

LA QUADRANGOLAZIONE

(nuovo metodo di rilevamento in luogo della triangolazione)

Dott. Ing. Antonio Dragonetti

RIASSUNTO. Per i lavori geodetici e topografici si propone di sostituire alle triangolazioni le quadrangolazioni, delle quali si misurano tutti i lati e tutti gli angoli. Si tratta di un nuovo metodo di misura, basato sulle poligonali e adatto ai moderni apparati elettronici ed elettro-ottici. Le coordinate dei vertici delle quadrangolazioni si calcolano nel piano della proiezione conforme di Gauss, eseguendo la compensazione con il metodo delle osservazioni indirette per variazioni di coordinate o con quello delle osservazioni condizionate.

1. - Considerazioni preliminari.

In precedenti mie memorie ho trattato il problema delle poligonali topografiche normali, quando non erano ancora entrati nell'uso corrente gli apparati elettronici ed elettro-ottici per la misura delle distanze e non si pensava di utilizzare le poligonali stesse a scopo geodetico. In tutti i libri di topografia si considerano i vari casi delle poligonali aperte, chiuse, libere, vincolate e con nodi, ma per la compensazione si danno generalmente metodi empirici, perchè la compensazione rigorosa con il metodo dei minimi quadrati richiede calcoli più lunghi e complessi. E' evidente che la compensazione rigorosa viene eseguita per le poligonali di un certo interesse in lavori di precisione e per alcune di particolare importanza al di fuori degli schemi tradizionali. Il problema delle poligonali particolari è stato da me sviluppato in varie memorie [1], [2], [3], [4], ma si tratta sempre di poligonali topografiche.

Il Prof. Solaini è stato fra i primi a prevedere, sin dal 1938 [5], l'utilità delle grandi poligonali di precisione in sostituzione delle triangolazioni secondarie. Allora i lati di queste poligonali erano dell'ordine del chilometro e venivano misurati indirettamente con il metodo ad angolo parallattico variabile e stadia orizzontale a scopi. Non è da molto che l'uso degli apparati elettronici ed elettro-ottici nella misura diretta delle distanze sia entrato nella normale pratica applicativa. Le poligonali sono diventate più lunghe ed il loro campo d'applicazione si è esteso a scapito delle triangolazioni. Con gli apparati elettronici si possono oggi misurare distanze sino a 50÷60 chilometri e non esiste più alcuna difficoltà per la misura dei lati, qualunque sia la loro lunghezza. L'unica remora al riguardo è dovuta soltanto alla variabilità delle condizioni atmosferiche ed alla questione della visibilità dei vertici nelle misure angolari. Ormai i metodi classici di rilievo dovranno essere riveduti alla luce dei nuovi metodi di misura delle distanze.

Le triangolazioni secondarie non sono più convenienti dal lato economico e possono essere senz'altro sostituite con poligonali di precisione, non più

di ordine topografico ma geodetico per il loro grande sviluppo. Ci si può anche domandare: le poligonali potranno in un prossimo futuro sostituire anche le grandi triangolazioni geodetiche? La risposta è affermativa: si tiene conto della rapidità delle misure sia lineari che angolari, della semplicità delle compensazioni, della possibilità di applicare metodi astronomico-geodetici per la compensazione delle grandi poligonali e della semplicità di impostazione delle varie soluzioni.

Sulla compensazione delle grandi triangolazioni geodetiche, in occasione del « 75° Anniversario della fondazione dell'Istituto Geografico Militare » hanno scritto pregevoli memorie i Proff. G. Boaga - A. Marussi - A. Marzani [6], ancora il Prof. A. Marussi [7] ed il Prof. G. A. Rune [8]. Tali studi sono stati fatti per l'unificazione delle reti geodetiche europee con propri metodi essenzialmente astronomico-geodetici, necessari per le grandi triangolazioni a forma di catene lungo i meridiani ed i paralleli. I metodi sostituiscono in sostanza due, quelli di Helmert e di Bowie, nei quali alle catene di triangoli fra due punti si sostituisce la geodetica che li unisce. Il « metodo di Helmert », che è stato applicato per la compensazione delle triangolazioni intorno al Baltico, si basa sul metodo delle osservazioni condizionate: opera direttamente sulle catene già compensate in base alle loro condizioni geometriche intrinseche, riguardando come quantità osservate e legate da equazioni poligonali e di Laplace le lunghezze delle geodetiche, gli azimut astronomici reciproci e le differenze astronomiche di longitudine. Il « metodo di Bowie », che è stato impiegato nella compensazione delle triangolazioni dell'America del Nord, considera dapprima la compensazione delle singole catene con le osservazioni condizionate e con l'impiego dell'equazione di Laplace; poi in un secondo tempo, ponendo come incognite le coordinate geografiche degli estremi delle catene e come quantità osservate in lunghezza ed azimut le relative geodetiche, compensa i poligoni risultanti con le osservazioni indirette o mediate. Fra i metodi di Helmert e di Bowie sta quello del Prof. F.N. Krassowskij, usato nella compensazione della grande triangolazione dell'U.R.S.S., nella quale il metodo di Helmert è fuso vantaggiosamente con la prima parte del metodo di Bowie. Anche se oggi con gli « elaboratori elettronici » non esistono più difficoltà per la compensazione delle grandi triangolazioni in modo rigoroso ed i metodi preciserenti sono superati, si può dire che le poligonali geodetiche rispondono meglio agli effetti delle misure e delle compensazioni.

