

RELAZIONI FRA COORDINATE CARTESIANE SPAZIALI E COORDINATE GEOGRAFICHE (Inversione del Sistema)

Marco Unguendoli*

RIASSUNTO: *Si espone un metodo semplice di inversione del sistema che lega le coordinate cartesiane spaziali di un punto alle coordinate geografiche ed all'altezza sull'ellissoide dello stesso.*

1) - Come è noto le relazioni che legano le coordinate geografiche e l'altezza di un punto alle coordinate cartesiane in un sistema spaziale avente l'asse z coincidente con l'asse di rivoluzione dell'ellissoide di riferimento, il piano xy sul piano equatoriale e l'asse x rivolto verso il meridiano da cui si contano le longitudini, sono:

$$\begin{cases} x = (N + H) \cos \varphi \cos \omega \\ y = (N + H) \cos \varphi \sin \omega \\ z = [N(1 - e^2) + H] \sin \varphi \end{cases} \quad (1)$$

e per l'inversione di tale sistema alcuni autori [1], [2] indicano metodi basati sulle approssimazioni successive. Si espone qui un metodo diretto basato sulla soluzione di una equazione di quarto grado, soluzione che non presenta difficoltà avendo a disposizione un calcolatore.

2) - Il sistema (1) può essere scritto:

$$\begin{cases} x = N \cos \varphi \cos \omega + H \cos \varphi \cos \omega \\ y = N \cos \varphi \sin \omega + H \cos \varphi \sin \omega \\ z = N(1 - e^2) \sin \varphi + H \sin \varphi \end{cases} \quad (2)$$

Introduciamo la latitudine ridotta u ricordando che:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}$$

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{1 - e^2} \cos u}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}}$$

$$\sin \varphi = \frac{\sin u}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}}$$

* Università di Ancona - Università di Bologna.

ottenendo:

$$\left. \begin{aligned} x &= \left(a \cos u + \frac{H \sqrt{1-e^2} \cos u}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}} \right) \cos \omega \\ y &= \left(a \cos u + \frac{H \sqrt{1-e^2} \cos u}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}} \right) \sin \omega \\ z &= \left(a \sqrt{1-e^2} + \frac{H}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}} \right) \sin u \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Dalle prime due equazioni dei sistemi (1) o (3) si ha immediatamente

$$\omega = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (4)$$

Nota ω una delle prime due equazioni del sistema (3) per esempio la seconda diviene:

$$\frac{y}{\sin \omega} = y_1 = a \cos u + \frac{H \sqrt{1-e^2} \cos u}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}}$$

da cui si ha:

$$H = (y_1 - a \cos u) \frac{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}}{\sqrt{1-e^2} \cos u} \quad (5)$$

che sostituita nella terza equazione di (3) dà:

$$z = a \sqrt{1-e^2} \sin u + (y_1 - a \cos u) \frac{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}}{\sqrt{1-e^2} \cos u} \cdot \frac{\sin u}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}}$$

che con semplici passaggi si riduce a:

$$a e^2 \sin u \cos u - y_1 \sin u + z \sqrt{1-e^2} \cos u = 0 \quad (6)$$

Ponendo $t = \operatorname{tg} \frac{\bar{u}}{2}$ da cui si ha:

$$\operatorname{sen} u = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \operatorname{cos} u = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

la (6) diviene:

$$a e^2 \frac{2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} - y_1 \frac{2t}{1+t^2} + z \sqrt{1-e^2} \frac{1-t^2}{1+t^2} = 0$$

che opportunamente ridotta dà:

$$t^4 + A t^3 + C t - 1 = 0 \qquad (7)$$

in cui:

$$A = \frac{2(a e^2 + y_1)}{z \sqrt{1-e^2}}; \qquad C = \frac{2(y_1 - a e^2)}{z \sqrt{1-e^2}}$$

La soluzione della (7) dà luogo normalmente a due radici reali che però non ingenerano confusione.

Trovato il valore di u si ha immediatamente:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} u}{\sqrt{1-e^2}} \qquad (8)$$

ed infine dalla (5) si ricava H .

