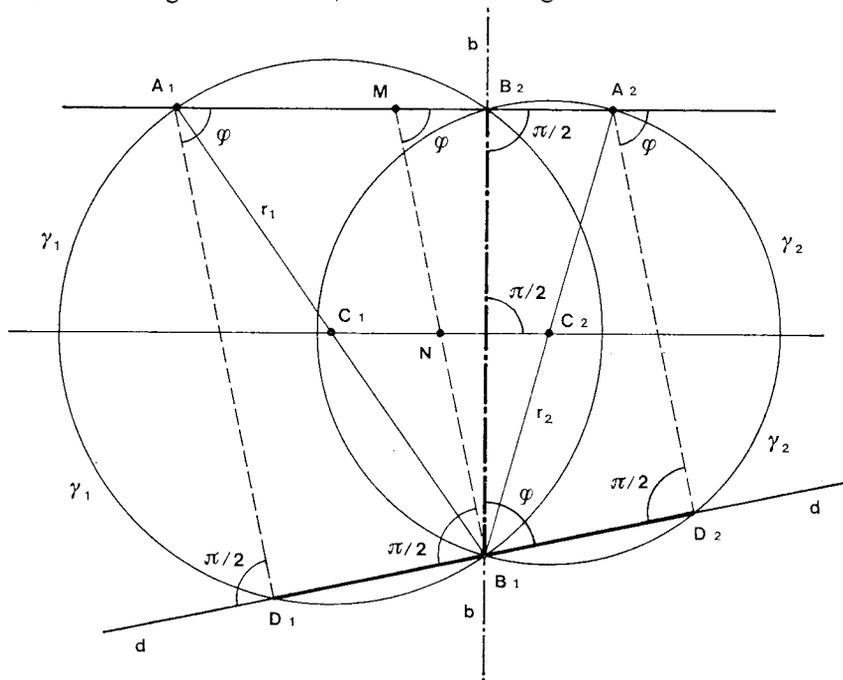


fig. 1

Posto allora che di tali rette ve ne sia qualche altra d , oltre all'asse radicale b , si dicano D_1 e D_2 (tra loro distinti o meno, com'è per B_2) gli estremi delle corde distinti da B_1 ; per essi e per B_1 si conducano poi le normali alla retta d in gioco. Tali normali in D_1 e D_2 incontreranno le γ_1 e γ_2 nei punti A_1, A_2 diametralmente opposti del comune polo B_1 e dei due A_1, A_2 uno, almeno, si differenzia dall'altro punto base B_2 attesa la distinzione delle γ_1 e γ_2 . La o le rette B_2A_1, B_2A_2 risultano così ortogonali in B_2 all'asse radicale b ed A_1, A_2, B_2 sono tra loro allineati. Quando, allora, la normale in B_1 alla retta considerata d non risulti parallela alla predetta $A_1B_2A_2$, cioè quando la d non coincida con l'asse radicale b , l'intersezione propria M fra detta normale ed $A_1B_2A_2$ equidista da A_1 e da A_2 , per il teorema di *Taletè*, in quanto è per ipotesi $B_1D_1 = B_1D_2$; e tale equidistanza $A_1M = MA_2$ uguaglia pure la distanza C_1C_2 fra i centri C_1, C_2 delle circonferenze γ_1, γ_2 .

Ne segue, in conclusione, la seguente semplice costruzione pratica. Fissato B_1 quale polo, per l'altro punto base B_2 si conduce la normale all'asse radicale $b \equiv B_1B_2$, la quale incontrerà γ_1 e γ_2 in A_1 ed A_2 , rispettivamente. Del segmento A_1A_2 si localizza il punto medio M che va congiunto con il polo B_1 . L'ortogonale in B_1 alla MB_1 interseca le γ_1 e γ_2 in D_1 e D_2 equidistanti da B_1 , come richiesto.

A chiusura di questo numero, è da notare che il limitato numero (due) di coppie di corde rispondenti alle imposte proprietà dipende: *a)* dalla distinzione delle due circonferenze γ_1, γ_2 reali proprie intersecantisi in due diversi punti propri; *b)* dall'unicità della normale alla retta (se non degenerare in un punto) definita dal comune punto base assunto come polo e dal punto medio tra i due centri delle circonferenze.

Quando venisse meno la *a)*, l'identificazione di γ_1 e γ_2 lascierebbe indeterminato l'asse radicale, pur se si prefissa un punto quale uno dei punti base e polo (a meno che $\gamma_1 \equiv \gamma_2$ non venga considerata come coincidenza limite e se ne precisi il percorso e le modalità di convergenza). L'identificazione di γ_1 e γ_2 produce quindi in generale una ∞^2 indeterminazione: occorrerebbe anzitutto un parametro ad ubicare il polo su $\gamma_1 \equiv \gamma_2$ e successivamente un secondo per la retta da assumere quale asse radicale nel fascio di centro-polo prima prescelto, (fig. 1a).

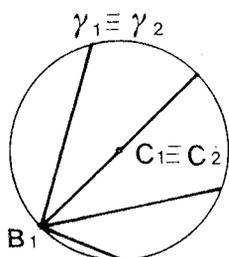


fig. 1a

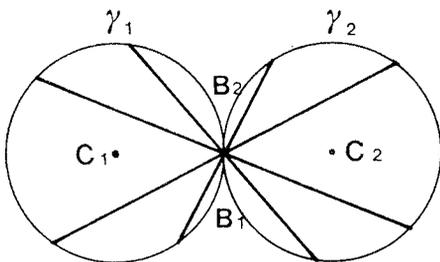


fig. 1b

Allorchè, invece, e solo allora, le due circonferenze γ_1, γ_2 abbiano ugual raggio e siano mutuamente tangenti esterne, le coppie di siffatte corde sono in numero illimitato venendo meno la *b)*: punti base e punto medio dei centri coincidono, così che la predetta retta degenera in un punto proprio e di normali per esso se ne possono condurre quante si voglia, su ognuna delle quali la coppia γ_1, γ_2 intercetta due corde allineate ed uguali, di lunghezza però variabile assieme alla generica retta del fascio, (fig. 1b).

Si tratterebbe, dunque, di una ∞^1 indeterminazione nella scelta od individuazione della retta del fascio e cioè della coppia di corde co-polari, allineate ed uguali.

Risulta, in conclusione, dalle precedenti considerazioni che caratteristica comune a questi unici due casi di indeterminazione è l'uguaglianza dei raggi delle circonferenze reali proprie γ_1 e γ_2 .

3. COPPIE DI CORDE EQUIPOLLENTI

Un secondo problema preliminare concerne l'individuazione delle coppie di corde equipollenti e convergenti in due poli corrispondenti di due distinte circonferenze proprie complanari, (fig. 2).

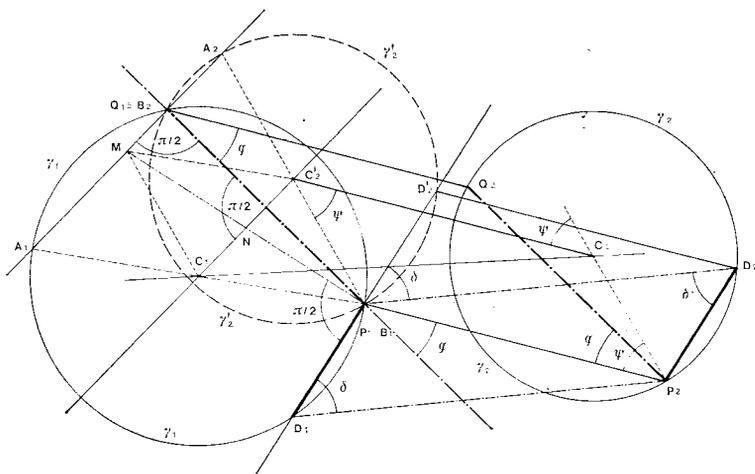


fig. 2

Siano, cioè, ancora, γ_1 e γ_2 due distinte circonferenze proprie complanari, questa volta anche non realmente intersecantisi, di centri C_1, C_2 e P_1, P_2 siano due loro qualsivoglia punti da assumersi come poli o centri corrispondenti di fasci di raggi. Si domanda di localizzare nell'uno e nell'altro fascio le coppie di raggi fra di loro paralleli su cui le circonferenze γ_1 e γ_2 intercettano corde di ugual lunghezza, pur se variabile da coppia a coppia.