In una mia recente memoria [9] ho dimostrato che per la compensazione delle poligonali geodetiche si possono applicare gli stessi metodi delle poligonali topografiche, se le coordinate dei vertici vengono calcolate nella « proiezione conforme di Gauss ». Dei vertici di tali poligonali quindi non è necessario determinare le coordinate geografiche, perchè la compensazione sarebbe alquanto difficile con risultati praticamente uguali. In una successiva memoria [10] ho completato il calcolo delle poligonali, sviluppando anche per quelle geodetiche il metodo più generale di compensazione per variazioni di coordinate e mantenendo immutato il calcolo delle coordinate dei vertici nella proiezione conforme di Gauss.

2. - Proposta di sostituzione delle triangolazioni con le quadrangolazioni.

Gli apparati elettronici ed elettro-ottici per la misura delle distanze hanno portato nel campo della topografia e della geodesia un progresso ed

una evoluzione, tali da rendere necessario un ripensamento sui metodi tradizionali basati essenzialmente sulla misura degli angoli con i teodoliti. Oggi non solo si possono misurare le distanze con grande precisione, ma si hanno anche apparati che misurano contemporaneamente distanze ed angoli. Tutto questo è di importanza notevole nella topografia e nella geodesia per la condotta dei lavori sul terreno e per i calcoli che si sono fatti fino a questo momento.

E' conveniente allo stato attuale delle cose continuare ad applicare i metodi tradizionali? La risposta a tale riguardo è negativa ed occorre quindi escogitare nuovi metodi di misura e di calcolo adatti ai nuovi strumenti. Non vi è dubbio che le poligonal, più duttili e più facili delle triangolazioni, sono state applicate vantaggiosamente con i nuovi apparati. Le poligonal, data la loro semplicità di esecuzione e di calcolo, hanno preso il sopravvento sulle triangolazioni più complesse particolarmente nel campo topografico.

Si propone quindi di sostituire alle « triangolazioni » le « quadrangolazioni ». Mentre nelle triangolazioni i vertici sono congiunti in modo da formare triangoli press'a poco equilateri in due schemi fondamentali a « rete » o a « catena », nelle quadrangolazioni i vertici sono congiunti con poligonal aperte che s'inseriscono in una poligonale esterna chiusa più grande. Grosso modo la poligonale esterna costituisce un quadrilatero e quelle interne formano tanti rettangoli, che possono eventualmente essere orientati secondo i meridiani o secondo i paralleli. Agli effetti delle compensazioni si ritengono « principali » i vertici della poligonale esterna chiusa e « secondari » quelli delle poligonal interne aperte.

Si tenga presente che lo schema di una quadrangolazione è più semplice di quello di una triangolazione. Inoltre, a parità di area coperta, il numero delle misure richiesto da una quadrangolazione è inferiore a quello relativo ad una triangolazione.

3. - *Confronto sulla precisione delle triangolazioni e delle poligonazioni.*

Per semplicità si vuol fare il confronto fra le triangolazioni e le poligonal di ordine tecnico, che sono le più applicate nei vari lavori d'ingegneria con distanze fra i vertici non superiori ad un paio di chilometri. Per non rendere complicati i calcoli si considerino due schemi facili di una catena e di una poligonale aperta. La catena abbia sette triangoli equilateri uguali, il vertice A_1 coincidente con l'origine degli assi cartesiani, il lato $A_1 A_2$ sull'asse delle ascisse ed i vertici A_1, \dots, A_7 posti su una linea che formi un angolo di 30° con l'asse delle ordinate orientato al nord (fig. 1). La poligonale aperta abbia cinque vertici, il vertice A_1 coincidente con l'origine degli assi cartesiani, i lati uguali fra loro ed a quelli della catena, i vertici A_1, \dots, A_5 allineati su una retta che formi pure un angolo di 30° con l'asse delle ordinate orientato al nord (fig. 2). Le misure eseguite sono per la catena il primo lato e 30 direzioni (si procede con il metodo a strati), per la poligonale 4 lati e 3 angoli. Gli elementi noti sono le coordinate del primo vertice e l'azimut del primo lato.

Se si indicano con l i lati, con α gli angoli e con θ gli azimut, si hanno le seguenti coordinate cartesiane dei vertici A_1, \dots, A_5 della catena (non si considerano i vertici A_6, \dots, A_7):

