

# ALCUNE ESPERIENZE DI LIVELLAZIONE RECIPROCA CON LIVELLI ACCOPPIATI

*G. De Sanctis R. - G. Folloni - A. Gubellini\**

1. Da qualche tempo è entrato nella pratica corrente un tipo particolare di livellazione, che può trovare utile applicazione laddove divenga impossibile, o comunque non opportuno, ricorrere ai metodi tradizionali.

Tale metodo di livellazione, che potremmo definire come livellazione reciproca attuata mediante coppie di livelli, può in ultima analisi essere considerata come una forma di livellazione trigonometrica eseguita con strumenti ed accorgimenti particolari.

Nella sua forma attualmente in uso la strumentazione è costituita da coppie di autolivelli montati su un unico treppiede a mezzo di una traversa sufficientemente rigida; una volta in stazione i due livelli sono liberi di ruotare in ogni direzione intorno ai rispettivi assi generali.

Alla normale lamina a facce piano-parallele viene sostituito un particolare dispositivo a cuneo che consente di inclinare la linea di mira e di leggere il valore corrispondente dell'inclinazione.

E' da notare che il cuneo provoca una rifrazione dei raggi luminosi emergenti dall'obiettivo e quindi non varia l'assetto dell'asse di collimazione dello strumento.

Se si portano i due livelli adattati all'infinito in posizione di collimazione reciproca, agendo opportunamente sui dispositivi a cuneo, è evidente che le rispettive linee di mira risulteranno fra loro parallele e quindi inclinate rispetto all'orizzontale della medesima quantità; tale inclinazione si manterrà invariata, a meno della sensibilità del sistema pendolare, e risulterà simmetrica rispetto all'orizzontale anche quando si facciano ruotare i livelli intorno ai rispettivi assi per passare alla collimazione a mire lontane.

E' chiaro quindi che, eseguendo mediante i due livelli le letture ad una stadia, la media di queste fornisce la lettura che si farebbe con un'unica linea di mira orizzontale.

Seguendo tale schema tuttavia le letture alla stadia dovrebbero essere fatte a stima e quindi in molti casi con precisione insufficiente; l'impiego dei dispositivi a cuneo rende possibili letture a coincidenza consentendo di inclinare opportunamente le linee di mira dei due strumenti e di determinare il valore delle inclinazioni imposte. Appare quindi chiaro che non è necessario l'impiego di una consueta stadia graduata, con le evidenti limitazioni di lunghezza di battuta che ne conseguono; questa può essere vantaggiosamente sostituita da due segnali studiati in maniera tale da consentire buone collimazioni anche a notevole distanza, posti in stazione su di un supporto verticale di lunghezza nota.

La distanza dei due segnali può essere scelta fra una serie di valori opportuni in relazione alla lunghezza della linea di collimazione e all'escur-

---

\* Istituto di Topografia, Geodesia e Geofisica Mineraria dell'Università di Bologna.

sione massima dei cunei, che nella strumentazione in esame è pari complessivamente a 412".

In tale modo quindi in luogo di letture alla stadia si eseguono collimazioni ai segnali e letture delle corrispondenti inclinazioni delle linee di mira.

Indichiamo con  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  tali inclinazioni quando i due livelli sono posti in collimazione reciproca, con  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  quelle corrispondenti alle collimazioni al segnale superiore e con  $i_1$  e  $i_2$  quelle relative al segnale inferiore.

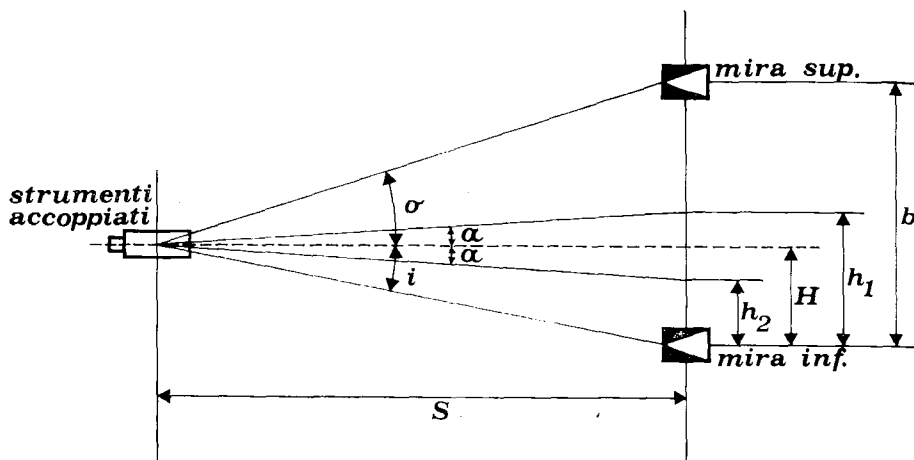


Fig. 1

Con riferimento alla fig. 1 si ha evidentemente:

$$h_1 = b \frac{\operatorname{tg} i_1 + \operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} i_1 + \operatorname{tg} \sigma_1}; \quad h_2 = b \frac{\operatorname{tg} i_2 + \operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} i_2 + \operatorname{tg} \sigma_2}$$

Qualora le inclinazioni delle varie linee di mira siano piccole, nelle espressioni precedenti si potranno sostituire gli argomenti al valore delle tangenti. A tale proposito notiamo che nella strumentazione in esame l'angolo massimo di inclinazione della linea di mira consentito dal dispositivo a cuneo è di 206" e che per tale valore la differenza fra tangente ed argomento risulta pari a  $0,3 \cdot 10^{-9}$  e quindi assolutamente trascurabile. Negli angoli  $i + \alpha$  e  $i + \sigma$  non compare più alcun riferimento all'orizzontale: essi risultano semplicemente dalla differenza di due letture fatte al micrometro.

Ricavati quindi i valori di  $h_1$  e  $h_2$ , si ottiene immediatamente come loro media l'altezza  $H$  dell'orizzontale per i due livelli rispetto al segnale inferiore.

Naturalmente, qualora interessi la differenza di livello fra due caposaldo l'uno A posto in prossimità del punto di stazione e l'altro B vicino alle mire, occorrerà determinare la differenza di livello fra il primo e il centro strumentale e fra il secondo e la mira inferiore. Il dislivello fra caposaldo A e centro strumentale può essere determinato per mezzo della stessa coppia di livelli adoperando come mire due tratti opportunamente scelti di un normale stadia di invar posta in stazione sul caposaldo stesso; quello fra caposaldo B e segnale inferiore deve invece essere ottenuto mediante un normale livellazione geometrica.

Sommando algebricamente questi due termini al valore di  $H$  precedentemente determinato si otterrebbe la differenza di livello fra i punti A e

qualora le distanze in gioco fossero tali da rendere trascurabile l'influenza della curvatura della superficie di riferimento e della rifrazione.

Poichè evidentemente questo non si verifica nei casi di utile applicazione del metodo, occorrerà effettuare una livellazione reciproca e contemporanea da una seconda stazione, utilizzando una apparecchiatura e modalità operative identiche a quelle descritte.

Così procedendo, la media dei valori rilevati dalle due stazioni dà la differenza di quota fra i punti esente dall'influenza, supposta simmetrica, della curvatura della superficie di riferimento e della rifrazione, a condizione che le misure siano rigorosamente simultanee, che la differenza di quota fra i punti sia piccola e che le distanze fra strumento e mira e fra strumento e caposaldo siano rispettivamente uguali per entrambe le stazioni.

2. Con le ipotesi ammesse e a meno della sensibilità del sistema compensatore, l'unica causa di errore nella determinazione delle differenze di quota deriva dalla precisione con cui si ottengono le inclinazioni delle varie linee di mira sia in collimazione reciproca che in collimazione lontana: risulta infatti evidentemente trascurabile l'influenza degli errori con cui si determinano le differenze di quota fra caposaldo e centro strumentale da una parte e fra caposaldo e segnale inferiore dall'altra.

Appare chiaro che la precisione con cui possono essere determinate le varie inclinazioni risulta diversa in collimazione reciproca ed in collimazione alle mire lontane: in quest'ultimo caso intervengono infatti in maniera determinante le perturbazioni dovute all'ambiente.

Da numerosissime prove eseguite si è constatato che per la strumentazione in esame l'errore con cui si determina l'inclinazione  $\alpha$  si mantiene sensibilmente costante e pari a circa  $\pm 0",3$ ; nella collimazione alle mire invece si è notato, come è naturale, che le condizioni atmosferiche influiscono fortemente sia sulla precisione delle misure che sulla distanza massima di collimazione.