A tale scopo, per ricondursi alla costruzione del precedente paragrafo, si pensi di traslare, ad esempio, la coppia (C_2, γ_2) secondo la direzione $\vec{P}_2 P_1$, costruendo il parallelogramma $C_2 P_2 P_1 C_2'$, in (C_2', γ_2') .

Escluso il caso ovvio che il quadrangolo $C_2 P_2 P_1 C_1$ (fig. 2a) sia già esso stesso un parallelogramma (per modo che tutte le coppie di raggi paralleli dei due fasci adempirebbero alle richieste esigenze), C_2' e γ_2' saranno in genere distinti da C_1 e γ_1 , rispettivamente.

Nei riguardi di γ_1, γ_2' si potrà mettere in atto quanto puntualizzato al precedente paragrafo assumendo $P_1 \equiv B_1$ quale comune origine delle corde co-polari.

La normale da P_1 alla $C_1 C_2'$ individuerà con γ_1 l'intersezione $Q_1 \equiv B_2$ da traslare, inversamente a prima, sempre secondo $\vec{P}_1 \vec{P}_2$, in Q_2 su γ_2 con il parallelogramma $Q_1 P_1 P_2 Q_2$.

Costruito poi il parallelogramma $C_1P_1C_2'M$ per individuare M e la diagonale MP_1 , la normale in P_1 alla predetta MP_1 intersecherà la γ_1 anche in D_1 , al quale corrisponderà D_2 , su γ_2 , ottenibile con l'ulteriore e finale parallelogramma $P_1D_1P_2D_2$.

A motivo, appunto, di queste elaborazioni grafiche secondo parallelogrammi e traslazioni varie è evidente che (P_1Q_1, P_2Q_2) e (P_1D_1, P_2D_2) sono le richieste coppie di corde equipollenti (prescindendo dal verso, per la seconda coppia) e convergenti sugli omonimi poli P_1, P_2 nelle due assegnate distinte circonferenze proprie γ_1 e γ_2 .

Le considerazioni della fine del precedente numero 2 a proposito di indeterminazioni lasciano intendere che simili casi son da tener presenti pur nell'attuale situazione trasferibile, come s'è detto, a quella ivi discussa.

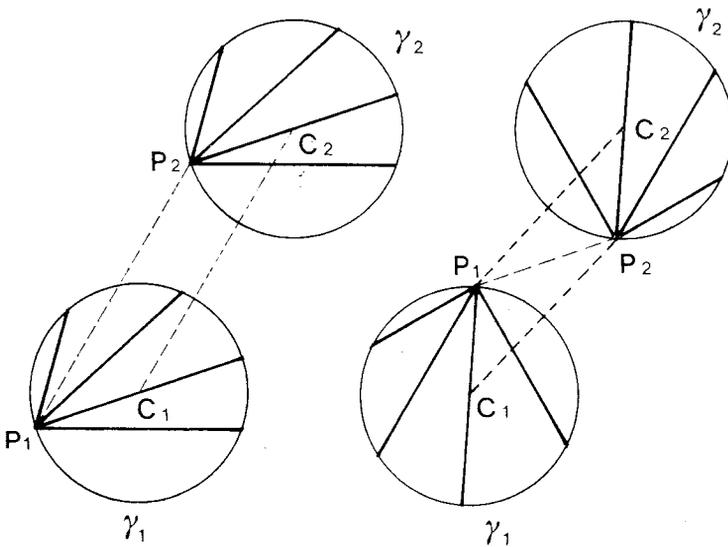


fig. 2a

fig. 2b

Della fig. 2a già si è fatto testè cenno.

Dalla fig. 2b, ov'è ora $C_2P_2C_1P_1$ il parallelogramma dei centri e dei poli, risulta evidente il riferimento al citato caso *b*) del n. 1, così che ancora, come prima, tutte le coppie di raggi paralleli dei due fasci risponderebbero alle imposte esigenze.

4. CONSIDERAZIONI SU DI UNA EVENTUALE ELABORAZIONE GRAFICA SINTETICA PER L'INTERSEZIONE QUADRATICA INVERSA

Si prenda a considerare il problema della intersezione quadratica inversa multipla nel piano così come formulato nella già citata nota (1).

Per comodità del lettore si riproduce qui a lato in fig. 3 lo schema generale colà presentato in quella figura 1 riassuntiva della generica situazione topografica, della prassi operativa, di notazioni, di convenzioni, ecc. qui integralmente riprese.

Per una maggior semplicità e concretezza d'esposizione converrà pure riferirsi, almeno per alcuni passi delle successive varie operazioni geometriche da eventualmente effettuarsi, alla adiacente fig. 4 (e derivate successive)

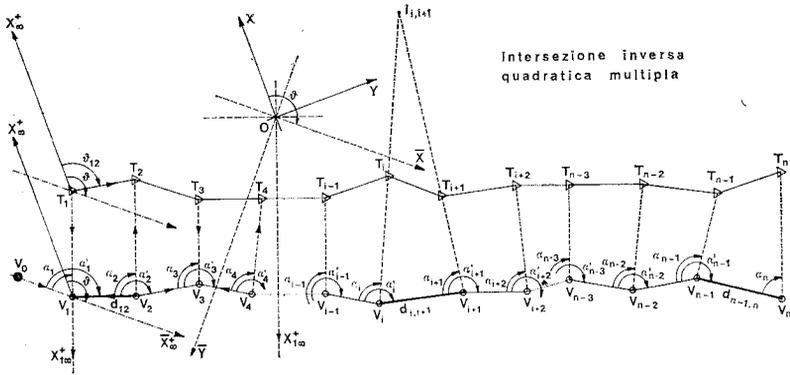


fig. 3

relativa ad una quaterna di vertici noti generici T_1, T_2, T_3, T_4 e ad una doppiabile configurazione $V_r', (r = 1, 2, 3, 4), V_s'', (s = 1, 2, 3, 4)$, nell'ipotesi di utilizzare inizialmente i soli otto dati lineari-goniometrici $d_{12}, d_{34}, \alpha_1' - \alpha_2, \alpha_3', (i = 2, 3), \alpha_4$ « strettamente necessari ».

Si consideri innanzitutto il poligono (convesso, concavo, intrecciato):

$I T_2 V_2 V_3 V_4 \dots V_{n-3} V_{n-2} V_{n-1} T_{n-1} I$, ($n = 4$ in fig. 4) ove con I (od I' ed I'' , in fig. 4) s'intende aver indicato l'intersezione propria od impropria delle due rette cui appartengono i due lati $T_2 V_2$ e $T_{n-1} V_{n-1}$ (oppure $T_2 V_2', T_{n-1} V_{n-1}'$, ecc., in fig. 4).