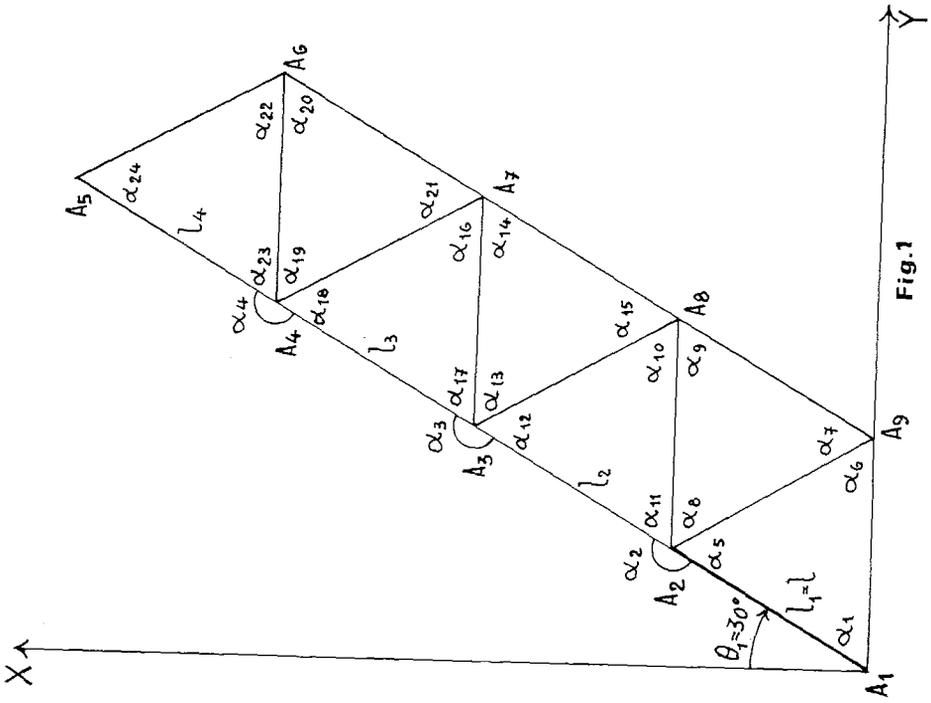
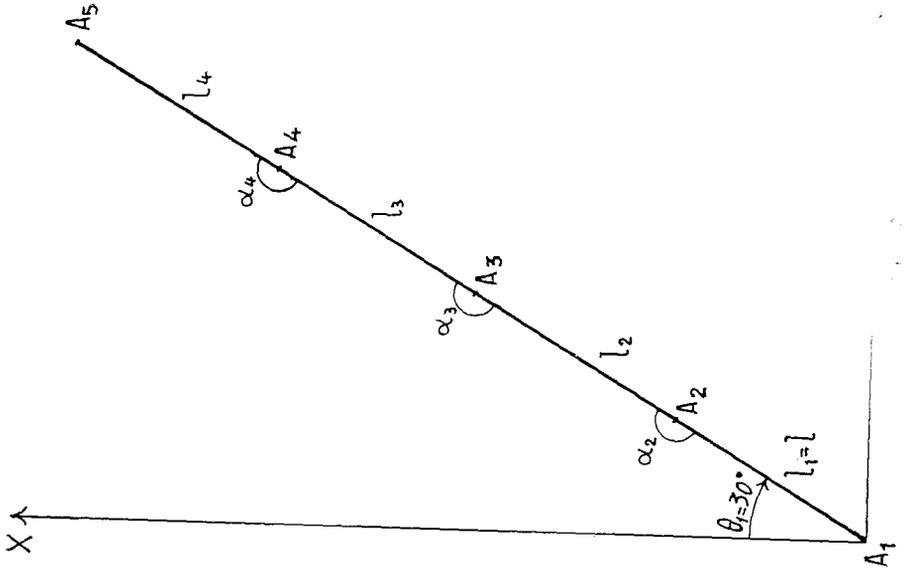


Fig.1

In modo analogo si calcolano le coordinate dei vertici A_1, \dots, A_5 della poligonale:

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} Y_1 = 0 \\ Y_2 = l_1 \operatorname{sen} \theta_1 = l \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} l \\ Y_3 = l_1 \operatorname{sen} \theta_1 + l_2 \operatorname{sen} \theta_2 = l_1 \operatorname{sen} \theta_1 + l_2 \operatorname{sen} (\theta_1 + 180^\circ + \alpha_2) = 2 l \operatorname{sen} 30^\circ = l \\ Y_4 = l_1 \operatorname{sen} \theta_1 + l_2 \operatorname{sen} \theta_2 + l_3 \operatorname{sen} \theta_3 = l_1 \operatorname{sen} \theta_1 + l_2 \operatorname{sen} (\theta_1 + 180^\circ + \alpha_2) + l_3 \operatorname{sen} (\theta_1 + 2 \cdot 180^\circ + \alpha_2 + \alpha_3) \\ \quad = 3 l \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{3}{2} l \\ Y_5 = l_1 \operatorname{sen} \theta_1 + l_2 \operatorname{sen} \theta_2 + l_3 \operatorname{sen} \theta_3 + l_4 \operatorname{sen} \theta_4 = l_1 \operatorname{sen} \theta_1 + l_2 \operatorname{sen} (\theta_1 + 180^\circ + \alpha_2) + \\ \quad + l_3 \operatorname{sen} (\theta_1 + 2 \cdot 180^\circ + \alpha_2 + \alpha_3) + l_4 \operatorname{sen} (\theta_1 + 3 \cdot 180^\circ + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = 4 l \operatorname{sen} 30^\circ = 2 l \end{array} \right.$$

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} X_1 = 0 \\ X_2 = l_1 \cos \theta_1 = l \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} l \\ X_3 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos (\theta_1 + 180^\circ + \alpha_2) = 2 l \cos 30^\circ = \sqrt{3} l \\ X_4 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos (\theta_1 + 180^\circ + \alpha_2) + l_3 \cos (\theta_1 + 2 \cdot 180^\circ + \alpha_2 + \alpha_3) = \\ \quad = 3 l \cos 30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2} l \\ X_5 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 + l_4 \cos \theta_4 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos (\theta_1 + 180^\circ + \alpha_2) + \\ \quad + l_3 \cos (\theta_1 + 2 \cdot 180^\circ + \alpha_2 + \alpha_3) + l_4 \cos (\theta_1 + 3 \cdot 180^\circ + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = 4 l \cos 30^\circ = 2\sqrt{3} l \end{array} \right.$$

Per determinare gli errori delle coordinate occorre applicare la « formula dell'errore medio di funzione di quantità osservate ». Si ammette che gli angoli siano stati tutti misurati con un errore quadratico medio $\eta_\alpha = \pm 2'' = \pm 10^{-5}$ (in radianti) e che la base l_1 della catena ed i lati della poligonale,

della lunghezza media di un chilometro, siano stati misurati con un errore quadratico medio $\eta_i = \pm 0,01$ m e quindi con un errore relativo $\frac{\eta_i}{l} = \pm 10^{-5}$.

