

UN'ANALOGIA MECCANICA NELLA STIMA DEI PARAMETRI DI ROTAZIONE E DI SCALA TRA DUE SISTEMI DI COORDINATE

A MECHANICAL ANALOGY IN THE ESTIMATION OF ROTATION AND SCALE PARAMETERS BETWEEN COORDINATE SYSTEMS

M. Pierozzi

Istituto Idrografico della Marina, Genova

PAROLE CHIAVE: Corpo rigido, energia, minimi quadrati, momento angolare, parametri di rotazione, parametro di scala, tensore di inerzia.

KEYWORDS: Angular momentum, energy, inertia tensor, least squares, rigid body, rotation parameters, scale parameter,

RIASSUNTO

In questa nota di carattere didattico, partendo dall'osservazione che la sottomatrice normale \mathbf{J} , relativa al processo di stima ai minimi quadrati dei parametri di rotazione nel modello di Helmert, ha la forma di un *tensore di inerzia*, se ne dà una giustificazione sulla base di una semplice analogia meccanica. In tale processo si interpreta in termini energetici la forma quadratica dei residui da minimizzare.

ABSTRACT

In this note of didactical character, starting from the observation that the normal submatrix \mathbf{J} matrix, relevant to the least squares estimation process of the rotation parameters in the Helmert model, has the form of the *inertia tensor*, a justification is given using a simple mechanical analogy. In this process, the residuals quadratic form to be minimized is interpreted in terms of energy.

1. PREMESSA

Un modello spesso usato per la trasformazione tra sistemi geodetici è, come ben noto, il modello di Helmert linearizzato¹

$$\mathbf{X} = \mathbf{t} + \mathbf{R} \mathbf{x} + k \mathbf{x} \quad (1)$$

in cui

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{sono coordinate di punti,}$$

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \quad \text{parametri di traslazione,}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 1 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{matrice dei parametri di rotazione,}$$

k = parametro di scala ($1+k$ = fattore di scala)

e dove si considerano trascurabili le potenze e i prodotti di secondo ordine delle quantità $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e k^2 .

¹ Ad esempio, le trasformazioni tra le varie realizzazioni ITRF-YY del sistema di riferimento globale ITRS (International Terrestrial Reference System) e la realizzazione ETRF2000 del sistema di riferimento europeo ETRS89 adottano il modello di Helmert a 7 parametri, e di tali parametri considerano anche le rispettive variazioni nel tempo; cfr. (Boucher, Altamimi, 2011).

E' importante comunque tenere presente che le trasformazioni tra le coordinate di un insieme di n punti P_1, \dots, P_n dello spazio, supposti collegati rigidamente tra loro (come, in linea di principio, avviene per una rete geodetica) possono essere considerate secondo due approcci del tutto equivalenti: il primo, "passivo", nel quale i punti P_i rimangono nella *stessa posizione* e la trasformazione agisce sui sistemi di riferimento, collegandoli ed assegnando quindi a ciascun punto *due terne di coordinate distinte*, una per ciascun riferimento; il secondo, "attivo", nel quale la trasformazione agisce sui punti P_i "trasportandoli" in una *nuova posizione* dello *stesso riferimento*.

È evidente che, nel caso dei sistemi geodetici, l'approccio seguito è generalmente quello passivo. Tuttavia, per gli scopi della presente nota, nella quale ci si propone di evidenziare un'analogia col caso meccanico di un corpo quasi rigido, è più conveniente seguire l'approccio attivo, secondo il quale la trasformazione delle coordinate della rete tra due sistemi geodetici viene interpretata come un moto quasi rigido della rete stessa rispetto ad un riferimento "fisso" spaziale \mathbf{S} .

