

TAVOLA IV

VALORI DEGLI SCARTI CORRISPONDENTI AI PARAMETRI PUBBLICATI
DAL BIRARDI NELLA TABELLA A

Cupola interna - Costolone 1

XO = - 14.41

YO = 54.61

R = 36.89

N	X	Y	XC	DX	YC	DY	SC/RT0
1	3.270	86.710	3.769	- 0.499	86.987	- 0.277	- 0.243E 00
2	4.010	86.460	4.203	- 0.193	86.572	- 0.112	- 0.971E - 01
3	4.890	85.960	5.033	- 0.143	86.049	- 0.089	- 0.754E - 01
4	5.750	85.460	5.817	- 0.067	85.504	- 0.044	- 0.369E - 01
5	6.520	84.960	6.560	- 0.040	84.988	- 0.028	- 0.228E - 01
6	7.200	84.460	7.266	- 0.066	84.508	- 0.048	- 0.388E - 01
7	7.880	83.960	7.938	- 0.058	84.004	- 0.044	- 0.353E - 01
8	8.540	83.460	8.580	- 0.040	83.492	- 0.032	- 0.250E - 01
9	9.110	82.960	9.194	- 0.084	83.030	- 0.070	- 0.537E - 01
10	9.710	82.460	9.782	- 0.072	82.522	- 0.062	- 0.471E - 01
11	10.270	81.960	10.346	- 0.076	82.028	- 0.068	- 0.508E - 01
12	10.860	81.460	10.887	- 0.027	81.486	- 0.026	- 0.187E - 01
13	11.290	80.960	11.408	- 0.118	81.075	- 0.115	- 0.822E - 01
14	11.860	80.460	11.908	- 0.048	80.509	- 0.049	- 0.344E - 01
15	12.330	79.960	12.390	- 0.060	80.023	- 0.063	- 0.437E - 01
16	12.780	79.460	12.854	- 0.074	79.541	- 0.081	- 0.550E - 01
17	13.230	78.960	13.302	- 0.072	79.042	- 0.082	- 0.540E - 01
18	13.670	78.460	13.733	- 0.063	78.535	- 0.075	- 0.483E - 01
19	14.070	77.960	14.150	- 0.080	78.057	- 0.097	- 0.616E - 01
20	14.520	77.460	14.551	- 0.031	77.499	- 0.039	- 0.245E - 01
21	14.870	76.960	14.939	- 0.069	77.050	- 0.090	- 0.547E - 01
22	15.230	76.460	15.313	- 0.083	76.572	- 0.112	- 0.667E - 01
23	15.590	75.960	15.674	- 0.084	76.078	- 0.118	- 0.685E - 01
24	15.970	75.460	16.023	- 0.053	75.537	- 0.077	- 0.435E - 01
25	16.340	74.960	16.359	- 0.019	74.989	- 0.029	- 0.161E - 01
26	16.640	74.460	16.684	- 0.044	74.529	- 0.069	- 0.373E - 01
27	16.960	73.960	16.998	- 0.038	74.021	- 0.061	- 0.322E - 01
28	17.230	73.460	17.300	- 0.070	73.578	- 0.118	- 0.605E - 01
29	17.530	72.960	17.592	- 0.062	73.068	- 0.108	- 0.541E - 01
30	17.790	72.460	17.874	- 0.084	72.611	- 0.151	- 0.734E - 01
31	18.090	71.960	18.145	- 0.055	72.063	- 0.103	- 0.488E - 01
32	18.390	71.460	18.407	- 0.017	71.493	- 0.033	- 0.150E - 01
33	18.600	70.960	18.659	- 0.059	71.079	- 0.119	- 0.528E - 01
34	18.820	70.460	18.901	- 0.081	70.630	- 0.170	- 0.735E - 01
35	19.040	69.960	19.135	- 0.095	70.165	- 0.205	- 0.862E - 01
36	19.260	69.460	19.359	- 0.099	69.683	- 0.223	- 0.907E - 01
37	19.490	68.960	19.575	- 0.085	69.159	- 0.199	- 0.779E - 01
38	19.720	68.460	19.781	- 0.061	68.611	- 0.151	- 0.569E - 01
39	19.910	67.960	19.980	- 0.070	68.138	- 0.178	- 0.650E - 01
40	20.110	67.460	20.170	- 0.060	67.619	- 0.159	- 0.559E - 01
41	20.280	66.960	20.351	- 0.071	67.159	- 0.199	- 0.672E - 01
42	20.480	66.460	20.525	- 0.045	66.592	- 0.132	- 0.426E - 01
43	20.660	65.960	20.691	- 0.031	66.054	- 0.094	- 0.291E - 01
44	20.790	65.460	20.848	- 0.058	65.648	- 0.188	- 0.558E - 01
45	20.960	64.960	20.998	- 0.038	65.090	- 0.130	- 0.368E - 01
46	21.110	64.460	21.141	- 0.031	64.570	- 0.110	- 0.296E - 01
47	21.290	63.960	21.275	0.015	63.904	0.056	0.141E - 01
48	21.410	63.460	21.403	0.007	63.430	0.030	0.706E - 02
49	21.460	62.960	21.523	- 0.063	63.225	- 0.265	- 0.610E - 01
50	21.580	62.460	21.635	- 0.055	62.709	- 0.249	- 0.539E - 01
51	21.680	61.960	21.740	- 0.060	62.251	- 0.291	- 0.592E - 01
52	21.770	61.460	21.838	- 0.068	61.813	- 0.353	- 0.673E - 01
53	21.880	60.960	21.929	- 0.049	61.236	- 0.276	- 0.486E - 01
54	21.980	60.460	22.013	- 0.033	60.663	- 0.203	- 0.328E - 01
55	22.050	59.960	22.090	- 0.040	60.226	- 0.266	- 0.396E - 01
56	22.110	59.460	22.160	- 0.050	59.822	- 0.362	- 0.494E - 01
57	22.150	58.960	22.223	- 0.073	59.533	- 0.573	- 0.721E - 01