3) - A titolo di esempio riportiamo un calcolo eseguito con il calcolatore da tavolo (H.P. 9810 A).

I dati iniziali sono:

$$\varphi = 45^\circ 00' 00'', 0000$$

$$\omega = 12^\circ 00' 00'', 0000$$

$$H = 3000 \text{ m}$$

$$a = 6378388,00$$

$$b = 6356911,95$$

$$e^2 = 0,00672267$$

Si ha immediatamente:

$$N = 6389135,05 \text{ m.}$$

$$N+H = 6392135,05 \text{ m.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 4421150,900 \text{ m.} \\ y = 939744,633 \text{ m.} \\ z = 4489550,358 \text{ m.} \end{array} \right.$$

Assumendo ora come dati iniziali x, y, z passiamo all'inversione del sistema. Con la (4) si ha:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \omega &= 0,2125565616 \\ \omega &= 12^\circ 00' 00'',00001 & \Delta\omega &= + 0'',00001 \end{aligned}$$

si ha quindi:

$$y_1 = \frac{y}{\operatorname{sen} \omega} = 4519922,041 \text{ m.}$$

I coefficienti della (7) saranno inoltre:

$$A = 2,039498988 \qquad c = 2,001165830$$

La soluzione dell'equazione dà:

$$\begin{aligned} t_1 &= 0,4132260727 \\ t_2 &= - 2,4432841490 \end{aligned}$$

con il valore di t_1 si ottiene:

$$u = 44^\circ,90337992$$

da cui con la (8) si ricava:

$$\varphi = 45^\circ 00' 00'',0001 \qquad \Delta\varphi = 0'',0001$$

ed infine con la (5):

$$H = 3000,001 \text{ m.} \qquad \Delta H = 0,001 \text{ m.}$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. BOMFORD: *Geodesy* - Third Edition, Clarendon Press, Oxford, 1971.
- [2] J.J. LEVALLOIS: *Geodesie Generale* - Tome 2, I.G.N., Eyrolles, Paris, 1970.
- [3] N. JADANZA: *Elementi di Geodesia* - Torino, 1895.
- [4] M.K. PAUL: *A note on computation of geodetic coordinates from geocentric (cartesian coordinates)* - Bulletin Géodésique N. 8, 1973.



restitutore analitico AP/C-3



Lo Stereorestitutore Analitico mod. AP/C-3, il più moderno e versatile dei restitutori analitici prodotti dalla Ottico Meccanica Italiana per usi fotogrammetrici, è costituito da tre componenti principali: uno stereocomparatore di precisione, un tavolo di restituzione x-y ed un calcolatore elettronico digitale.

L'impiego più comune dello stereorestitutore analitico AP/C-3 si riassume come segue: stereorestitutore, coordinatografo automatico, triangolare aereo per proiezioni stradali e idrauliche automatiche con uso del DTM (Digital Terrain Model), pianificazione territoriale, urbanistica, calcolo di distanze e di superfici.

Per ciò che riguarda il calcolatore, oltre ai programmi necessari per le applicazioni fotogrammetriche del sistema AP/C-3, si ha la disponibilità di numerosi programmi già sviluppati.

Caratteristiche tecniche: ingrandimenti: 10x e 15x, formato massimo fotogrammi: 23x23 cm, errore quadratico medio 2 μ , dimensioni utili del coordinatografo cm 120x140, utilizza qualsiasi fotogramma avente distanza focale compresa tra 0mm e 3300mm.

OTTICO MECCANICA ITALIANA S.p.A.

81 Via della Vasca Navale

00146 ROMA - ITALIA

Telegrammi SAROMI - Tel. 553241 - Telex SAROMI 61137



**SOCIETA' AEROFOTOGRAFIE E
RILEVAMENTI AEROFOTOGRAMMETRICI
S.A.R.A. S.p.A.**

00146 ROMA - VIA ODERISI DA GUBBIO 101

TELEGRAMMI: SARANISTRÌ - TEL. 555708 - 553643

**aerofotogrammetria
dal 1921**