Tenuto conto che nei casi considerati si ha $l\eta_\alpha \approx 1000 \cdot 10^{-5} \approx 0,01$ m $\approx \eta_i$, dalle formule (1) e (2) si ottiene per gli errori nelle coordinate dei vertici della catena:

$$\begin{aligned}
 \eta_{Y_2}^2 &= \text{sen}^2 \theta_1 \cdot \eta_{l_1}^2 = \frac{1}{4} \eta_1^2 \\
 \eta_{Y_3}^2 &= \eta_{Y_2}^2 + \left(\frac{l_2 \text{sen} \theta_2}{l_1}\right)^2 \eta_{l_1}^2 + (l_2 \cos \theta_2)^2 \eta_{\alpha_2}^2 + (l_2 \text{sen} \theta_2 \text{ctg} \alpha_1)^2 \eta_{\alpha_1}^2 + \dots + (-l_2 \text{sen} \theta_2 \text{ctg} \alpha_{12})^2 \eta_{\alpha_{12}}^2 = \\
 &= \frac{1}{4} \eta_1^2 + \frac{1}{4} \eta_1^2 + \frac{3}{4} l^2 \eta_\alpha^2 + 6 \frac{1}{12} l^2 \eta_\alpha^2 = \frac{2}{4} \eta_1^2 + \frac{5}{4} \eta_1^2 = \frac{7}{4} \eta_1^2 \\
 \eta_{Y_4}^2 &= \eta_{Y_3}^2 + \left(\frac{l_3 \text{sen} \theta_3}{l_1}\right)^2 \eta_{l_1}^2 + (l_3 \cos \theta_3)^2 \eta_{\alpha_2}^2 + (l_3 \cos \theta_3)^2 \eta_{\alpha_3}^2 + (l_3 \text{sen} \theta_3 \text{ctg} \alpha_1)^2 \eta_{\alpha_1}^2 + \dots + \\
 &+ (-l_3 \text{sen} \theta_3 \text{ctg} \alpha_{18})^2 \eta_{\alpha_{18}}^2 = \frac{7}{4} \eta_1^2 + \frac{1}{4} \eta_1^2 + 2 \frac{3}{4} l^2 \eta_\alpha^2 + 10 \frac{1}{12} l^2 \eta_\alpha^2 = \frac{8}{4} \eta_1^2 + \frac{9,33}{4} \eta_1^2 = \frac{17,33}{4} \eta_1^2 \\
 \eta_{Y_5}^2 &= \eta_{Y_4}^2 + \left(\frac{l_4 \text{sen} \theta_4}{l_1}\right)^2 \eta_{l_1}^2 + (l_4 \cos \theta_4)^2 \eta_{\alpha_2}^2 + \dots + (l_4 \cos \theta_4)^2 \eta_{\alpha_4}^2 + (l_4 \text{sen} \theta_4 \text{ctg} \alpha_1)^2 \eta_{\alpha_1}^2 + \dots + \\
 &+ (-l_4 \text{sen} \theta_4 \text{ctg} \alpha_{24})^2 \eta_{\alpha_{24}}^2 = \frac{17,33}{4} \eta_1^2 + \frac{1}{4} \eta_1^2 + 3 \frac{3}{4} l^2 \eta_\alpha^2 + 14 \frac{1}{12} l^2 \eta_\alpha^2 = \frac{18,33}{4} \eta_1^2 + \frac{13,67}{4} \eta_1^2 = \frac{32}{4} \eta_1^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \eta_{X_2}^2 &= \cos^2 \theta_1 \cdot \eta_{l_1}^2 = \frac{3}{4} \eta_1^2 \\
 \eta_{X_3}^2 &= \eta_{X_2}^2 + \left(\frac{l_2 \cos \theta_2}{l_1}\right)^2 \eta_{l_1}^2 + (-l_2 \text{sen} \theta_2)^2 \eta_{\alpha_2}^2 + (l_2 \cos \theta_2 \text{ctg} \alpha_1)^2 \eta_{\alpha_1}^2 + \dots + (-l_2 \cos \theta_2 \text{ctg} \alpha_{12})^2 \eta_{\alpha_{12}}^2 = \\
 &= \frac{3}{4} \eta_1^2 + \frac{3}{4} \eta_1^2 + 7 \frac{1}{4} l^2 \eta_\alpha^2 = \frac{6}{4} \eta_1^2 + \frac{7}{4} \eta_1^2 = \frac{13}{4} \eta_1^2 \\
 \eta_{X_4}^2 &= \eta_{X_3}^2 + \left(\frac{l_3 \cos \theta_3}{l_1}\right)^2 \eta_{l_1}^2 + (-l_3 \text{sen} \theta_3)^2 \eta_{\alpha_2}^2 + (-l_3 \text{sen} \theta_3)^2 \eta_{\alpha_3}^2 + (l_3 \cos \theta_3 \text{ctg} \alpha_1)^2 \eta_{\alpha_1}^2 + \dots + \\
 &+ (-l_3 \cos \theta_3 \text{ctg} \alpha_{18})^2 \eta_{\alpha_{18}}^2 = \frac{13}{4} \eta_1^2 + \frac{3}{4} \eta_1^2 + 12 \frac{1}{4} l^2 \eta_\alpha^2 = \frac{16}{4} \eta_1^2 + \frac{12}{4} \eta_1^2 = \frac{28}{4} \eta_1^2 \\
 \eta_{X_5}^2 &= \eta_{X_4}^2 + \left(\frac{l_4 \cos \theta_4}{l_1}\right)^2 \eta_{l_1}^2 + (-l_4 \text{sen} \theta_4)^2 \eta_{\alpha_2}^2 + \dots + (-l_4 \text{sen} \theta_4)^2 \eta_{\alpha_4}^2 + (l_4 \cos \theta_4 \text{ctg} \alpha_1)^2 \eta_{\alpha_1}^2 + \dots + \\
 &+ (-l_4 \cos \theta_4 \text{ctg} \alpha_{24})^2 \eta_{\alpha_{24}}^2 = \frac{28}{4} \eta_1^2 + \frac{3}{4} \eta_1^2 + 17 \frac{1}{4} l^2 \eta_\alpha^2 = \frac{31}{4} \eta_1^2 + \frac{17}{4} \eta_1^2 = \frac{48}{4} \eta_1^2
 \end{aligned}$$