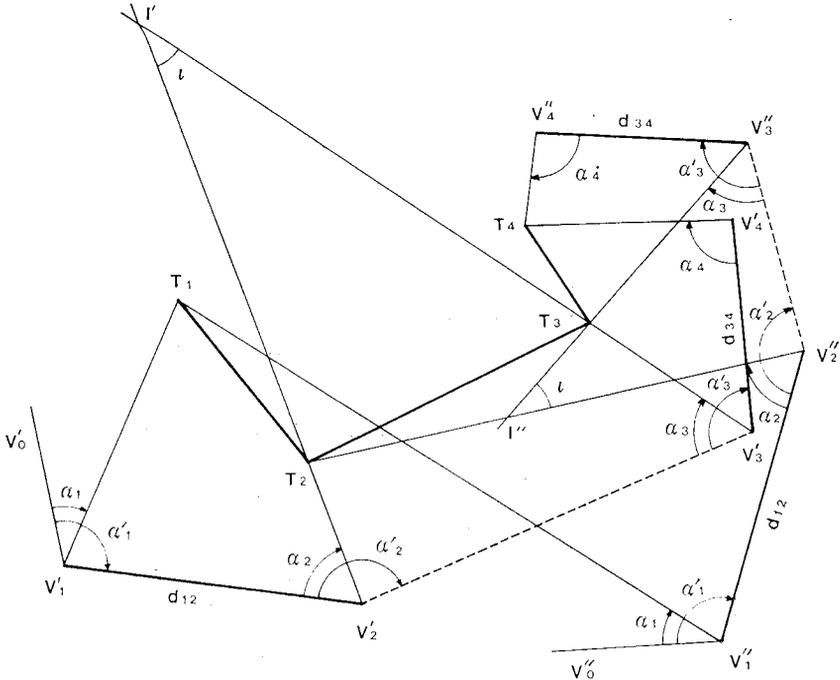


fig. 4

Di un tal poligono, anche intrecciato, sono quindi noti gli angoli interni-esterni, avendosi:

$$\begin{aligned} \hat{T}_2 &\equiv \pi \pmod{2\pi}, & \hat{T}_{n-1} &\equiv \pi \pmod{2\pi}, \\ \hat{V}_2 &\equiv \alpha'_2 - \alpha_2 \pmod{2\pi}, & \hat{V}_{n-1} &\equiv \alpha_{n-1} \pmod{2\pi}, \\ \hat{V}_3 &\equiv \alpha'_3 \pmod{2\pi}, & \hat{V}_{n-2} &\equiv \alpha'_{n-2} \pmod{2\pi}, \\ &\dots\dots\dots, & & \dots\dots\dots, \\ &\dots\dots\dots, \hat{V}_i &\equiv \alpha'_i \pmod{2\pi}, & \dots\dots\dots, \end{aligned}$$

ond'è pur noto, a meno di multipli di 2π , l'angolo ι in I (od I' ed I'').

Nel tentativo di apprestare un procedimento grafico unitario che temporaneamente prescindia, se possibile, dalla più o meno lunga catena dei punti-vertici intermedi, si potrebbe pensare di operare una roto-traslazione di uno dei quadrangoli estremi $T_1 T_2 V_2 V_1$, $T_{n-1} T_n V_n V_{n-1}$, intesi come rigidi, così da portarli l'uno attiguo all'altro. Precisamente, ad esempio, dapprima (fig. 5, per $n = 4$) si potrebbe traslare il quadrilatero rigido $T_{n-1} T_n V_n V_{n-1}$ parallelamente a sè stesso portando il vertice T_{n-1} a coincidere con l'altro T_2 e sia appunto $T_2 \bar{T}_n \bar{V}_n \bar{V}_{n-1}$ la posizione finale del quadrilatero così traslato. Indi, se ι non vale zero o π , del $T_2 \bar{T}_n \bar{V}_n \bar{V}_{n-1}$ si potrebbe effettuare una rotazione d'ampiezza ι attorno a T_2 (fig. 6, per $n = 4$) così da portare il lato $T_2 \bar{V}_{n-1}$ a coincidere con il lato $T_2 V_2$ del primo quadrilatero rigido $T_1 T_2 V_2 V_1$ rimasto nella posizione iniziale.

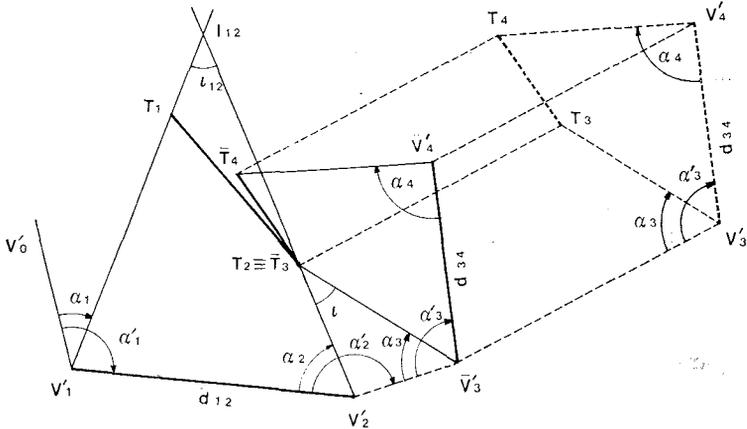


fig. 5

Con ciò l'originario quadrilatero $T_{n-1} T_n V_n V_{n-1}$ avrebbe raggiunto la posizione $T_2 T_n^* V_n^* V_{n-1}^*$ con V_{n-1}^* sulla retta $T_2 V_2$.

A tal punto sarebbero da distinguere i tre casi:

- 1) $\sigma_2 - \sigma_1 \equiv 0 \pmod{\pi}$, $\sigma_n - \sigma_{n-1} \equiv 0 \pmod{\pi}$;
- 2) $\sigma_2 - \sigma_1 \equiv 0 \pmod{\pi}$, $\sigma_n - \sigma_{n-1} \not\equiv 0 \pmod{\pi}$;

oppure:

- 3) $\sigma_2 - \sigma_1 \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, $\sigma_n - \sigma_{n-1} \equiv 0 \pmod{\pi}$;
- 3) $\sigma_2 - \sigma_1 \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, $\sigma_n - \sigma_{n-1} \not\equiv 0 \pmod{\pi}$;

che regolano il parallelismo o meno di tutte od alcune delle tre rette fondamentali $V_1 T_1$, $V_2 T_2 \equiv V_{n-1}^* T_2$, $V_n^* T_n^*$.

Com'è analiticamente noto, quando una almeno delle differenze $\sigma_2 - \sigma_1$, $\sigma_n - \sigma_{n-1}$ non sia congrua a zero, secondo π , [com'è nei casi 2) e 3)], il pro-

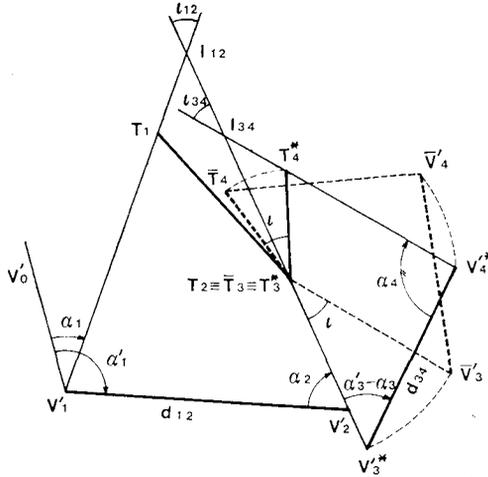


fig. 6

blema risulta determinato, a meno di una scelta fra due possibili configurazioni; in caso contrario, con $\sigma_2 - \sigma_1$ e $\sigma_n - \sigma_{n-1}$ entrambe congrue a zero, ci si trova invece di fronte ad una completa indeterminazione.

Dalle successive considerazioni risulterà, poi, che in effetti si potrebbe astrarre dalla menzionata roto-traslazione.