È inoltre conveniente, in questa nota, adottare per il riferimento \mathbf{S} le coordinate baricentriche – trattandosi solo di rotazioni e parametro di scala – cosicché \mathbf{S} avrà l'origine posta nel baricentro della rete $\{P_1, \dots, P_n\}$. L'adozione di coordinate baricentriche – che si ottengono semplicemente sottraendo alle coordinate "ordinarie" dei singoli punti quelle del comune

² La scelta dei segni dei parametri di rotazione qui effettuata è funzionale ad un più immediato confronto con l'analogia meccanica illustrata nel seguito. È ovvio peraltro che tale scelta è irrilevante ai fini della correttezza del modello (1) – cfr. ad es. (Boucher, Altamimi, 2011) e (Torge, Müller, 2012) per due scelte opposte. È sufficiente solo che i segni formalmente attribuiti agli elementi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ della matrice \mathbf{R} siano tali che elementi contigui abbiano segni opposti e che $\mathbf{R} - \mathbf{I}_3 = -(\mathbf{R} - \mathbf{I}_3)^T$.

baricentro – non comporta alcuna perdita di generalità poiché, come mostrato in (Maseroli, Surace, 2007), tale scelta non provoca alcuna variazione nella stima ai minimi quadrati di parametri di rotazione e di scala, che risulta identica a quella che si avrebbe operando con coordinate non baricentriche³.

Si avrà quindi, in sostituzione di (1), il seguente modello, applicato a ciascun punto P_i della rete, nel quale sono assenti i parametri di traslazione t_1, t_2, t_3 , in esito all'adozione delle coordinate baricentriche:

$$\mathbf{X}^i = \mathbf{x}^i + d\mathbf{R} \mathbf{x}^i + dk \mathbf{x}^i \quad (2)$$

dove

$$\mathbf{X}^i = \begin{pmatrix} X_1^i \\ X_2^i \\ X_3^i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^i = \begin{pmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ x_3^i \end{pmatrix},$$

$$d\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & -d\alpha_3 & d\alpha_2 \\ d\alpha_3 & 0 & -d\alpha_1 \\ -d\alpha_2 & d\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n$$

in cui (x_1^i, x_2^i, x_3^i) sono ora le coordinate baricentriche di P_i

nella configurazione iniziale e (X_1^i, X_2^i, X_3^i) le coordinate baricentriche di P_i in una configurazione finale (prossima) e dove tutte le coordinate sono riferite ad un unico sistema spaziale S . Inoltre, trattandosi di piccoli spostamenti $d\mathbf{x}^i = \mathbf{X}^i - \mathbf{x}^i$ (dalla configurazione iniziale a quella finale), si è utilizzata anche per i parametri la notazione $d\alpha_1, d\alpha_2, d\alpha_3$ e dk , che risulterà più conveniente per le successive considerazioni, trattando tali parametri come incrementi di piccola entità rispetto al valore zero.

2. STIMA DEI PARAMETRI DI ROTAZIONE E DI SCALA NELL'IMPOSTAZIONE CLASSICA

Applicando in modo usuale al modello (2) il principio dei minimi quadrati per la stima dei parametri $d\alpha_1, d\alpha_2, d\alpha_3$ e dk , a partire dalle coordinate (x_1^i, x_2^i, x_3^i) e (X_1^i, X_2^i, X_3^i) dei punti P_1, \dots, P_n , si procede, come ben noto, partendo dal sistema di equazioni generatrici

$$\mathbf{A} \mathbf{p} = \mathbf{b} \quad (3)$$

dove

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} d\alpha_1 \\ d\alpha_2 \\ d\alpha_3 \\ dk \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^n \end{pmatrix},$$

$$A_i \text{ (sottomatrice } i\text{-esima)} = \begin{pmatrix} 0 & x_3^i & -x_2^i & x_1^i \\ -x_3^i & 0 & x_1^i & x_2^i \\ x_2^i & -x_1^i & 0 & x_3^i \end{pmatrix},$$

$$d\mathbf{x}^i = \begin{pmatrix} dx_1^i \\ dx_2^i \\ dx_3^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1^i - x_1^i \\ X_2^i - x_2^i \\ X_3^i - x_3^i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n$$

e applicando il principio dei minimi quadrati ai residui \mathbf{v} del sistema di equazioni generate $\mathbf{A} \mathbf{p} - \mathbf{b} = \mathbf{v}$ si ottiene la funzione quadratica da minimizzare rispetto ai parametri

$$\mathbf{v}^T \mathbf{v} = \mathbf{b}^T \mathbf{b} + \mathbf{p}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{p} - 2 \mathbf{p}^T \mathbf{A}^T \mathbf{b} = \min \quad (4)$$