In modo analogo dalle formule (3) e (4) si ottiene per gli errori nelle coordinate dei vertici della poligonale:

$$(7) \left\{ \begin{aligned} \eta_{y_2}^2 &= \text{sen}^2 \theta_1 \cdot \eta_{l_1}^2 = \frac{1}{4} \eta_l^2 \\ \eta_{y_3}^2 &= \eta_{y_2}^2 + \text{sen}^2 \theta_2 \cdot \eta_{l_2}^2 + (l_2 \cos \theta_2)^2 \eta_{\alpha_2}^2 = \frac{1}{4} \eta_l^2 + \frac{1}{4} \eta_l^2 + \frac{3}{4} l^2 \eta_{\alpha}^2 = \frac{2}{4} \eta_l^2 + \frac{3}{4} \eta_l^2 = \frac{5}{4} \eta_l^2 \\ \eta_{y_4}^2 &= \eta_{y_3}^2 + \text{sen}^2 \theta_3 \cdot \eta_{l_3}^2 + (l_3 \cos \theta_3)^2 \eta_{\alpha_2}^2 + (l_3 \cos \theta_3)^2 \eta_{\alpha_3}^2 = \frac{5}{4} \eta_l^2 + \frac{1}{4} \eta_l^2 + 2 \frac{3}{4} l^2 \eta_{\alpha}^2 = \frac{6}{4} \eta_l^2 + \frac{6}{4} \eta_l^2 = \frac{12}{4} \eta_l^2 \\ \eta_{y_5}^2 &= \eta_{y_4}^2 + \text{sen}^2 \theta_4 \cdot \eta_{l_4}^2 + (l_4 \cos \theta_4)^2 \eta_{\alpha_2}^2 + \dots + (l_4 \cos \theta_4)^2 \eta_{\alpha_4}^2 = \frac{12}{4} \eta_l^2 + \frac{1}{4} \eta_l^2 + 3 \frac{3}{4} l^2 \eta_{\alpha}^2 = \frac{13}{4} \eta_l^2 + \frac{9}{4} \eta_l^2 = \frac{22}{4} \eta_l^2 \end{aligned} \right.$$

$$(8) \left\{ \begin{aligned} \eta_{x_2}^2 &= \cos^2 \theta_1 \cdot \eta_{l_1}^2 = \frac{3}{4} \eta_l^2 \\ \eta_{x_3}^2 &= \eta_{x_2}^2 + \cos^2 \theta_2 \cdot \eta_{l_2}^2 + (-l_2 \text{sen} \theta_2)^2 \eta_{\alpha_2}^2 = \frac{3}{4} \eta_l^2 + \frac{3}{4} \eta_l^2 + \frac{1}{4} l^2 \eta_{\alpha}^2 = \frac{6}{4} \eta_l^2 + \frac{1}{4} \eta_l^2 = \frac{7}{4} \eta_l^2 \\ \eta_{x_4}^2 &= \eta_{x_3}^2 + \cos^2 \theta_3 \cdot \eta_{l_3}^2 + (-l_3 \text{sen} \theta_3)^2 \eta_{\alpha_2}^2 + (-l_3 \text{sen} \theta_3)^2 \eta_{\alpha_3}^2 = \frac{7}{4} \eta_l^2 + \frac{3}{4} \eta_l^2 + 2 \frac{1}{4} l^2 \eta_{\alpha}^2 = \frac{10}{4} \eta_l^2 + \frac{2}{4} \eta_l^2 = \frac{12}{4} \eta_l^2 \\ \eta_{x_5}^2 &= \eta_{x_4}^2 + \cos^2 \theta_4 \cdot \eta_{l_4}^2 + (-l_4 \text{sen} \theta_4)^2 \eta_{\alpha_2}^2 + \dots + (-l_4 \text{sen} \theta_4)^2 \eta_{\alpha_4}^2 = \frac{12}{4} \eta_l^2 + \frac{3}{4} \eta_l^2 + 3 \frac{1}{4} l^2 \eta_{\alpha}^2 = \frac{15}{4} \eta_l^2 + \frac{3}{4} \eta_l^2 = \frac{18}{4} \eta_l^2 \end{aligned} \right.$$

Dal confronto delle (5) con le (7) e delle (6) con le (8) si ricavano i seguenti rapporti fra gli errori nelle coordinate della catena e della poligonale:

$$(9) \frac{\eta_{y_2}}{\eta_{y_2} \pm 0,50 \eta_l} = 1,00 \quad \frac{\eta_{y_3}}{\eta_{y_3} \pm 1,12 \eta_l} = 1,18 \quad \frac{\eta_{y_4}}{\eta_{y_4} \pm 1,73 \eta_l} = 1,20 \quad \frac{\eta_{y_5}}{\eta_{y_5} \pm 2,83 \eta_l} = 1,20$$

$$(10) \frac{\eta_{x_2}}{\eta_{x_2} \pm 0,87 \eta_l} = 1,00 \quad \frac{\eta_{x_3}}{\eta_{x_3} \pm 1,32 \eta_l} = 1,36 \quad \frac{\eta_{x_4}}{\eta_{x_4} \pm 1,73 \eta_l} = 1,53 \quad \frac{\eta_{x_5}}{\eta_{x_5} \pm 2,12 \eta_l} = 1,63$$