4.1 - COPPIE DI RETTE ESTREME PARALLELE: COMPLETA INDETERMINAZIONE

Avendo luogo le due predette congruenze a zero, secondo π , le due rette $V_1 T_1, V_2 T_2$ sono fra di loro parallele, così come pure lo sono fra di loro (anche se non parallele alle due testè menzionate) le due altre estreme $V_{n-1} T_{n-1}, V_n T_n$.

Le tre rette $V_1 T_1, V_2 T_2 \equiv V_{n-1}^* T_{n-1}^*, V_n^* T_n^*$ sono fra di loro parallele ed il problema, com'è noto, è completamente indeterminato [cfr. citata nota (2), paragrafo 5; oppure anche citata nota (1), paragrafi 3.3 e 3.4], (*).

4.2 - COPPIE DI RETTE ESTREME PARALLELE E CONVERGENTI: SOLUZIONE A CORDE CO-POLARI

Quando invece una sola delle differenze $\sigma_2 - \sigma_1, \sigma_n - \sigma_{n-1}$ sia congrua a zero, secondo π , allora la soluzione grafica del problema, la cui indeterminazione *a priori* stavolta si riduce ad una eventuale scelta fra due configurazioni teoricamente possibili, si riconduce facilmente, ad esempio, a quella detta « delle corde co-polari di assegnata differenza » presentata nella nota (2) già citata al paragrafo 7.2.

(*) Con riferimento al quadro 2 [equazione determinante per δ , del paragrafo 3.3 della citata nota (1)], risulterebbe, nelle premesse ipotesi: $t_1 = t_2, t_{n-1} = t_n$, così che sarebbe pur nullo ogni complemento algebrico di un qualsivoglia elemento dell'ultima colonna contenente l'incognita δ .

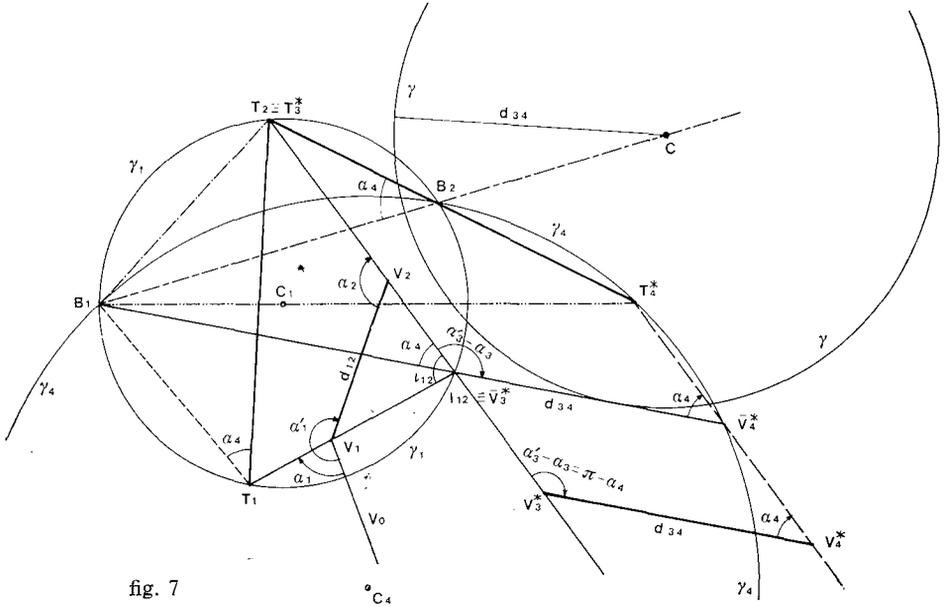


fig. 7

Si supponga, ad esempio, sia, con riferimento alla fig. 7:

$l_{12} \equiv \sigma_2 - \sigma_1 \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, $l_{34} \equiv \sigma_4 - \sigma_3 \equiv 0 \pmod{\pi}$,
avendosi posto, com'è noto:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \alpha_1, & \sigma_1' &= \alpha_1', \\ \sigma_2 &= \sigma_1' + \alpha_2, & \sigma_2' &= \sigma_1' + \alpha_2', \\ \sigma_3 &= \sigma_2' + \alpha_3; & \sigma_3' &= \sigma_2' + \alpha_3', \\ \sigma_4 &= \sigma_3' + \alpha_4. \end{aligned}$$

Si inizi poi a tracciare uno degli archi capaci dell'angolo $l_{12} \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ sulla corrispondente base $\overline{T_1 T_2} = b_{12}$. In mancanza di ulteriori elementi per operare fin d'ora una scelta fra i due possibili archi, simmetrici rispetto alla $T_1 T_2$, converrà tracciarli entrambi e quanto si andrà dicendo per uno solo, a motivo di semplicità, appartenente alla circonferenza γ_1 tracciata in figura 7, dovrà logicamente ripetersi ed attuarsi anche per il simmetrico fino a che non si potrà discriminare definitivamente, se si è in grado, tramite qualche altro elemento anche qualitativo, tra le due possibili teoriche soluzioni.

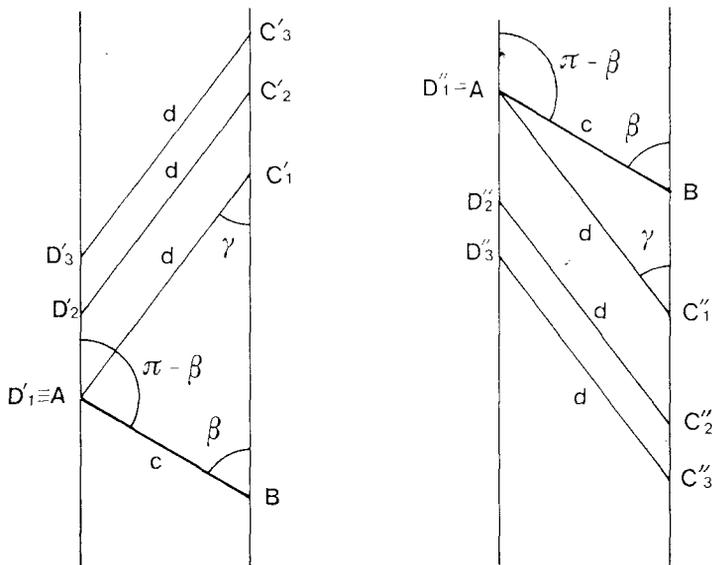
Dopo di che, nell'ipotesi il problema fosse di già risolto, si potrebbe traslare la base misurata ed orientata $\overline{V_3^* V_4^*} = d_{34}$, tra gli ultimi due vertici V_3, V_4 , parallelamente a se stessa fino a portarne l'estremo V_3^* in I_{12} , intersezione su γ_1 delle rette $T_1 V_1, T_2 V_2$. La retta del segmento equipollente si avuto per traslazione interseca (o tange) la γ_1 ulteriormente in B_1 , così che $\overline{T_2 B_1}$ è visto da $I_{12} \equiv \overline{V_3^*}$ e da T_1 sotto l'angolo α_4 . E sotto questo stesso angolo α_4 si vedrebbe pure il segmento $\overline{B_1 T_4^*}$, dall'estremo $\overline{V_4^*}$ allineato, per la operata traslazione, con $B_1 I_{12} \equiv B_1 \overline{V_3^*}$. Il punto B_1 è dunque, ovviamente, una delle due intersezioni della γ_1 con le rette, simmetriche l'un l'altra rispetto a $T_1 T_2$, che con $T_1 T_2$ stessa formano l'angolo α_4 in T_1 e tra le due, come al solito, andrà fatta, se possibile, una opportuna discriminazione.