e dal differenziale di questa uguagliato a zero si ha infine il sistema normale risolutivo:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{p} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (5)$$

nel quale

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \sum_i A_i^T A_i = \begin{bmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \sum_i (x_2^{i2} + x_3^{i2}) & -\sum_i x_1^i x_2^i & -\sum_i x_1^i x_3^i \\ -\sum_i x_1^i x_2^i & \sum_i (x_3^{i2} + x_1^{i2}) & -\sum_i x_2^i x_3^i \\ -\sum_i x_1^i x_3^i & -\sum_i x_2^i x_3^i & \sum_i (x_1^{i2} + x_2^{i2}) \end{bmatrix}, \quad (6a)$$

$$a^2 = \sum_i (x_1^{i2} + x_2^{i2} + x_3^{i2}) \quad (6b)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \sum_i (x_2^i dx_3^i - x_3^i dx_2^i) \\ \sum_i (x_3^i dx_1^i - x_1^i dx_3^i) \\ \sum_i (x_1^i dx_2^i - x_2^i dx_1^i) \\ \sum_i (x_1^i dx_1^i + x_2^i dx_2^i + x_3^i dx_3^i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i \mathbf{x}^i \wedge d\mathbf{x}^i \\ \sum_i \mathbf{x}^i \cdot d\mathbf{x}^i \end{bmatrix} \quad (6c)$$

(il simbolo \wedge indica l'ordinario prodotto vettoriale)

3. STIMA DEI PARAMETRI DI ROTAZIONE E DI SCALA NELL'IMPOSTAZIONE "MECCANICA"

La sottomatrice simmetrica \mathbf{J} di $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ nella (6) riporta, in diagonale principale, somme di quadrati e, fuori diagonale, termini misti di 2° grado secondo lo schema tipico delle matrici dei sistemi normali ma, in questo caso, poiché i suddetti

³ Nel lavoro citato è stato seguito l'approccio "passivo" e sono stati quindi considerati due sistemi di riferimento e poi adottate per entrambi coordinate baricentriche, ma le medesime conclusioni valgono naturalmente anche seguendo l'approccio "attivo" nel quale si avrà il corpo semi-rigido $\{P_1, \dots, P_n\}$ individuato nello stesso sistema S dalle coordinate $(\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^n)$ nella configurazione iniziale e dalle coordinate $(\mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^n)$ nella configurazione finale, collegata alla prima da una rotazione spaziale, e una variazione di scala, intorno al baricentro di $\{P_1, \dots, P_n\}$, origine del sistema S .

elementi sono formati a partire dalle coordinate dell'insieme di punti $\{P_1, \dots, P_n\}$ nella configurazione iniziale, \mathbf{J} ha la forma e il significato di un *tensore di inerzia*.

Ciò suggerisce di riesaminare il problema della stima ai minimi quadrati dei parametri di rotazione e di scala evidenziandone le analogie dal punto di vista meccanico. A tale scopo, quindi, è utile riformulare il modello (2), in modo del tutto equivalente, con la notazione seguente, più vicina al caso meccanico,

$$d\mathbf{x}^i = \mathbf{X}^i - \mathbf{x}^i = d\boldsymbol{\alpha} \wedge \mathbf{x}^i + dk \mathbf{x}^i \quad (7)$$

dove, al solito,

$$\mathbf{X}^i = \begin{pmatrix} X_1^i \\ X_2^i \\ X_3^i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^i = \begin{pmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ x_3^i \end{pmatrix}, \quad d\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} d\alpha_1 \\ d\alpha_2 \\ d\alpha_3 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n$$

e $\mathbf{X}^i, \mathbf{x}^i$ sono qui i raggi vettori dei punti $P_i, i = 1, \dots, n$, nelle configurazioni finale ed iniziale rispettivamente, rispetto all'origine del sistema di riferimento \mathbf{S} (che, per le ipotesi fatte, coincide col baricentro di $\{P_1, \dots, P_n\}$).