In condizioni atmosferiche buone d'altra parte l'errore di collimazione e lettura non presenta sensibili variazioni in relazione alle diverse distanze di collimazione, che con il tipo di mire usate possono arrivare fino ad un limite massimo di  $2 \div 3$  km.

Mediamente i risultati ottenuti portano a considerare l'errore con cui si possono determinare le inclinazioni  $\sigma$  ed  $i$  alle mire lontane pari a circa il doppio di quello che si ha in collimazione reciproca.

Per rendere quindi le varie misure, relative ad una singola determinazione della differenza di quota, omogenee tra di loro agli effetti del peso, sembra opportuno eseguire quattro collimazioni e letture alle mire lontane in corrispondenza ad ogni operazione di collimazione reciproca. In tal modo, sulla base delle prove sperimentali, appare lecito assumere come errore medio quadratico delle quantità  $\alpha$ ,  $\sigma$ ,  $i$  il valore suddetto di  $\pm 0",3$ , risultando  $\sigma$  ed  $i$  ognuna dalla media di quattro determinazioni.

Ciò premesso, una valutazione della precisione teorica del metodo può essere fatta sulla base dell'espressione già vista:

$$h = b \frac{i + \alpha}{i + \sigma}$$

Ponendo per semplicità:

$$\frac{i + \alpha}{i + \sigma} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

dall'espressione precedente si ha:

$$\mu_h^2 = \frac{b^2}{\omega_2^2} \mu_{\omega_1}^2 + \frac{b^2 \omega_1^2}{\omega_2^4} \mu_{\omega_2}^2 + \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \mu_b^2$$

Notando che il rapporto  $\frac{b}{\omega_2}$  equivale nei prefissati limiti di approssimazione alla distanza S fra punto di stazione e segnali ed esprimendo gli errori sugli angoli in secondi, si ha:

$$\mu_h^2 = S^2 \mu_{\omega_1}^2 (\text{arc } 1'')^2 + S^2 \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \mu_{\omega_2}^2 (\text{arc } 1'')^2 + \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \mu_b^2$$

L'errore con cui può essere determinata la distanza b fra i due segnali può agevolmente essere contenuto entro 0,1 mm, per cui l'ultimo termine della espressione scritta risulta assolutamente trascurabile rispetto ai primi due. non appena la distanza raggiunge dei valori dell'ordine di qualche centinaio di metri, e tanto più quanto è maggiore la distanza stessa. E' da notare inoltre che nei casi di normale applicazione del metodo è possibile ed opportuno fare in modo che le due linee di mira corrispondenti alle collimazioni reciproche siano comprese nell'angolo  $\omega_2$ ; è evidente che in tal caso il rapporto  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$  risulta inferiore all'unità. Assumendo per tale rapporto un valore unitario, che normalmente ne costituisce il limite superiore, e ponendo per le considerazioni fatte:

$$\mu_{\omega_1}^2 = \mu_{\omega_2}^2 = \mu^2$$

si ottiene:

$$\mu_h^2 = 2 S^2 \mu^2 (\text{arc } 1'')^2$$

L'errore medio della quantità H, media dei valori  $h_1$  e  $h_2$ , sarà quindi:

$$\mu_H^2 = S^2 \mu^2 (\text{arc } 1'')^2$$

e quello infine della differenza di quota ottenuta come media delle due determinazioni reciproche e contemporanee sarà:

$$\mu_{\Delta}^2 = \frac{1}{2} S^2 \mu^2 (\text{arc } 1'')^2$$

Sulla base dei valori numerici riportati si ottiene quindi:

$$\mu_{\Delta} \approx \pm 1,5 \cdot S \cdot 10^{-6}$$

Tale valore si riferisce come detto a misure eseguite in buone condizioni ambientali; in esso non è compresa l'influenza degli errori derivanti dalla sensibilità del sistema compensatore dei livelli, sensibilità cui è affidato il mantenimento della condizione di simmetria rispetto all'orizzonte delle linee di mira nel passare dalla collimazione reciproca a quella alle mire lontane.