Il tutto in tal modo si sposta sulla terna di punti T_2, B_1, T_4^* e sulle cir-

conferenze γ_1 predetta e γ_4 capace di α_4 sul segmento $B_1 T_4^*$: con polo B_1 , si dovrà determinare le corde co-polari del tipo $B_1 \bar{V}_3^*$, $B_1 \bar{V}_4^*$ delle γ_1 , γ_4 la cui differenza $\bar{V}_3^* \bar{V}_4^*$ uguaglia l'assegnata base $d_{34} \equiv \bar{V}_3 \bar{V}_4$, (*).

Per questo, come si sa, è, ad esempio, da prendere un segmento $\overline{B_1 C}$ sull'asse radicale $B_1 B_2$ delle γ_1 e γ_4 , a partire da B_1 verso B_2 , lungo $2 \cdot C_1 C_2$, ove $C_1 C_2$ è la interdistanza dei centri C_1 , C_2 di γ_1 e γ_4 , (**).

Tracciata la circonferenza γ di centro C e raggio pari all'assegnata differenza d_{34} , dal polo B_1 si dovranno condurre le tangenti alla γ .



(*) Che in questa fase della soluzione, nelle predette ipotesi, non sia necessario l'intervento della distanza d_{12} , è conforme a quanto in simili circostanze suggerisce la equazione determinante del quadro 2, par. 3.3, della citata nota (1) limitatamente alla determinazione dei due possibili valori del parametro d'orientamento δ .

Essendo appunto $t_n = t_{n-1}$ e $t_1 \neq t_2$ (e nell'ovvia ulteriore ipotesi che pur tutti gli altri elementi $t_2' - t_3$, ecc. della diagonale principale non siano nulli), una tal equazione riducesi alla più semplice:

$$p_{n-1} \cdot \cos \delta + q_{n-1} \cdot \sin \delta + (-1)^{n-1} d_{n-1, n} \cdot \sin \alpha_n / \cos \sigma_n = 0,$$

con:

$\overline{p}_{n-1} = Y_n - Y_{n-1} + t_n (X_{n-1} - X_n)$, $\overline{q}_{n-1} = X_{n-1} - X_n + t_n (Y_{n-1} - Y_n)$,
 ove, nell'una e nelle altre, la presenza dei vertici precedenti $T_1, T_2, \dots, T_{n-2}, V_1, V_2, \dots, V_{n-2}$ si manifesta tramite i soli angoli $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{n-1}$ delle combinazioni σ'_{n-1} e σ_n .

D'altronde, com'è noto, sono in genere angolarmente definite, nell'ambito di due famiglie di configurazioni simili, le conformazioni di trapezi di cui vengano assegnati i lati obliqui ed uno degli angoli tra un lato obliquo e la direzione dei lati paralleli. Vedansi le adiacenti figure ove si intendono assegnati il lato obliquo $AB = c$ e gli angoli β e $\pi - \beta$ con la direzione dei lati paralleli, nonchè l'altro lato obliquo d ; è allora ovvio che al lato obliquo d possono essere assegnate due sole direzioni simmetriche rispetto ad una qualsivoglia normale ai lati tra loro paralleli.

È da quest'ultima osservazione discende una nuova procedura grafica di soluzione, valida nelle premesse ipotesi, di ben facile concezione potendosi astrarre dalla roto-traslazione considerata in precedenza, per cui ci si dispensa da una dettagliata esposizione, potendo bastare appunto quanto qui e nel testo si è ricordato.

(**) Il secondo punto base B_2 tra γ_1 e γ_4 appartiene pure alla retta del lato $T_3^* T_4^* = T_2 T_4^*$, cioè la retta $T_2 T_4^*$ interseca la circonferenza γ_1 , oltrechè in T_2 , in altro punto coincidente con B_2 per il fatto che da esso si vedono $B_1 T_2$ e $B_1 T_4^*$ sotto gli angoli α_4 o $\pi - \alpha_4$.

Ed il problema è così praticamente quasi risolto. Una di tali tangenti individuerà sulla γ_1 l'intersezione $I_{12} \equiv \overline{V_3^*}$ e sulla γ_4 l'altro estremo $\overline{V_4^*}$. Sono quindi individuabili le direzioni $I_{12}T_1, I_{12}T_2$ delle visuali V_1T_1, V_2T_2 e così pure quella delle parallele V_3T_3, V_4T_4 una volta che si tenga conto della rotazione d'ampiezza ι inizialmente operata attorno a T_2 .

La risoluzione del triangolo non degenero $V_1V_2I_{12}$ tramite i noti elementi gonio-lineari $\alpha_1' - \alpha_1, \alpha_2, d_{12} = \overline{V_1V_2}$ permetterà d'avere poi $\overline{V_1I_{12}}, \overline{V_2I_{12}}$ e quindi di localizzare V_1 e V_2 a partire, in senso opportuno, da I_{12} . Successivamente, tramite altri noti elementi, si localizzeranno dapprima il V_3 ed infine l'ultimo vertice V_4 .

Di una eventuale altra possibile configurazione solutrice, derivabile da una o dall'altra delle doppie vie che, come s'è or ora visto, si presentano a mano a mano che si procede nella soluzione grafica, già s'è detto.

Alla discriminazione finale concorrerà validamente la conoscenza di un qualche altro elemento, acquisito in fase di rilievo, da comparare con l'omomero che l'una o l'altra configurazione risolvente suggerisce.

4.3 - COPPIE DI RETTE ESTREME CONVERGENTI

Resterebbe ora da studiare il caso generale ove:

$l_{12} \equiv \sigma_2 - \sigma_1 \neq 0 \pmod{\pi}, \quad l_{n-1, n} \equiv \sigma_n - \sigma_{n-1} \neq 0 \pmod{\pi},$
 relativo a coppie di rette estreme $(V_1T_1, V_2T_2), (V_{n-1}T_{n-1}, V_nT_n)$ convergenti in punti propri rispettivi $I_{12}, I_{n-1, n}$.

Effettuata, dunque, la roto-traslazione indicata e fatto per semplicità $n = 4$, sarebbero da costruire gli archi capaci degli angoli rispettivi l_{12}, l_{34} e supplementari $\pi - l_{12}, \pi - l_{34}$ sulle basi $\overline{T_1T_2} = b_{12}, \overline{T_2T_4^*} = b_{34}$, (fig. 8).

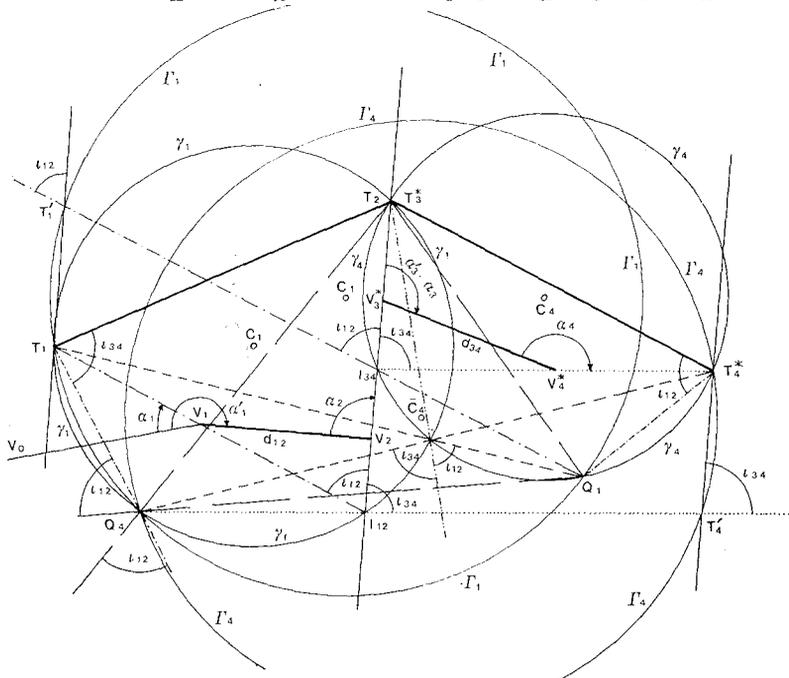


fig. 8

Si chiamino poi γ_1 una delle circonferenze relative ad ι_{12} , $\overline{T_1 T_2}$ e γ_4 una delle due altre costruibili con la coppia ι_{34} , $\overline{T_2 T_4^*}$. La scelta, al solito, dipenderebbe da qualche eventuale ulteriore elemento, anche qualitativo, se disponibile; altrimenti, si dovrebbe procedere secondo i quattro possibili accoppiamenti ripetendo quanto sarebbe via via da compiere sulle γ_1 e γ_4 .