Immaginando ora di effettuare la trasformazione nell'intervallo di tempo dt , la (7) diventa

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \dot{\boldsymbol{\alpha}} \wedge \mathbf{x}^i + \dot{k} \mathbf{x}^i, \quad i = 1, \dots, n \quad (7a)$$

che, nel caso $\dot{k}=0$ (cioè $dk=0$), descrive la cinematica del moto di rotazione di ciascuno dei punti P_1, \dots, P_n , supposti di massa unitaria e rigidamente tra loro collegati, intorno ad un punto fisso ad essi solidale, animati da una velocità angolare $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ che possiamo attribuire al corpo *rigido* $C = \{P_1, \dots, P_n\}$ (vds. Appendice). Se, più in generale, $\dot{k} \neq 0$, il termine $\dot{k} \mathbf{x}^i$ introduce nel modello la componente cinematica dello spostamento radiale del punto P_i del corpo C rispetto all'origine, tra le due configurazioni (x_1^i, x_2^i, x_3^i) e

(X_1^i, X_2^i, X_3^i) . In altri termini, $\dot{k} \mathbf{x}^i$ può interpretarsi come la *velocità di deformazione⁴ del corpo C* (che, in questo caso più generale, potremmo definire *semi-rigido*) nella direzione di \mathbf{x}^i .

Tenendo inoltre presenti le identità $(\dot{\boldsymbol{\alpha}} \wedge \mathbf{x}^i) \cdot \mathbf{x}^i = 0$ e $\mathbf{x}^i \wedge \mathbf{x}^i = \mathbf{0}$, è possibile ricavare immediatamente le seguenti relazioni dalla (7a), rispettivamente elevandola al quadrato, moltiplicandola vettorialmente a sinistra per \mathbf{x}^i e moltiplicandola scalarmente per \mathbf{x}^i , e infine sommando per $i = 1, \dots, n$

$$\sum_i (\dot{\mathbf{x}}^i)^2 = \sum_i (\dot{\boldsymbol{\alpha}} \wedge \mathbf{x}^i)^2 + \dot{k}^2 \sum_i (\mathbf{x}^i)^2 \quad (8)$$

$$\sum_i \mathbf{x}^i \wedge (\dot{\boldsymbol{\alpha}} \wedge \mathbf{x}^i) = \sum_i \mathbf{x}^i \wedge \dot{\mathbf{x}}^i \quad (9)$$

$$\dot{k} \sum_i (\mathbf{x}^i)^2 = \sum_i \mathbf{x}^i \cdot \dot{\mathbf{x}}^i \quad (10)$$

Si noti che le moltiplicazioni suddette, che conducono alle (9) e (10) a partire dalla (7a), *corrispondono esattamente alla moltiplicazione a sinistra della (3) per \mathbf{A}^T per ottenere la (5)*.

Il primo membro della (8), diviso per due, rappresenta l'energia cinetica totale del corpo semi-rigido⁵ C , mentre i termini al secondo membro, divisi per due, rappresentano rispettivamente l'energia cinetica rotazionale (vds. Appendice) e l'energia cinetica di deformazione radiale di C ; da notare però che la (8) fornisce il corretto bilancio dell'energia cinetica solo nell'ipotesi (semplificativa) che valga *rigorosamente* il modello (7a), cioè ipotizzando che le sole deformazioni del corpo siano quelle modellabili col parametro di scala \dot{k} . La (9), come si vedrà meglio nel paragrafo 4, contiene al primo membro la matrice (tensore di inerzia) \mathbf{J} moltiplicata per $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ e al secondo membro il *momento angolare* di C rispetto al suo baricentro. Dalla (10) infine è possibile ricavare subito \dot{k} (si noti anche che, per la (10), $\dot{k} \neq 0$ se e solo se $\sum_i (\mathbf{x}^i)^2$ non stazionaria).

E' importante però osservare che, mentre nel caso delle reti geodetiche l'ipotesi di deformazione modellata da un parametro di scala è plausibile a motivo di possibili diverse metodiche utilizzate per la misura delle distanze in due diversi sistemi di riferimento (si pensi ad esempio alle reti geodetiche fondamentali classiche, dimensionate con i distanziometri elettronici, e alle stesse reti determinate con metodi satellitari), nel caso meccanico del corpo semi-rigido l'ipotesi di un parametro di scala "isotropo" risulterebbe un po' troppo semplificativa (a meno di non limitarsi, ad es., alle deformazioni termiche di un corpo metallico). Tale ipotesi viene comunque ammessa allo scopo di evidenziare le analogie tra i due casi.