i gradi di libertà dei sistemi risolvibili (3), avendo avvertito, nei diversi altri punti eliminati dal calcolo, delle *alterazioni costruttive sul monumento* che avrebbero potuto mettere in seria crisi il suo *best fitting* del quinto acuto e che questa, e soltanto questa, debba essere la causa del paradosso evidenziato. Spingendo maggiormente il lisciamento dei nostri dati originali, il professor Birardi avrebbe anche potuto rendere molto più plausibile l'*ipotesi lineare!*

E, che i risultati ottenuti dal Birardi abbiano del paradossale, lo si può anche giudicare riportando in grafico gli scarti DX e DY relativi alla sua *Tabella A*.

Invero, riportando sulla *Tavola E* pubblicata nella nostra prima memoria [5], gli scarti DX e DY da noi riferiti per la *Tabella A* nella nostra *Tavola IV*, è facile constatare come proprio l'ipotesi ellittica prenda maggior vigore nei confronti dell'ipotesi circolare. Basta osservare, a questo proposito, la *Figura 3*.

Quello che più impressiona, osservando questa figura, è soprattutto la sistematicità dei segni degli scarti ottenuti dal Birardi. Questa sistematicità sta ad indicare un *cattivo adattamento* sui dati da noi osservati della curva da Lui interpolata.

In una corretta prassi di ricerca scientifica, constatata questa sistematicità, Egli avrebbe dovuto verificare il *best fitting* di altre curve, e questo fino a verificare che la successione dei segni degli scarti si presentasse, al ridursi dell'entità degli scarti medesimi, in modo più o meno aleatorio [12].

Dobbiamo tuttavia rendere atto al professor Birardi, ancora una volta di aver visto giusto quando ha scritto che il suo *eccellente risultato non dà sicure indicazioni sull'attendibilità del tipo di curva ipotizzata* e che *adottando altre curve (ad. es. parabole di 3° o 4° ordine, sviluppi polinomiali, ecc.) possono ottenersi scarti ancora più piccoli* [8].