Pongasi, dunque, per intanto, che il problema sia graficamente risolto e siano appunto γ_1 , γ_4 le circonferenze degli archi capaci di $\iota_{12} \circ \pi - \iota_{12}$ e $\iota_{34} \circ \pi - \iota_{34}$ sulle basi $\overline{T_1 T_2}$, $\overline{T_2 T_4^*}$; su di essi giaceranno i punti I_{12} , I_{34} di convergenza delle coppie $(V_1 T_1, V_2 T_2)$ e $(V_3^* T_2, V_4^* T_4^*)$.

Si pensi poi di traslare il segmento $\overline{I_{12} T_1}$ parallelamente a sè stesso fino a portare I_{12} in I_{34} lungo la retta $\overline{I_{12} I_{34}} \equiv \overline{V_2 T_2} \equiv \overline{V_3^* T_2}$. Varrebbe quanto dire di spiccare da I_{34} la retta r_1 che con la $I_{34} T_2$ formi ancora l'angolo $\iota_{12} = T_1 \hat{I}_{12} T_2$.

La retta r_1 intersecherebbe sulla γ_4 il punto Q_1 individuabile anche, sulla γ_4 stessa, come uno dei suoi punti che, accoppiati al vertice T_2 , danno luogo a segmenti $\overline{Q_1 T_2}$ visibili dall'altro vertice T_4^* di γ_4 sotto l'angolo considerato ι_{12} ($\circ \pi - \iota_{12}$) relativo all'altra circonferenza γ_1 . Nella traslazione testè operata il vertice T_1 andrà in un punto T_1' tale che $\overline{T_1 T_1'}$ riesca equipollente ad $\overline{I_{12} I_{34}}$ e da T_1' si vedrà $\overline{T_1 Q_1}$ ancora sotto l'angolo ι_{12} ($\circ \pi - \iota_{12}$).

Sarebbero quindi da costruire su $\overline{T_1 Q_1}$ gli archi capaci di ι_{12} ($\circ \pi - \iota_{12}$) e si chiamerà Γ_1 una opportuna di queste due circonferenze.

Le considerazioni testè svolte sarebbero da ripetersi nei riguardi di $\overline{I_{34} T_4^*}$ da traslarsi portando I_{34} in I_{12} e T_4^* in un nuovo T_4' (da determinarsi, in realtà, con la successiva costruzione) con $\overline{T_4^* T_4'}$ equipollente ad $\overline{I_{34} I_{12}}$.

Si dovrebbero localizzare sulla γ_1 i punti Q_4 che, accoppiati al vertice comune T_2 , danno luogo a segmenti $\overline{Q_4 T_2}$ visibili da T_1 di γ_1 sotto l'angolo ι_{34} ($\circ \pi - \iota_{34}$) relativo alla γ_4 e sceglierne uno opportuno. Si dirà infine Γ_4 una opportuna delle circonferenze cui appartengono gli archi capaci di ι_{34} ($\circ \pi - \iota_{34}$) sul segmento $\overline{Q_4 T_4^*}$ e ad essa appartiene ovviamente pure il predetto T_4' .

I segmenti $\overline{T_1 T_1'}$ e $\overline{T_4^* T_4'}$ sarebbero tra loro equipollenti, essendolo entrambi nei riguardi di $\overline{I_{12} I_{34}}$; sarebbero, inoltre, spiccati rispettivamente da T_1 e da T_4^* (che sono punti di posizione nota) ed i loro altri estremi T_1' , T_4' apparterebbero l'uno a Γ_1 e l'altro a Γ_4 , dato che da questi si vedono $T_1 Q_1$ e $T_4^* Q_4$ sotto gli angoli rispettivi ι_{12} ($\circ \pi - \iota_{12}$), ι_{34} ($\circ \pi - \iota_{34}$).

Ed allora, una volta tracciate le Γ_1 e Γ_4 , la costruzione esposta al precedente n. 3 darebbe modo di individuare le corde equipollenti di Γ_1 e Γ_4 spiccabili da T_1 e da T_4^* .

S'affaccerebbe, però, a tal punto la questione relativa al numero limitato od illimitato di coppie di siffatte corde equipollenti.

A tal proposito è da osservare anzitutto che con la predetta roto-traslazione (operata nel tentativo di giungere ad una soluzione sintetica, che prescindesse, cioè, dalla posizione dei punti-vertici intermedi) l'originario problema s'è tramutato, come appare dalla fig. 6, nella localizzazione della quaterna $V_1', V_2', V_3'^*, V_4'^*$ rispetto alla terna nota $T_1, T_2 \equiv T_3^*, T_4^*$, null'altro però sapendo dell'elemento lineare $\overline{V_2' V_3'^*}$ all'infuori dell'allineamento della terna $V_2', V_3'^*, T_2$. Essendo, genericamente, $V_2' \neq V_3'^*$ ed ignorandone la reciproca distanza $\overline{V_2' V_3'^*}$, il problema così prospettato resterebbe completamente indeterminato venendo a mancare un elemento essenziale alla individuazione delle nove incognite (le quattro coppie di coordinate di $V_1', V_2', V_3'^*, V_4'^*$ ed il parametro d'orientamento angolare della poligonale, avente

questi come vertici, nel sistema dei noti $T_1, T_2 = T_3^*, T_4^*$). Nel corrispondente sistema d'equazioni del tipo del quadro 1, par. 3.2, della citata nota (1), infatti, le visuali $V_2' T_2, V_3' T_2, V_2' V_3'^*$, a causa dell'allineamento della terna $V_2', V_3'^*, T_2$, genererebbero due sole equazioni indipendenti.

Una tal ∞^1 indeterminazione analitica lascia dunque presagire che, nella anzidetta ricerca (fig. 8) delle coppie di corde equipollenti di Γ_1 e Γ_4 spiccabili da T_1 e da T_4^* secondo la falsariga dei nn. 3 e 2, ci si imbatte in un caso consimile di indeterminazione eliminabile solo a patto di conoscere la lunghezza $\overline{I_{12} I_{34}}$ delle corde ricercate.

E l'acquisizione, anche grafica, di una tal lunghezza non è in generale immediata venendo a dipendere anche dagli elementi gonio-lineari (noti od inizialmente incogniti) della spezzata intermedia accantonata V_2, V_3, \dots, V_{n-1} . Ne è un facile esempio grafico la fig. 9, ove si è ipotizzato il parallelismo delle visuali $V_2 T_2, V_3 T_3$.