Indicando con  $\mu_c$  l'errore accidentale di centramento del sistema compensatore, la sua influenza sulla misura della differenza di quota può determinarsi in maniera analoga; si ottiene, come è facile verificare:

$$\mu_{\Delta}^2 = \frac{1}{4} S^2 \mu_c^2 (\text{arc } 1'')^2$$

Per gli autolivelli impiegati la precisione del sistema compensatore risulta dell'ordine di  $\pm 0'',2$ , per cui si ottiene:

$$\mu'_{\Delta} = \pm 0,5 \cdot S \cdot 10^{-6}$$

Naturalmente l'ipotesi ammessa di una perfetta simmetria della rifra-

zione, la cui influenza è rilevante soprattutto in prossimità delle due stazioni, non sarà mai verificata e quindi ne deriverà sulla determinazione della differenza di quota un ulteriore errore difficilmente valutabile, la cui incidenza potrà essere diminuita con opportuna scelta delle due stazioni e soprattutto con la ripetizione delle misure in condizioni metereologiche diverse.

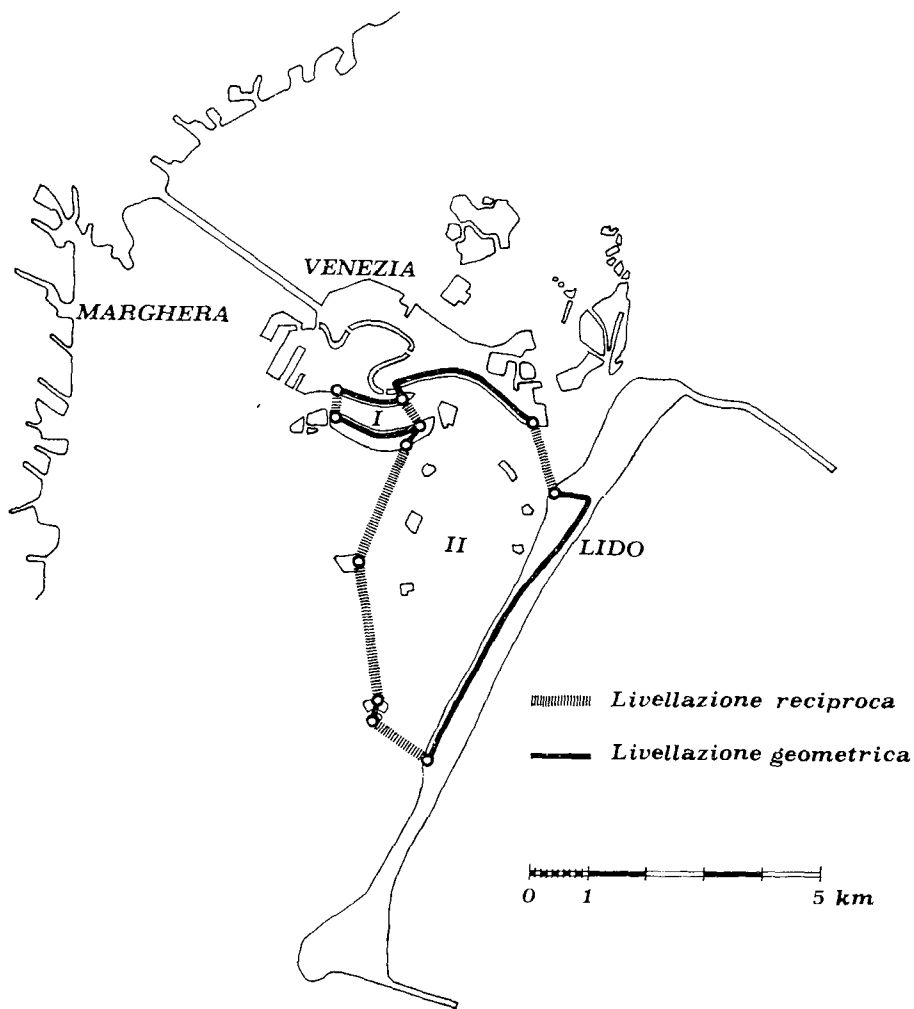


Fig. 2

3. Negli ultimi tempi si è avuta sovente l'occasione di utilizzare il metodo

descritto per il collegamento altimetrico di punti fra i quali non era possibile od opportuno eseguire operazioni di livellazione geometrica.