Dalle (9) e (10) si nota che gli errori dei vertici della catena sono di poco superiori a quelli dei vertici della poligonale lungo l'asse Y, mentre tendono a diventare il doppio lungo l'asse X. Con buona approssimazione si possono estendere i risultati ottenuti e si può dire quindi che, a parità di errori nelle misure, la precisione di una quadrangolazione è superiore a quella di una triangolazione e può raggiungere anche il valore doppio.

4. - Confronto sui tempi d'esecuzione delle triangolazioni e delle poligonazioni.

Per meglio evidenziare i vantaggi delle quadrangolazioni rispetto alle triangolazioni si fa un confronto sui tempi d'esecuzione delle triangolazioni e delle poligonazioni, considerando ancora gli esempi delle figure 1 e 2. L'a-

nalisi si riferisce alle varie componenti dei lavori sul terreno ed a tavolino, considerate in modo generale senza la pretesa di voler trattare i vari casi particolari che possono presentarsi nella pratica applicativa.

Per quanto riguarda lo studio preliminare a tavolino non v'è praticamente differenza sui tempi richiesti dalle triangolazioni e dalle poligonazioni, anche se vi possa essere un lieve vantaggio delle seconde rispetto alle prime. Pure nei calcoli di compensazione, che vengono eseguiti per lo più su programma con gli elaboratori elettronici, si ha sostanzialmente la stessa durata fra quelli delle triangolazioni e quelli delle poligonazioni. Per la scelta dei vertici invece la differenza è notevole: mentre nelle triangolazioni da ogni stazione si devono in generale vedere più vertici con tutte le difficoltà inerenti alla loro posizione più conveniente, nelle poligonali da ogni stazione si devono vedere soltanto due vertici che possono essere posti lungo le strade o facili direttrici. Nelle poligonazioni poi le misure son opìu rapide di quelle nelle triangolazioni, non soltanto perchè gli angoli sono in numero minore, ma perchè è eliminato il perditempo nella ricerca dei vertici e le distanze si misurano più in fretta degli angoli.

Per l'analisi dei tempi d'esecuzione delle poligonazioni e delle triangolazioni si considera una squadra di operatori formata da quattro persone. Si prendono in esame quattro casi, di cui due per le poligonali e due per le triangolazioni.

a) Poligonali eseguite con apparati elettronici che misurano distanze ed angoli a registrazione automatica.

Misura delle distanze e degli angoli per stazione: circa 30 minuti, con due misure per ogni distanza ed alcune reiterazioni per gli angoli.

Trasferimenti ed eventuali pause per stazione: circa 20 minuti.

Occorre quindi all'incirca mezza giornata per il rilievo della poligonale di cinque vertici.

b) Poligonali eseguite con apparati elettronici e teodoliti separati.

Misura delle distanze per stazione: circa 10 minuti, con due misure per ogni distanza.

Misure angolari per stazione: circa 30 minuti, con alcune reiterazioni.

Trasferimenti ed eventuali pause per stazione: circa 30 minuti.

Occorre quindi all'incirca una giornata per il rilievo della poligonale di cinque vertici.

c) Triangolazioni eseguite con teodoliti ed apparati elettronici per la misura della base.

Ricognizione e segnalazione: un giorno.

Misura della base: circa 20 minuti, con più misure.

Misure angolari per ogni stazione: circa un'ora, con alcune reiterazioni.

Trasferimenti e pause per stazione: circa 30 minuti.

Occorrono quindi all'incirca tre giorni per il rilievo della catena di nove vertici.

d) Triangolazioni eseguite con teodoliti e nastro d'acciaio per la misura della base.

Ricognizione e segnalazione: un giorno.

Misura della base: un giorno, con più misure.

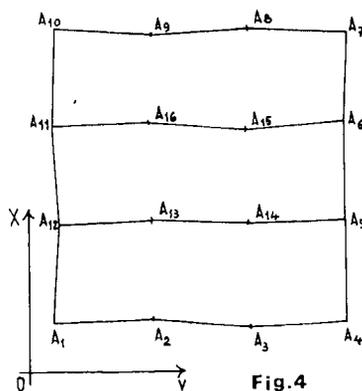
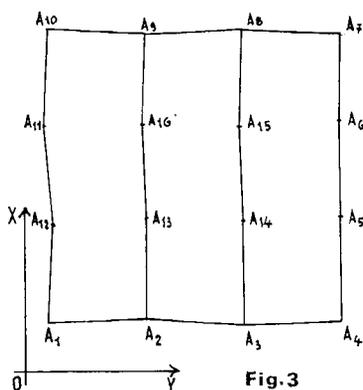
Misure angolari per ogni stazione: circa un'ora, con alcune reiterazioni.
 Trasferimenti e pause per stazione: circa 30 minuti.

Occorrono quindi all'incirca quattro giorni per il rilievo della catena di nove vertici.

Tenendo conto delle analisi precedenti, si può dire in generale che il tempo d'esecuzione delle quadrangolazioni è circa un terzo in media di quello delle triangolazioni.

5. - Quadrangolazioni geodetiche.