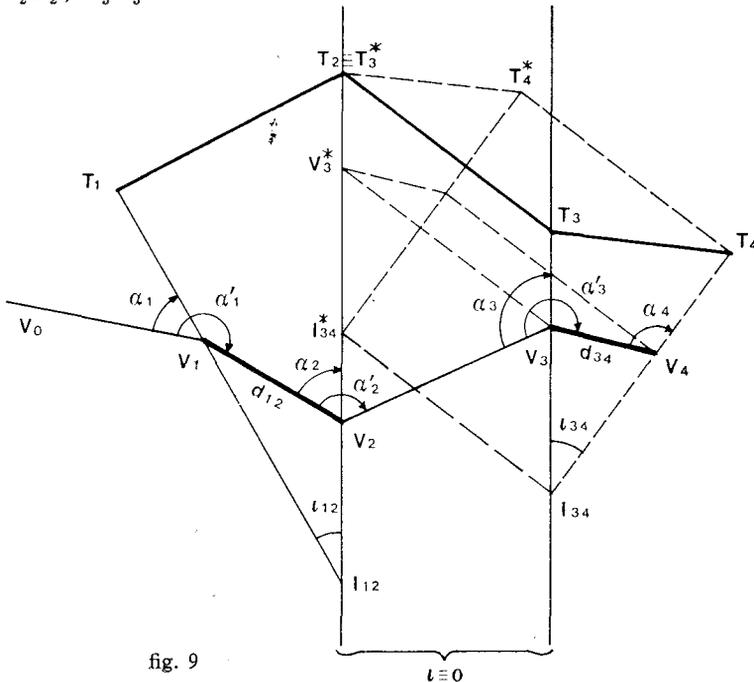


fig. 9

L'angolo ι è così congruo a zero e sarebbe da compiere, secondo gli intendimenti esposti, la sola traslazione rigida definita da $\overline{T_2 T_3}$, che porterebbe V_3 in V_3^* sulla $V_2 T_2$ e l'intersezione I_{34} in I_{34}^* . Evidentemente:

$$\overline{I_{12} I_{34}^*} = \overline{I_{12} V_2} + \overline{V_2 V_3^*} - \overline{I_{34} V_3},$$

e del triangolo $V_2 V_3 V_3^*$, che definisce il lato incognito $V_2 V_3^*$, attualmente si conoscerebbe solamente $V_3 V_3^* = T_3 T_2$ e l'angolo $T_2 \hat{V}_2 V_3 = \alpha_2' - \alpha_2$.

Purtroppo, quindi, in conclusione, il suestoso tentativo che voleva prescindere in una prima fase, come detto, dai punti-vertici intermedi, ricercando delle coppie determinate di corde equipollenti (di lunghezza però inizialmente incognita), nel caso più generale di coppie di visuali estreme entrambe convergenti, non ha esito felice. A ciò si provvederà con altro procedimento generale nel numero seguente.

A conclusione delle precedenti considerazioni, è da ribadire però la validità del metodo qui esposto, e che si denominerà « delle corde equipolenti », quando altrimenti si riesca a conoscerne la lunghezza ed esso richiama sostanzialmente quello « del trapezio o della secante o del punto di COLLINS presentato nella citata nota (2) al par. 7.5.

5. - PROCEDIMENTO GRAFICO GENERALE « A SUCCESSIONE DI PUNTI DI COLLINS E CATENA TRIANGOLARE »

5.1 — Si inizierà a supporre che il problema sia determinato (a meno della limitata incertezza derivante dalla sua natura quadratica che teoricamente comporta due soluzioni, a parità di dati iniziali) e di più graficamente risolto.

Si fisserà l'attenzione su una delle due configurazioni teoriche inizialmente possibili. Per maggior semplicità, ci si limiterà a delle considerazioni esemplificative, però del tutto generali, su di un ristretto numero di punti, e precisamente alla configurazione di fig. 10 relativa a due sestine di punti T_i, V_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$), ove in particolare si è ipotizzato il parallelismo delle visuali $V_4 T_4, V_5 T_5$.

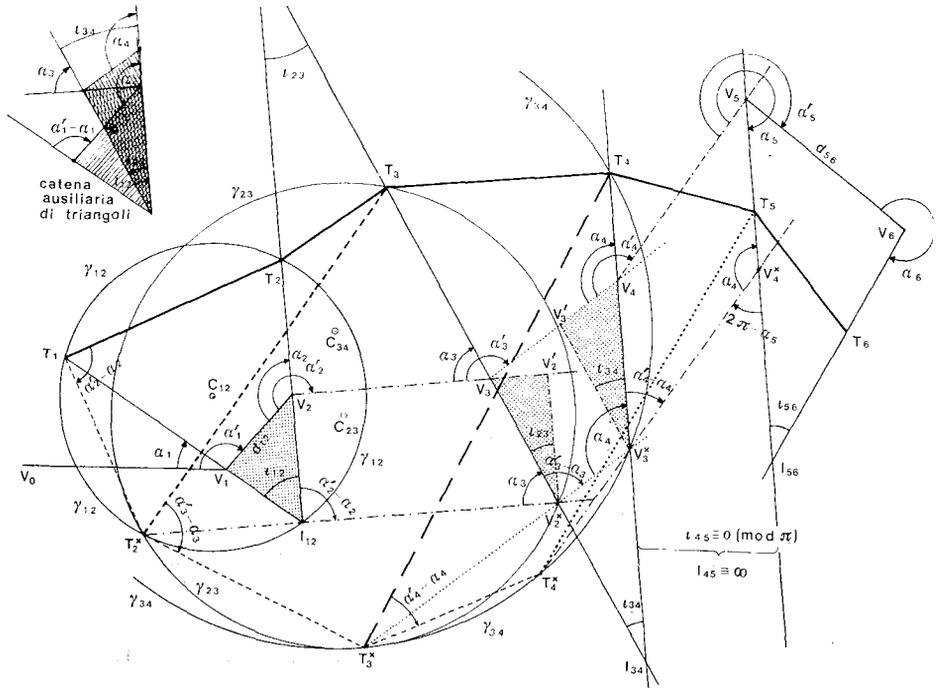


fig. 10

Per ragioni di non completa indeterminazione, una delle due coppie estreme $(V_1 T_1, V_2 T_2), (V_5 T_5, V_6 T_6)$ consta di due visuali convergenti: si supponga sia la 1^a, per la quale si dirà I_{12} il punto di convergenza delle rette $V_1 T_1, V_2 T_2$.

Si indicherà poi ulteriormente con:

$\iota_{i, i+1} \equiv \alpha_i' - \alpha_i + \alpha_{i+1} \equiv \sigma_{i+1} - \sigma_i \pmod{\pi}$
 uno degli angoli di convergenza (o parallelismo) della generica coppia di visuali $V_i T_i, V_{i+1} T_{i+1}$ da stazioni consecutive V_i, V_{i+1} ai trigonometrici omonimi T_i, T_{i+1} nel loro punto di convergenza (od improprio) $I_{i, i+1}$.

d_{12}, d_{56} siano invece le lunghezze note delle basi estreme $V_1 V_2, V_5 V_6$.

Come linea generale di condotta di un tal procedimento grafico, si potrà per ora anticipare che: 1) si cerca di ricondurre la questione relativa a due successioni di un qualsivoglia numero di punti a due terne di punti consecutivi giusto quanto già studiato e discusso nella citata nota (2) e per le quali v'è ricchezza di metodi grafici colà presentati; 2) si procede, di pari passo od in tempi diversi, alla ricerca e determinazione di successivi punti di COLLINS sulle circonferenze (se proprie e non degeneri) capaci degli angoli $\iota_{i, i+1} \circ \pi - \iota_{i, i+1}$ sui lati noti corrispondenti $T_i T_{i+1}$ ed alla conformazione di una catena di triangoli atti alla determinazione grafica di altre opportune basi intermedie $d_{i, i+1}^*$ analoghe alle estreme note d_{12}, d_{56} .