La (7a), dunque, non tiene conto delle deformazioni residue (cioè, non modellate dal parametro di scala isotropo) ed è pertanto conveniente procedere, come per i minimi quadrati, completando il modello nel modo seguente

$$\dot{\mathbf{x}}^i - \dot{\boldsymbol{\alpha}} \wedge \mathbf{x}^i - \dot{k} \mathbf{x}^i = \mathbf{v}^i, \quad i = 1, \dots, n$$

nel quale entrano ora i residui \mathbf{v}^i che tengono conto di tali deformazioni.

Elevando al quadrato e semplificando si ottiene

$$\sum_i (\mathbf{v}^i)^2 = \sum_i (\dot{\mathbf{x}}^i)^2 + \sum_i \left[(\dot{\boldsymbol{\alpha}} \wedge \mathbf{x}^i)^2 + \dot{k}^2 (\mathbf{x}^i)^2 \right] - 2 \sum_i \left[(\dot{\boldsymbol{\alpha}} \wedge \mathbf{x}^i) \cdot \dot{\mathbf{x}}^i + \dot{k} \mathbf{x}^i \cdot \dot{\mathbf{x}}^i \right] \quad (11)$$

che è in forma analoga alla (4).

⁴ Naturalmente, non si ha qui una *reale* deformazione del corpo C , come non si ha una *reale* rotazione (i punti di C nella realtà si assumono fissi): nell'approccio "attivo" qui adottato, tuttavia, come detto in Premessa si immagina che sia la trasformazione ad agire sui punti "spostandoli" nella nuova configurazione. La *reale* deformazione, pertanto, così come la *reale* rotazione, sono *relative piuttosto ai sistemi di riferimento, e ogni affermazione, qui e nel seguito, sul moto rigido o sulla deformazione di C dovrà essere intesa in questo senso*, sia pur procedendo secondo l'approccio attivo suddetto, che ci consente di sviluppare pienamente l'analogia meccanica.

⁵ Vds. precedente nota 4.

Interpretando la (11) in termini “energetici”, essa può essere espressa come segue

$$\sum_i (\mathbf{v}^i)^2 = \sum_i (\dot{\mathbf{x}}^i)^2 - \sum_i (\dot{\boldsymbol{\alpha}} \wedge \mathbf{x}^i) \left[2\dot{\mathbf{x}}^i - (\dot{\boldsymbol{\alpha}} \wedge \mathbf{x}^i) \right] - \sum_i \dot{k} \mathbf{x}^i \cdot \left[2\dot{\mathbf{x}}^i - \dot{k} \mathbf{x}^i \right] \quad (11a)$$

dove, al secondo membro, compaiono separatamente il termine energetico rotazionale, contenente il parametro $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$, e il termine energetico di deformazione radiale, contenente il parametro \dot{k} , rispettivamente.

In completa analogia con il procedimento dei minimi quadrati, si procede ora alla minimizzazione dei residui⁶ nella (11a), il che si traduce, in termini meccanici, nella stima dei valori di tali parametri che rende minima l’energia residua di deformazione, genericamente individuata dal primo membro della (11a). Considerando dunque il differenziale della (11a) rispetto ai parametri $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ e \dot{k} e applicando l’identità vettoriale $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$ si ottiene, uguagliando a zero,

$$\begin{aligned} d\dot{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \sum_i \mathbf{x}^i \wedge (\dot{\boldsymbol{\alpha}} \wedge \mathbf{x}^i) + \dot{k} d\dot{k} \sum_i (\mathbf{x}^i)^2 \\ - d\dot{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \sum_i \mathbf{x}^i \wedge \dot{\mathbf{x}}^i - d\dot{k} \sum_i \mathbf{x}^i \cdot \dot{\mathbf{x}}^i = 0 \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} \left[\sum_i \mathbf{x}^i \wedge (\dot{\boldsymbol{\alpha}} \wedge \mathbf{x}^i) - \sum_i \mathbf{x}^i \wedge \dot{\mathbf{x}}^i \right] \cdot d\dot{\boldsymbol{\alpha}} \\ + \left[\dot{k} \sum_i (\mathbf{x}^i)^2 - \sum_i \mathbf{x}^i \cdot \dot{\mathbf{x}}^i \right] d\dot{k} = 0 \end{aligned}$$