Le quadrangolazioni geodetiche possono avere estensioni notevoli, avendo i lati della lunghezza di circa 30 ÷ 50 km. E' bene che le quadrangolazioni siano progettate con lati disposti secondo i meridiani ed i paralleli, come si vede nelle figure 3 e 4, che per semplicità contengono soltanto 16 vertici e 3 quadrangoli. Evidentemente, anche se le quadrangolazioni fossero più



estese di quelle considerate, i concetti fondamentali e le conclusioni finali non cambierebbero.

Come nelle triangolazioni geodetiche gli angoli, press'a poco retti o piatti, vengono misurati con la precisione di $\sphericalangle 0,5'' = \sphericalangle 2,5 \cdot 10^{-6}$ (in radianti).

Anche le distanze vanno misurate con la massima precisione, dell'ordine di $2 \cdot 10^{-6}$ come precisione relativa che per una distanza di 50 km corrisponde ad una precisione assoluta di circa 0,1 m.

Per quanto riguarda la compensazione delle quadrangolazioni geodetiche si procederà con il metodo rigoroso delle osservazioni indirette per variazioni di coordinate nella proiezione conforme di Gauss [10]. Occorre quindi calcolare i valori approssimati delle coordinate gaussiane dei vertici mediante una compensazione empirica preliminare. Considerando le figure 3 e 4, si può ritenere una quadrangolazione come formata da una poligonale esterna chiusa $A_1 - A_2 - \dots - A_{11} - A_{12} - A_1$ e dalle poligonali interne aperte vincolate $A_2 -$

$A_{13}-A_{16}-A_9$ e $A_3-A_{14}-A_{15}-A_8$ oppure $A_5-A_{14}-A_{13}-A_{12}$ e $A_6-A_{15}-A_{16}-A_{11}$. Per passare dagli elementi misurati sull'ellissoide a quelli piani della proiezione gaussiana, si dà una prima correzione grossolana agli angoli ed ai lati con le coordinate ricavate da una rappresentazione grafica della quadrangolazione; poi, mediante le note compensazioni empiriche delle varie poligonali, si calcolano le coordinate gaussiane approssimate dei vertici. Per la scelta degli assi coordinati generalmente si conoscono le coordinate gaussiane di alcuni vertici oppure quelle geografiche, dalle quali si passa poi a quelle gaussiane.

Dopo la compensazione ed il calcolo definitivo delle coordinate gaussiane della quadrangolazione, sarà possibile determinare facilmente le coordinate geografiche e tutti quegli elementi sull'ellissoide, che si desiderano ottenere per eseguire eventualmente compensazioni con « metodi astronomico-geodetici ». Tali compensazioni vengono facilitate dalla quadrangolazione, i cui lati sono disposti lungo i meridiani ed i paralleli.

6. - *Quadrangolazioni topografiche.*

Le quadrangolazioni topografiche hanno i lati della lunghezza di qualche chilometro e possono estendersi fino a qualche decina di chilometri. Gli schemi sono praticamente gli stessi delle figure 3 e 4. Gli angoli vengono di solito misurati con una precisione di $\sphericalangle 2'' = \sphericalangle 10^{-5}$ (in radianti) e le distanze con una precisione relativa di $\sphericalangle 10^{-5}$, che per una distanza di un chilometro corrisponde ad un errore assoluto di $\sphericalangle 0,01$ m.

Per la compensazione, trattandosi di quadrangolazioni non molto estese, si procederà di preferenza con il metodo rigoroso delle osservazioni indirette per variazioni di coordinate nella proiezione conforme di Gauss [10], ma si potrà anche applicare quello delle osservazioni condizionate sempre nella proiezione conforme di Gauss [9]. In quest'ultimo caso si farà dapprima la compensazione della poligonale esterna chiusa e successivamente quella delle poligonali interne aperte vincolate. Per passare dagli elementi misurati sul terreno a quelli piani della proiezione gaussiana, occorre conoscere le coordinate gaussiane dei vertici delle quadrangolazioni che si determineranno in modo approssimato con le note compensazioni empiriche.

Se si vogliono avere altri vertici di dettaglio con distanze di alcune centinaia di metri, basta ripetere lo stesso schema entro i quadrangoli della quadrangolazione principale. Naturalmente, nella maggior parte dei casi, gli elementi misurati sul terreno sono uguali a quelli della proiezione conforme di Gauss.

7. - *Inserimento delle quadrangolazioni nelle vecchie triangolazioni.*

Le quadrangolazioni possono utilmente essere inserite nelle vecchie triangolazioni, perchè coprono il terreno interno fra i vertici trigonometrici in modo uniforme. A questo proposito occorre fare una considerazione preliminare circa la precisione dei vertici trigonometrici, sui quali si appoggiano quelli della quadrangolazione.

Certamente la quadrangolazione ha una precisione superiore alle poligonal tradizionali e quindi può darsi che la precisione dei vecchi vertici trigonometrici non sia sufficiente. Il Topografo Principale Renato Antongiovanni dell'Istituto Geografico Militare di Firenze in una sua recente memoria [11] ha fatto uno studio dettagliato al riguardo ed è pervenuto alle seguenti conclusioni: gli errori quadratici medi dei vertici di IV ordine e di vecchia determinazione dell'I.G.M. possono raggiungere il valore di ± 1 m ed anche più; i vertici trigonometrici di I, II e III ordine di vecchia determinazione dell'I.G.M. e di IV ordine di nuova determinazione hanno un errore quadratico medio contenuto entro i limiti di $\pm 0,50$ m, salvo eccezioni; i vertici di nuova determinazione di II e III ordine dell'I.G.M. hanno un errore quadratico medio non superiore a $\pm 0,30$ m, salvo rare eccezioni; i vertici trigonometrici delle reti catastali, che si appoggiano a quelli di I, II e III ordine dell'I.G.M., hanno errori quadratici medi compresi fra $\pm 0,30$ e $\pm 0,50$ m.