Convorrà ancora ricordare, qui, com'è d'altronde intuibile, che delle doppie o maggiori possibilità di sviluppo via via offerte dalle costruzioni grafiche si dovrà effettuare a momento debito, se si è in grado, una oculata scelta tramite quegli elementi, metrici o qualitativi, noti *a priori* od acquisibili nel corso del procedimento; in caso contrario, non si dovrà trascurare alcuna delle possibili strade aperte, battendole avvedutamente ed ordinatamente una alla volta al limite della verosimiglianza, tenendo presente, com'è noto, la disponibilità in generale di un qualche ulteriore elemento rilevato « sovrabbondante » da utilizzare quale riscontro nella fase discriminatoria tra le due teoriche configurazioni.

5.2 — Nelle premesse ipotesi, si inizierà a costruire e scegliere una delle circonferenze γ_{12} con archi capaci degli angoli $\iota_{12} \circ \pi - \iota_{12}$ sulla base $T_1 T_2$. Su una tale circonferenza (reale, propria, non degenera) giacerà l'intersezione I_{12} .

A parte, sarà da costruire un triangolo uguale a $V_1 V_2 I_{12}$ tramite la base nota $V_1 V_2 = d_{12}$ e gli angoli (interni od esterni) $\alpha_1' - \alpha_1, \alpha_2$ ai vertici V_1, V_2 ; ciò permette d'acquisire facilmente, per via grafica, appunto il lato $V_2 I_{12}$ da utilizzare quale base per un successivo triangolo adiacente al testè costruito.

Se si pensa, poi, d'aver traslato il lato $V_2 V_3$ (tuttora logicamente di lunghezza incognita ed orientamento pure sconosciuto rispetto ai T_1, T_2 , ecc.) parallelamente a sè stesso portando V_2 a coincidere con I_{12} , si constata che la retta parallela a $V_2 V_3$ condotta per il punto I_{12} intercetta: 1) sulla circonferenza γ_{12} un ulteriore punto T_2^* , così che il segmento $T_2 T_2^*$ è visibile da T_1 sotto l'angolo $\alpha_2' - \alpha_2$; 2) sulla retta della visuale $V_3 T_3$ un punto V_2^* a distanza conosciuta da V_3 .

Se per V_2^* , infatti, si conduce la parallela a $V_2 T_2$, ne viene individuata l'intersezione V_2' con la $V_2 V_3$. Evidentemente: $V_2' V_2^* = V_2 I_{12}$; di più: $V_2^* \hat{V}_2' V_3 \alpha_2' - \alpha_2 \pmod{\pi}$ e $V_2^* \hat{V}_3 V_2' \equiv \alpha_3 \pmod{\pi}$. Con tali noti elementi è allora possibile costruire un secondo triangolo adiacente al primo utilizzando proprio il comune lato lungo quanto $V_2 I_{12}$ e determinare in tal modo la lunghezza che compete a $V_2^* V_3$.

Ciò permette la seguente parziale conclusione relativa ad una riduzione del numero dei punti interessati.

Alla coppia di punti d'ubicazione nota T_1, T_2 potrà sostituirsi il punto T_2^* di facile nuova localizzazione ed alla coppia degli incogniti V_1, V_2 il punto V_2^* , dal quale si sarebbe misurato l'angolo noto $T_2^* \hat{V}_2^* V_3 \equiv T_2^* \hat{V}_2^* T_3 \equiv$

$\equiv \alpha_3 \pmod{\pi}$ tra le visuali a T_2^* e V_3 o T_3 (entrambi allineati con V_2^*), ed a nota distanza $V_2^*V_3$ dalla successiva stazione originaria V_3 .

In definitiva, quindi, le originarie poligonali $(T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$, $(V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6)$ potranno essere surrogate dalle $(T_2^*, T_3, T_4, T_5, T_6)$, $(V_2^*, V_3, V_4, V_5, V_6)$ del medesimo tipo delle rispettive precedenti, ma ridotte ciascuna di una unità.

Ha così termine un ciclo di riduzione e sostituzione per ciascuna delle due poligonali originarie e se ne potrà iniziare un secondo del tutto analogo a partire da T_2^*, T_3 .

Sul segmento $T_2^*T_3$ si costruisca dunque una delle circonferenze γ_{23} capaci degli angoli $\alpha_3 \circ \pi - \alpha_3$. Indi, sulla γ_{23} si individui uno dei punti T_3^* tali che $T_3T_3^*$ è visto da T_2^* sotto l'angolo $\alpha_3' - \alpha_3$; la $T_3^*V_2^*$ risulterebbe parallela alla V_3V_4 ed intercetterebbe la V_4T_4 in V_3^* a nota distanza da V_4 deducibile da un terzo triangolo, a seguito dei due della catena, con base pari a $V_2^*V_3$ ed angoli in V_2^* e V_3 uguali ad ι_{34} e $\pi - (\alpha_3' - \alpha_3)$.

Da V_3^* si vedrebbe $T_3^*T_4$ sotto l'angolo α_4 ; i tre punti V_3^*, V_4, T_4 sono allineati e di più è nota la base $V_3^*V_4$. Perciò V_3^* e T_3^* possono benissimo surrogare rispettivamente le coppie (V_2^*, V_3) e (T_2^*, T_3) .

Costruita, ancora, una delle circonferenze γ_{34} capaci di $\alpha_4 \circ \pi - \alpha_4$ su $T_3^*T_4$, su di essa si individuerà uno dei punti T_4^* per cui il segmento $T_4^*T_4$ è visto da T_3^* sotto l'angolo $\alpha_4' - \alpha_4$. La $T_4^*V_3^*$ sarebbe parallela alla V_4V_5 ed intersecherebbe la V_5T_5 , a sua volta parallela alla V_4T_4 per ipotesi iniziale, in un punto V_4^* tale che $V_4^*V_5 = V_3^*V_4$.

Il successivo triangolo della catena degenera questa volta, essendo $\iota_{45} \equiv 0 \pmod{\pi}$, nel lato di lunghezza $V_3^*V_4$.

Da V_4^* si vedrebbe quindi $T_4^*T_5$ sotto l'angolo α_5 , ed i tre punti V_4^*, V_5, T_5 sono allineati; è pure nota la base $V_4^*V_5$ perchè uguale a $V_3^*V_4$.

Tutto quindi è stato ricondotto: 1) alla terna di vertici T_4^*, T_5, T_6 di nota posizione; 2) alla corrispondente terna V_4^*, V_5, V_6 per cui risultan noti gli elementi angolari e lineari consecutivi seguenti:

$$\begin{aligned} T_4^* \hat{V}_4^* V_5 &\equiv \alpha_5 \pmod{\pi}, & V_4^* \hat{V}_5^* T_5 &\equiv 0 \pmod{\pi}, \\ V_4^* \hat{V}_5^* V_6 &\equiv \alpha_5' - \alpha_5 \pmod{\pi}, & V_5 \hat{V}_6^* T_6 &= \alpha_6, \\ V_4^* V_5 &\text{ e } V_5 V_6. \end{aligned}$$

Con questo il problema è da intendersi graficamente risolto una volta che si prosegua con uno dei metodi proposti al par. 7 della citata memoria (2).

E' ovvio che il procedimento esposto è benissimo applicabile anche al caso in cui una delle coppie di visuali estreme consti di rette parallele (n. 4.2 preced.).

La laboriosità della procedura grafica esemplificata giustifica appieno le considerazioni del n. 4.3 preced. tendenti a puntualizzare un metodo più sintetico generalizzante quello in precedenza acquisito per il caso trattato in 4.2.