Fra le determinazioni eseguite ci sembrano particolarmente interessanti soprattutto ai fini di una valutazione della precisione conseguibile, quelle relative ai collegamenti di alcune isole della laguna veneta, effettuati allo scopo di legare in maniera sufficientemente rigida la livellazione geometrica del centro storico con quella del Lido, ed al tempo stesso di estendere la rete dei punti quotati per un migliore controllo dei fenomeni di subsidenza (fig. 2).

Tali collegamenti sono stati eseguiti per due anni consecutivi, nel 1970 e nel 1971, effettuando per ogni lato due misure, in giorni diversi e ognuna costituita da quattro determinazioni, intendendosi per quanto detto come singola determinazione l'insieme di una operazione di collimazione reciproca e di quattro collimazioni alle mire lontane. Le distanze tra i caposaldi così quotati variano da un minimo di 288 m ad un massimo di 2410 m e sono riportate nella seguente tabella:

COLLEGAMENTI		Lunghezze (m)
Giudecca	— S. Basilio	288
Giudecca	— Punta della salute	452
S. Elena	— Lido	882
Malamocco	— Poveglia	984
Poveglia	— Sacca Sessola	2410
Sacca Sessola	— Giudecca	2335

I caposaldi estremi di ogni collegamento sono stati uniti mediante livellazione geometrica di precisione, eseguita in andata e ritorno, in modo da costituire due poligoni chiusi di livellazione.

Le caratteristiche di tali poligoni sono riportate nella tabella seguente, unitamente ai relativi errori di chiusura:

	Lunghezze (km)			Errori di chiusura (mm)	
	Livellazione geometrica	Livellazione reciproca	Totali	1970	1971
Poligono I	3,1	0,8	3,9	1,4	1,2
Poligono II	12,1	7,1	19,2	11,4	11,1

E' interessante anche riportare gli errori medi chilometrici, ottenuti in funzione delle differenze, dei rami di livellazione geometrica relativi al I e II poligono ed alle due serie di misure; questi sono risultati rispettivamente pari a  $\pm 0,56$  e  $\pm 0,61$  mm nel 1970 e pari a  $\pm 0,42$  e  $\pm 0,43$  mm nel 1971. Tali valori, congiuntamente agli errori di chiusura dei due poligoni, consen-

tono di effettuare una stima della precisione delle differenze di quota determinate mediante livellazione reciproca; è facile vedere che questa risulta in tutti i casi considerati dello stesso ordine di grandezza di quello ricavabile dalle considerazioni teoriche riportate.

E' interessante inoltre notare che l'errore di chiusura del II poligono appare sensibilmente maggiore di quello del I, sia pur avendo riguardo alle loro diverse lunghezze complessive. Tale fatto può considerarsi come una conferma della dipendenza lineare, in funzione della distanza di collimazione, dell'errore con cui possono determinarsi le differenze di quota mediante livellazione reciproca. Nella chiusura del II poligono intervengono infatti le differenze di quota relative a due lati di oltre due chilometri, i cui errori, per l'ipotesi fatta, contribuiscono evidentemente in maniera rilevante a costituire l'errore di chiusura del poligono stesso.

4. Come già accennato precedentemente, l'errore di collimazione e lettura, da cui principalmente dipende (a meno delle anomalie della rifrazione) l'errore accidentale nella differenza di livello, si mantiene sensibilmente costante, in condizioni meteorologiche paragonabili, per le varie distanze di battuta.

Tuttavia oltre un certo limite, che in condizioni atmosferiche buone od ottime può essere individuato intorno ai  $2 \div 3$  km, e per il tipo di segnali in dotazione, le collimazioni divengono incerte ed il relativo errore tende ad aumentare rapidamente.

D'altra parte l'impiego di mire diversamente conformate e di maggiori dimensioni sembra non portare notevoli miglioramenti nella precisione delle collimazioni.

Questi invece è pensabile possano realizzarsi operando di notte con collimazioni a mire luminose opportune: è noto infatti che durante la notte ci si trova normalmente in condizioni di tranquillità atmosferica, per cui l'immagine di un segnale luminoso appare notevolmente stabile e quindi collimabile con elevata precisione.

Per realizzare tale schema si sono predisposte due stadi in lega leggera di forma scatolare, sulla faccia anteriore delle quali sono stati praticati dei fori, a distanze prefissate e misurate al comparatore, che servono da alloggiamento a coppie di piccoli proiettori.