E' un vero peccato che, vista la reazione del Sanpaolesi, Egli non abbia trovato il coraggio di confermare queste affermazioni ed abbia invece preferito ricorrere, per sostenere la sua tesi, all'empirico e superficiale « *semplice confronto a vista* » di due tabelle numeriche [10], una delle quali opportunamente *tirata a lucido*, esprimenti i parametri di due diverse curve geometriche (la circonferenza e l'ellisse) tra loro difficilmente comparabili.

Che valore scientifico di *prova definitiva* possa essere attribuito a questo « *semplice confronto a vista* » lo lasciamo decidere ai nostri lettori. Noi abbiamo già messo in evidenza cosa nasconda il lindore formale dei numeri pubblicati dal professor Birardi nella sua *Tabella A*.

Comunque, se la Matematica è veramente un'opinione, il professor Birardi fa bene a concludere la sua *analisi geometrica* scrivendo: *riteniamo di poter affermare che — dal punto di vista della Teoria degli Errori — l'ipotesi che il profilo dei costoloni sia circolare risulta sicuramente più plausibile di quella che il profilo stesso sia ellittico* [8].

In fondo, non possiamo negare che il suo sia veramente un *punto di vista* dato che, lusingato dal credito concessogli dal professor Sanpaolesi, Egli non si perita poi, nella sua *expertise*, di *progettare* e di *disegnare di proprio pugno* la curva tipo della mezzeria delle vele del nostro « Cupolone ». Una curva, quella da Lui ideata, che si adatta su quella ottenuta dal nostro rilevamento fotogrammetrico come il Campanile di Giotto si adatta sul Ponte a Santa Trinita!

(3) Nel piano la circonferenza può essere definita da soli 3 punti!