Ciò premesso, si danno alcuni esempi di inserimento delle quadrangolazioni nelle vecchie triangolazioni. Nella figura 5 si ha una triangolazione

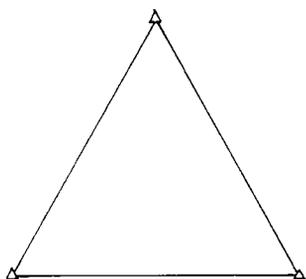


Fig. 5

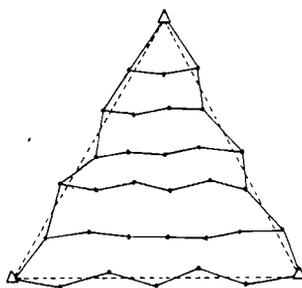


Fig. 6

di tre vertici, che viene completata con una quadrangolazione nella figura 6. Nella figura 7 si ha una catena di quattro vertici, che nella figura 8 viene

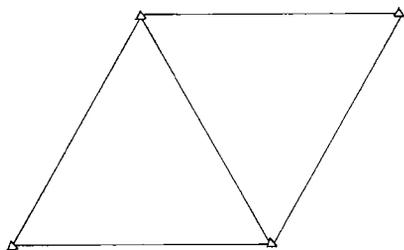


Fig. 7

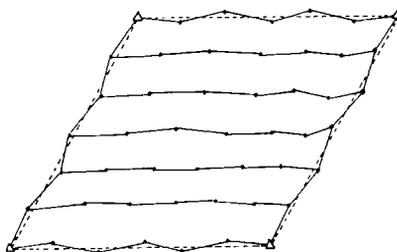


Fig. 8

trasformata in una quadrangolazione togliendo un lato. Infine nella figura 9 si ha una triangolazione a rete di sette vertici, che viene ridotta nella figura 10

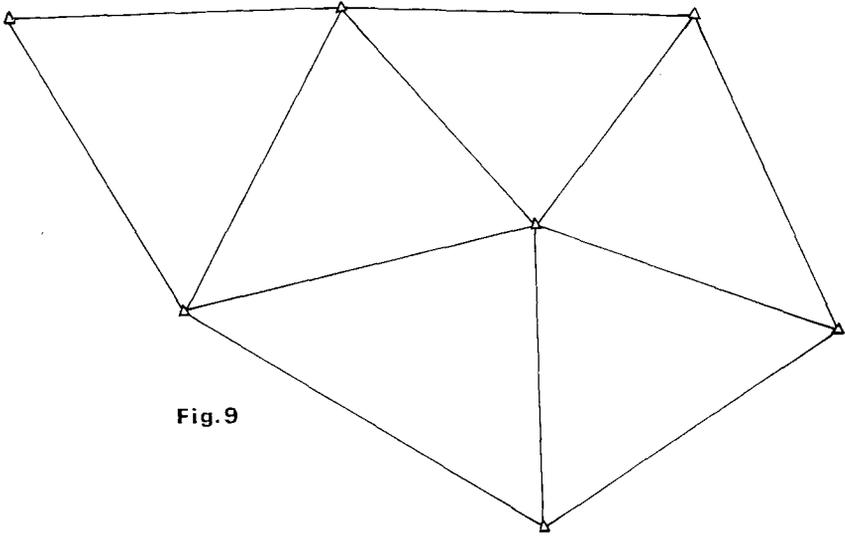


Fig. 9

a tre quadrangolazioni eliminando tre lati.

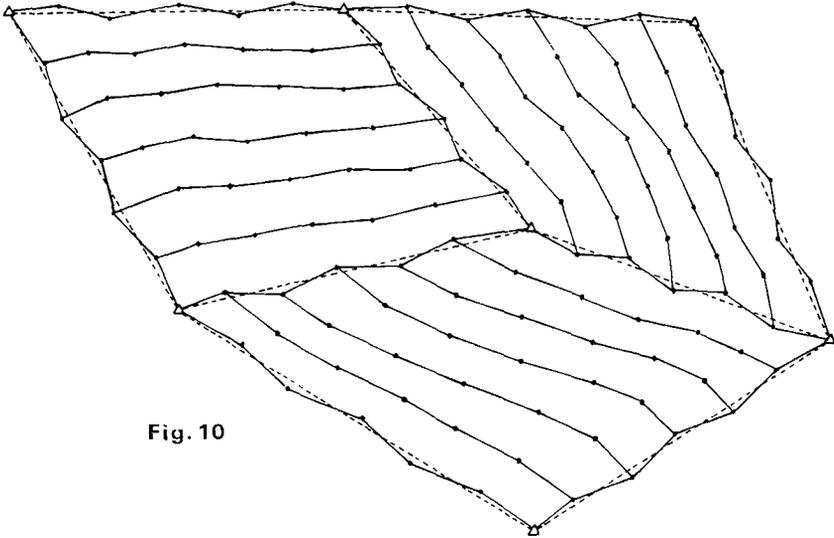


Fig. 10

Naturalmente i casi delle vecchie triangolazioni, che possono presentarsi nelle varie applicazioni, saranno senz'altro diversi da quelli citati, ma l'inserimento delle quadrangolazioni non presenta alcuna difficoltà.

Ringrazio il Prof. Mariano Cunietti per i preziosi consigli avuti nella stesura della presente memoria.