Questi forniscono un fascio luminoso estremamente concentrato, variabile mediante l'eventuale impiego di opportuni diaframmi e la cui intensità può essere regolata mediante un reostato.

La distanza tra i due proiettori deve essere scelta in relazione alla distanza di collimazione, mentre in funzione di questa e delle condizioni di visibilità si sceglieranno diametro del diaframma ed intensità luminosa, in modo che le due sorgenti siano viste dallo strumento come punti luminosi facilmente collimabili.

Le stadi sono munite di livella sferica e di sostegni per la loro messa in stazione sui caposaldi, su cui poggiano mediante talloni lavorati; è da notare che in tal modo si evita la necessità di determinare volta per volta la differenza di quota fra segnale inferiore e caposaldo, essendo questa preventivamente nota.

Per verificare le possibilità oggettive di collegamenti altimetrici a più lunga distanza si sono scelti quattro punti sulle sponde opposte della valle del Reno e posti a due a due prossimamente alla medesima quota (fig. 3). I quattro punti costituiscono nel loro insieme un quadrilatero di livellazione, in cui le differenze di quota relative ai due lati più lunghi sono state determinate mediante i livelli doppi e le mire luminose descritte, mentre quelle

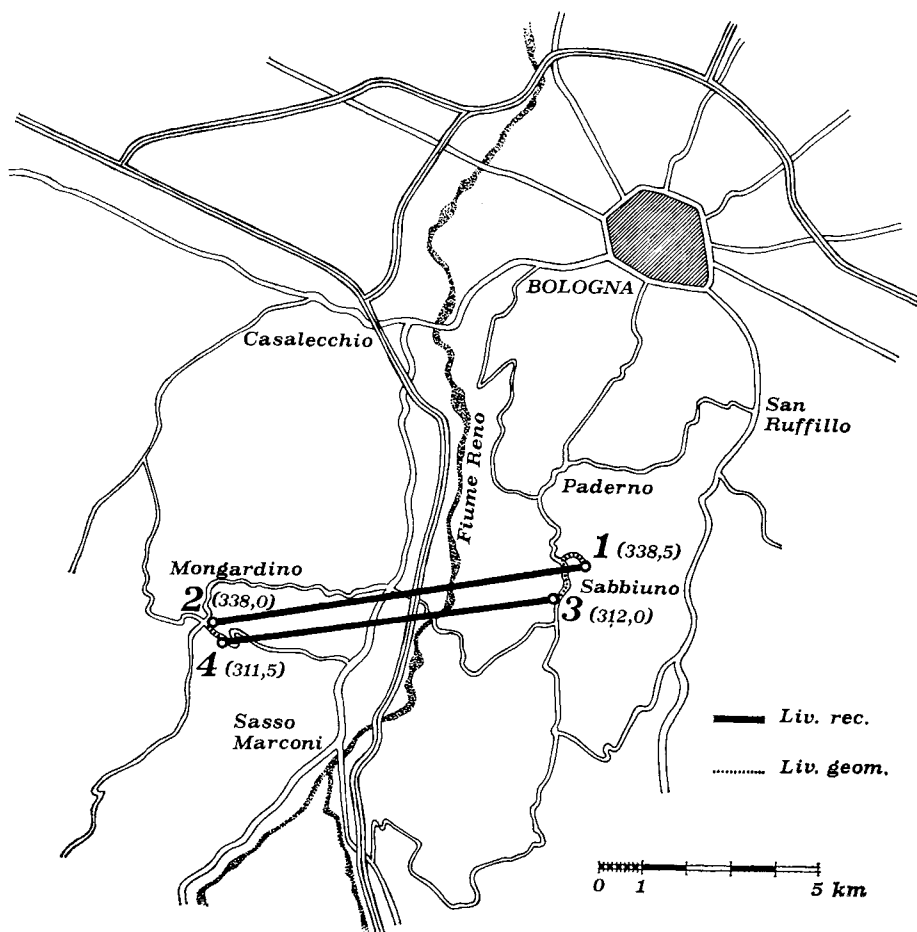


Fig. 3

relative ai due lati più corti si sono determinate mediante livellazione geometrica di precisione eseguita in andata e ritorno.