TAVOLA E
SANTA MARIA DEL FIORE - FIRENZE

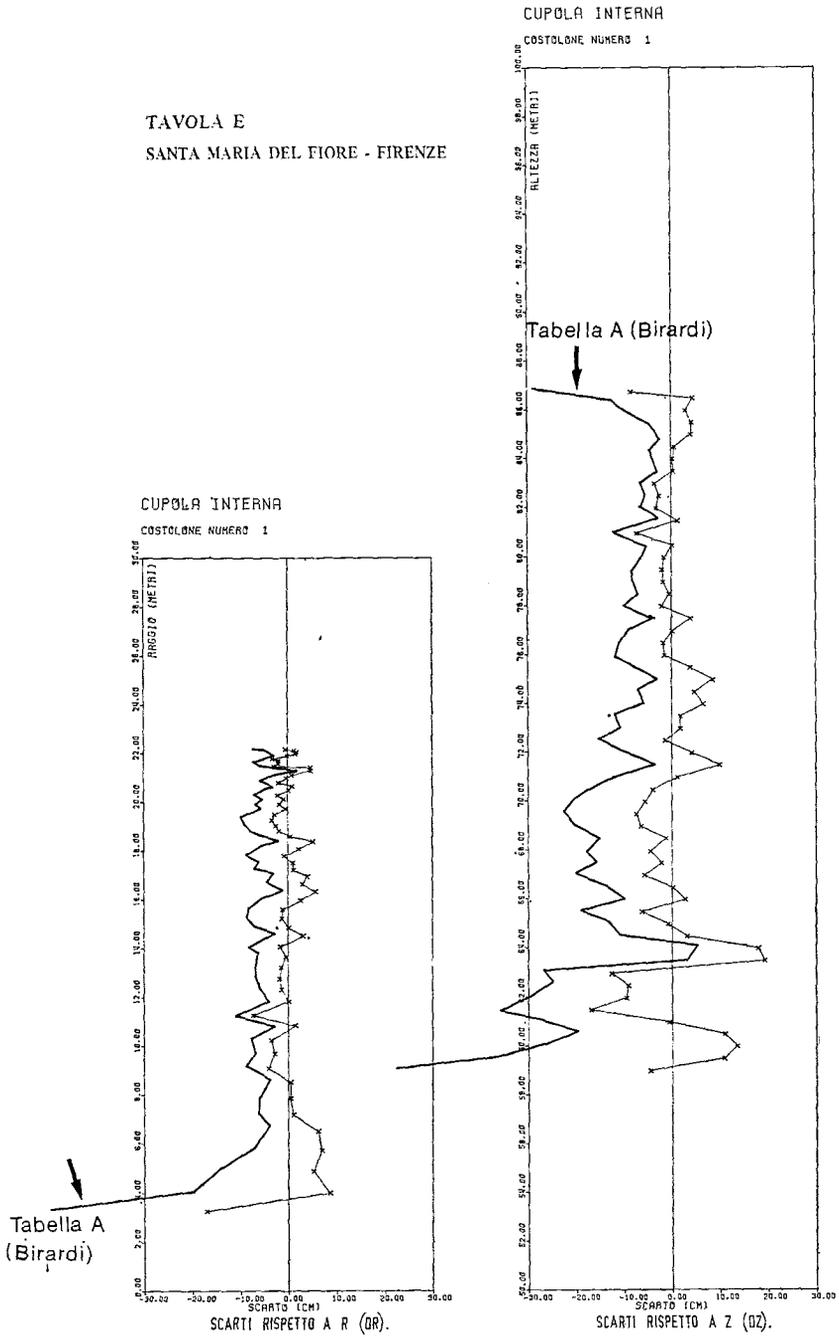


Fig. 3

E' soprattutto per i suesposti motivi che abbiamo ritenuto inopportune le critiche mosseci dai due professori Sanpaolesi e Birardi circa il nostro lavoro di ricerca [9]. Comunque, se questo può soddisfarlo, il professor Sanpaolesi può continuare ancora a ritenere che, *soprattutto per merito dell'amico professor Birardi*, sia stato finalmente possibile eliminare ogni ulteriore dubbio circa la curvatura degli spigoli interni ed esterni della Cupola fiorentina [8]. Noi, visto come stanno le cose, non ce ne potremo certo adontare.

E' tuttavia fuori discussione che, con le loro libere affermazioni, i due professori Sanpaolesi e Birardi, dimostrano chiaramente di non credere affatto nelle possibilità della Fotogrammetria e di rigettarne, soprattutto, le obiettive e genuine informazioni che essa può fornire. Alla descrizione puntuale e fedele di un monumento offerta dalla Fotogrammetria Essi preferiscono infatti ancora l'empirismo accademico ottocentesco.

Si può infatti provare, e le nostre ricerche di analisi spettrale ne sono anche una prova [6], che i profili in discussione si differenziano significativamente tra di loro e che, proprio per questo motivo, i risultati ottenibili, elaborando in un modo qualsiasi le relative serie numeriche da noi osservate, non possono altro che differenziarsi con identica significatività (4).

In breve, se non c'è accordo tra i profili descritti dal rilevamento numerico fotogrammetrico, non può esserci accordo tra i risultati di una qualsiasi elaborazione dei dati numerici che li definiscono. Se l'accordo tra i risultati si verifica è soltanto perché qualcuno l'ha realizzato a proprio piacimento.

E' essenzialmente per questo motivo che, pubblicando i nostri risultati, abbiamo ritenuto di riferirli così come li abbiamo avuti dall'elaboratore elettronico. La nostra obiettività scientifica ci ha suggerito di conservare intatto il contenuto informativo offerto dai dati di partenza.

4. Seguendo un indirizzo di ricerca completamente diverso da quello prescelto dai due professori Sanpaolesi e Birardi, si è recentemente inserito nella polemica sulla curvatura della Cupola di Santa Maria del Fiore anche l'ingegner *Corrado Brogi*, cultore di Scienza delle costruzioni.

L'ingegner Brogi, studiando alcuni aspetti delle curve funicolari, ha avuto modo di rilevare che la curva in discussione poteva essere ben approssimata da una *curva catenaria* avente l'asse di simmetria inclinato di circa 45° rispetto alla verticale [13].

Desiderando avere conferma numerica alle sue deduzioni, il Brogi ha pertanto verificato il *best fitting* della curva medesima rispetto ai nostri dati osservati, limitandosi però al solo *Costolone 3* della cupola interna.