I lati 1 - 2 e 3 - 4 di tale quadrilatero sono rispettivamente di circa 8650 e 7850 metri, mentre le linee di livellazione geometrica tra i caposaldi 1 - 3 e 2 - 4 sono risultate di circa 1400 metri la prima e 600 metri la seconda.

I collegamenti con livelli doppi sono stati eseguiti con le modalità descritte, effettuando 12 determinazioni per ogni lato; le misure relative ad ogni lato sono state ripartite in due nottate diverse ed in ore diverse per ogni singola nottata, garantendo la contemporaneità delle misure stesse mediante un collegamento radio fra gli operatori.

Le differenze di quota, ottenute come media delle singole determinazioni, ed il relativo errore medio sono risultati rispettivamente:

$$\Delta_{1-2} = - (48,95 \pm 0,60) \text{ cm}$$

$$\Delta_{4-3} = + (62,64 \pm 0,44) \text{ cm}$$

L'errore medio di una singola differenza di quota ottenuta nel modo visto



è risultato rispettivamente pari a  $\pm 2,08$  e  $\pm 1,52$  cm, in buon accordo quindi con il valore che si ricava sulla base delle considerazioni teoriche precedentemente esposte, tenendo conto però che nel caso in esame il rap-

porto  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$  supera di più del doppio il valore limite allora considerato.

Per i tratti 1 - 3 e 2 - 4 si è eseguita una livellazione geometrica in andata e ritorno e l'errore di chiusura è risultato pari rispettivamente a 2,4 e 1,8 mm, valori certamente non ottimi, ma comunque accettabili, avuto riguardo al numero elevato di stazioni necessarie a causa della forte accidentalità dei due tracciati.

La media dei valori ottenuti è risultata pari a:

$$\Delta_{2-4} = - 2663,19 \text{ cm}$$

$$\Delta_{3-1} = + 2647,12 \text{ cm}$$

L'errore di chiusura del poligono, avente uno sviluppo complessivo di circa 18500 metri, è risultato quindi uguale a 2,38 cm.

E' da notare che i quattro punti sono stati scelti in maniera tale che i due collegamenti più lunghi comportino linee di mira a quote differenti tra loro, e che inoltre le caratteristiche morfologiche ed il profilo del terreno lungo i lati stessi risultino sensibilmente diversi, come si può vedere dalle figure 4 e 5; tale scelta è suggerita dal fatto che lungo traiettorie uguali o

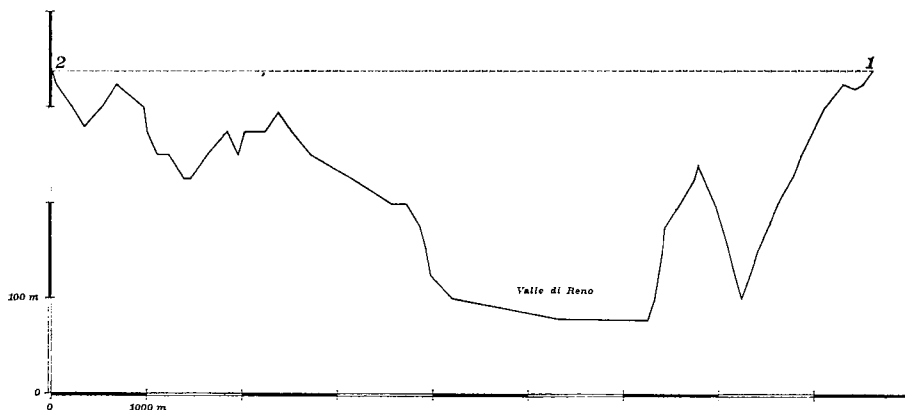


Fig. 4

simili, correnti tra punti posti prossimamente alla medesima quota, potrebbero facilmente verificarsi analoghe condizioni anomale della rifrazione e quindi errori nella determinazione delle differenze di quota pressochè uguali, ed il cui effetto tenderebbe ad annullarsi nella chiusura del poligono.

5. I risultati delle prove eseguite hanno confermato la validità del metodo con collimazioni diurne per collegamenti altimetrici tra punti a piccola e media distanza; quando le lunghezze di collimazione superano i limiti precedentemente visti, sembra preferibile l'impiego di mire luminose del tipo di quelle descritte con conseguenti collimazioni notturne.

Queste ultime infatti hanno consentito la determinazione delle differenze di quota con risultati incoraggianti, per cui l'impiego del metodo sembra poter essere utilmente esteso fino a distanze dell'ordine della decina di chilometri.

Un limite superiore alla distanza di collimazione è imposto non tanto dalla difficoltà delle collimazioni stesse, che si possono mantenere buone con opportuni proiettori anche per valori nettamente superiori, quanto dall'influenza della curvatura terrestre e dalla necessità di collimazioni reciproche. Occorre infatti tener presente che, almeno per l'apparecchiatura in esame, la massima inclinazione rispetto all'orizzontale che si può imporre alle linee di collimazione mediante il dispositivo a cuneo è di  $206''$ ; è evidente quindi che per effettuare collimazioni reciproche a più lunga distanza occorrerebbe sopraelevare notevolmente le mire rispetto al caposaldo, con tutte le difficoltà che ne conseguono.

Per concludere, un tale tipo di livellazione, con la sua estensione a portate dell'ordine della decina di chilometri, può trovare la sua utile applica-

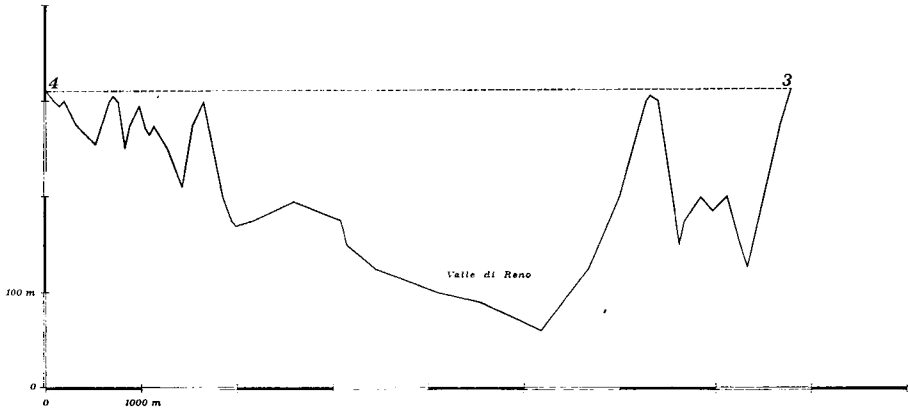


Fig. 5

zione non già ben inteso in alternativa a quella geometrica, ma quando questa divenga impossibile oppure non conveniente.

Quest'ultimo caso può fra l'altro verificarsi laddove acquisti un'importanza preminente la rapidità delle misure, sia pure unita ad una sufficiente precisione, come per esempio nel controllo di zone soggette a rapidi movimenti verticali del suolo.

#### BIBLIOGRAFIA

- M. CAPUTO, G. FOLLONI, A. GUBELLINI, L. PIERI, M. UNGUENDOLI, Survey and Geometric Analysis of Subsidence in the Region of Venice and its Hinterland. « *Rivista Italiana di Geofisica* », Vol. XXI (1972), N. 1-2.
- M. BRODOFSKY, Stromübergangsnivellement mit dem Zeiss-Nivellier Ni 2. « *Zeitschrift für Vermessungswesen* », 85 Jahrgang 1960, Heft 7 und 89 Jahrgang 1964, Heft 7.
- ISTITUTO GEOGRAFICO MILITARE, Controllo geodetico dello Stretto di Messina. Relazione sui lavori eseguiti negli anni 1970 e 1971. Firenze, 1972.
- J. KHAKURI, Versuche mit dem automatischen Dopelinstrument Zeiss Ni 2 beim Stromübergangsnivellement. « *Zeitschrift für Vermessungswesen* », 91 Jahrgang 1966.

# I. R. T. A.

**ISTITUTO di RILIEVI TERRESTRI e AEREI**

Via Quintiliano, 41 - MILANO - Telefono n. 5060955

*Rilievi stereofotogrammetrici di alta precisione  
in qualsiasi scala per*



*costruzioni stradali  
e ferroviarie  
progetti di bonifica  
e irrigazione  
piani regolatori  
mappe catastali  
impianti idroelettrici  
sistemazioni  
montane  
studi glaciologici  
sistemazioni fluviali  
monumenti  
fotografie aeree  
mosaici fotografici  
triangolazioni  
livellazioni*

**GHIACCIAIO DEI FORNI**

Scala orig. 1 : 5.000      curve m. 5