Purtroppo, Egli non ha ritenuto utile pubblicare, almeno per il momento, i risultati numerici delle sue ricerche. Egli ha però riferito che *il punto di massimo effettivo è di poco superiore al punto che porta la quota di 79,96 m; che l'asse di riferimento è leggermente sghembo rispetto al piano della curva; che la curva di errore (nell'ordine di qualche centimetro) forma*

(4) Il professor Sanpaolesi ci offre nella sua recensione del nostro lavoro, involontariamente, una conferma alle nostre conclusioni quando, riferendosi ai rilevamenti diretti compiuti nel 1938 dal geometra *Giulio Padelli*, testualmente scrive: *La curvatura della cupola fu misurata sulla mezzeria delle facce; il Padelli ipotizzò per questa una curva policentrica, senza tuttavia si potesse andare al di là di una certa approssimazione, data la natura irregolare delle murature delle quattro facce prese in considerazione, che risultarono anche una diversa dall'altra* [8].

una esse allungata; che nel calcolo occorre spingere al massimo le cifre decimali.

Logicamente, dato il carattere telegrafico delle informazioni forniteci dall'ingegner Brogi, non ci è possibile fare commenti circa questo nuovo *best fitting* che contraddice, per altra via, l'ipotesi di una curvatura costante (circonferenza) sostenuta dai professori Sanpaolesi e Birardi.

Prendendo atto della comunicazione fatta dal Brogi, ci preme però ricordare che importanti ricerche di Fisica matematica, compiute in Italia sul finire del XVIII secolo, hanno avuto per tema proprio la ricerca della curvatura di equilibrio degli archi e delle cupole e che la catenaria è stata concordemente indicata, fino d'allora, come *la curva di equilibrio degli archi e la curva di minima spinta tangenziale* [14].

Inoltre, sempre a questo proposito, ci preme poi ricordare che già *Leonardo Ximenes*, riferendosi alla curvatura della Cupola di Santa Maria del Fiore nella sua opera sullo gnomone fiorentino, aveva segnalato che *il sesto della nostra Cupola è tale, che si accosta assai dappresso alla curva catenaria, curva assai acconcia alla costruzion delle Cupole* [15].

L'ipotesi che il Brunelleschi si sia ispirato, nella realizzazione della sua Cupola, alla curva definita da una *catena soggetta al proprio peso* merita giustamente di essere presa in considerazione.

Discutendo i primi risultati da noi ottenuti tramite l'elaboratore elettronico, il professor *Enzo Ferroni* dell'Università di Firenze ci aveva ricordato quest'ipotesi e ce ne aveva suggerita la verifica con i nostri dati sperimentali.

Questa verifica non è stata ancora da noi effettuata. Sarà nostra premura effettuarla se l'ingegner Brogi non pubblicherà i risultati delle sue ricerche.

Noi riteniamo infatti, come abbiamo già scritto [6], che forma geometrica e condizioni di stabilità non possono essere in alcun modo disgiunte nell'introspezione di un'opera architettonica come quella in argomento. E questo, tenendo presenti le *limitate porzioni di curva* studiate che, appunto per la loro limitazione, lasciano ancora margine all'*estrapolazione*.

5. Concludendo la nostra prima memoria sul rilevamento fotogrammetrico della Cupola di Santa Maria del Fiore in Firenze, abbiamo testualmente scritto:

« Naturalmente, le ricerche sulla Cupola del Brunelleschi non possono ritenersi concluse con questo primo rilevamento fotogrammetrico a carattere sperimentale. Altre prese fotogrammetriche di maggior precisione dovranno essere effettuate per completare e perfezionare nel miglior modo possibile le molteplici informazioni ora raccolte » [5].

Noi ci ripromettevamo allora, e questo è ancor oggi il nostro programma, di controllare i nostri primi risultati con nuove misure dirette sul monumento, di confrontare i nostri risultati con quelli ottenuti nei precedenti rilevamenti diretti, nonché di ripetere i rilevamenti fotogrammetrici compiuti per cercare di migliorare ulteriormente le precisioni conseguite.

Sviluppando questo nostro programma, incoraggiato anche da un contributo di ricerca del Ministero della Pubblica Istruzione, abbiamo già proceduto alla ripetizione *ex-novo* della restituzione numerica delle intersezioni delle vele interne e delle mezzerie delle vele medesime. I valori numerici osservati sono tuttora in corso di elaborazione e confronto con i precedenti valori da noi osservati.

Condotta a termine l'elaborazione di queste nuove osservazioni numeriche sarà forse possibile ottenere o meno una conferma delle anomalie rilevate su alcuni profili interni della nostra Cupola [6].

I risultati che verranno ottenuti permetteranno comunque di dare un nuovo avvio al rilevamento fotogrammetrico da noi intrapreso.

Le ricerche da noi programmate non potranno, certamente, esaurirsi in un breve arco di tempo. Questo richiederà ancora molta pazienza e molta prudenza nel rendere definitive le indicazioni finora ottenute dalle nostre ricerche sperimentali.

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. CARBONNELL, *La photogrammétrie architecturale de 1968 à 1971. Rapport du Comité International de Photogrammétrie architecturale*. Société Française de Photogrammétrie. Bulletin N. 45, Janvier 1972.
- [2] M. FONDELLI, *Il metodo fotogrammetrico nel restauro architettonico*. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini. Anno XVII, N. 2, Aprile-Maggio-Giugno 1958.
- [3] H. BONNEVAL, *Le problème de la Photogrammétrie architecturale*. Société Française de Photogrammétrie. Bulletin N. 4, Décembre 1961.
- [4] L. PRESSENSE, *Etude de la précision obtenue par Photogrammétrie analytique dans le controle des normes de construction d'un grand bâtiment*. Communication au XII Congrès International de Photogrammétrie. Ottawa, 23 Juillet-4 Août 1972.
- [5] W. FERRI - M. FONDELLI - P. FRANCHI - F. GRECO, *Il rilevamento fotogrammetrico della Cupola di Santa Maria del Fiore in Firenze*. Bollettino di Geodesia e Scienze affini. Anno XXX, N. 3, Luglio-Agosto-Settembre 1971.
- [6] E. CLEUR - S. DILAGHI - M. FONDELLI, *Analisi delle discontinuità della Cupola di Santa Maria del Fiore in Firenze*. Bollettino di Geodesia e Scienze affini. Anno XXXI, N. 3, Luglio-Agosto-Settembre 1972.
- [7] W. FERRI - M. FONDELLI, *Problems in photogrammetric surveying of Domes*. Presented paper to Twelfth Congress of International Society for Photogrammetry. Ottawa, 1972.
- [8] P. SANPAOLESI e G. BIRARDI, *Vecchie e recenti ricerche sulla Cupola di Santa Maria del Fiore e la interpretazione di un nuovo rilievo fotogrammetrico*. Antichità viva. Anno XI, N. 2, 1972.
- [9] M. FONDELLI, *La curva attuale della Cupola di Santa Maria del Fiore. Risposta ai professori Piero Sanpaolesi e Giuseppe Birardi*. Antichità viva. Anno XI, N. 5, 1972.
- [10] P. SANPAOLESI e G. BIRARDI, *La curva attuale della Cupola di Santa Maria del Fiore. Risposta al Prof. Mario Fondelli*. Antichità viva. Anno XI, N. 6, 1972.
- [11] J.W. LINNIK, *Methode der kleinsten quadrate in moderner darstellung*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin, 1961.
- [12] S. AIVAZIAN, *Etude statistique des dépendances*. Editions Mir. Moscou, 1970.
- [13] C. BROGI, *Su alcuni aspetti delle curve funicolari*. Bollettino degli Ingegneri. Anno XX, N. 10, Ottobre 1972; N. 12, Dicembre 1972.
- [14] A.M. LORGNA, *De curvarum in concamerationibus impulsu, nova Theoria*. Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae pro Anno MDCCLXXIX. Pars posterior. Petropoli, Typis Academiae Scientiarum, MDCCLXXXIII.
L. MASCHERONI, *Nuove ricerche sull'equilibrio delle volte*. Per Francesco Locatelli. Bergamo, 1785.
- [15] L. XIMENES, *Del vecchio e nuovo gnomone fiorentino e delle osservazioni astronomiche, fisiche ed architettoniche fatte nel verificarne la costruzione*. Nella Stamperia Imperiale. In Firenze, MDCCLVII.