Per l’arbitrarietà degli incrementi $d\dot{\boldsymbol{\alpha}}$, $d\dot{k}$ e poiché i termini tra parentesi quadre sono funzioni solo di $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ e di \dot{k} rispettivamente, si ha

$$\sum_i \mathbf{x}^i \wedge (\dot{\boldsymbol{\alpha}} \wedge \mathbf{x}^i) = \sum_i \mathbf{x}^i \wedge \dot{\mathbf{x}}^i \quad (12)$$

$$\dot{k} \sum_i (\mathbf{x}^i)^2 = \sum_i \mathbf{x}^i \cdot \dot{\mathbf{x}}^i \quad (13)$$

che coincidono con le (9), (10) rispettivamente, ma la cui deduzione ora assume un ben preciso significato meccanico⁷ ed è *perfettamente analoga al procedimento ai minimi quadrati che, a partire dalla (4), ha condotto alla deduzione della (5)*.

Si osservi per inciso che, per semplificare la trattazione, nella deduzione del sistema normale (5) non sono stati considerati gli

⁶ Le deformazioni residue, non modellate, vengono quindi trattate alla stregua di errori accidentali.

⁷ A titolo puramente esemplificativo, si noti che le (12) e (13) potrebbero essere utilizzate per determinare la velocità di rotazione $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ e la variazione di scala \dot{k} di una realizzazione ITRF-YY, rispetto al suo baricentro, a partire dal campo di velocità $\dot{\mathbf{x}}^i$, $i = 1, \dots, n$, dei punti della rete geodetica della realizzazione. La (13) in effetti consente il calcolo immediato di \dot{k} ; la (12) può invece essere espressa in forma matriciale in funzione di \mathbf{J} e di $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$, cfr. (15), e quindi facilmente risolta.

eventuali pesi da assegnare a ciascun punto P_i . In ogni caso, sarebbe facile verificare che, anche adottando i pesi, i risultati non cambiano: i pesi nel senso dei minimi quadrati troverebbero perfetto riscontro nei pesi, o nelle masse, nell’impostazione meccanica.

Sostituendo infine le espressioni (12), (13) nella (11a) e applicando di nuovo l’identità vettoriale $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$ si ottiene

$$\sum_i (\mathbf{v}^i)^2 = \sum_i (\dot{\mathbf{x}}^i)^2 - \sum_i (\dot{\boldsymbol{\alpha}} \wedge \mathbf{x}^i)^2 - \dot{k}^2 \sum_i (\mathbf{x}^i)^2 \quad (14)$$

che, come era da attendersi, esprime l’energia di deformazione residua (calcolata in conseguenza alla stima dei parametri $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ e \dot{k}) semplicemente come differenza tra l’energia cinetica totale e la somma dell’energia cinetica rotazionale e di deformazione radiale, e che evidentemente si annulla solo nell’ipotesi semplificativa che tutte le deformazioni siano modellate dal parametro di scala \dot{k} (si confronti la (14) con la (8))

4. CONFRONTO TRA LE DUE IMPOSTAZIONI

Per rendere più evidente l’analogia tra l’impostazione “numerica” di stima dei parametri e l’impostazione “meccanica”, è utile concentrare l’attenzione sulle espressioni (12) e (13), che possiamo intanto riscrivere nel modo seguente

$$\sum_i \mathbf{x}^i \wedge (d\dot{\boldsymbol{\alpha}} \wedge \mathbf{x}^i) = \sum_i \mathbf{x}^i \wedge d\dot{\mathbf{x}}^i \quad (12a)$$

$$d\dot{k} \sum_i (\mathbf{x}^i)^2 = \sum_i \mathbf{x}^i \cdot d\dot{\mathbf{x}}^i \quad (13a)$$

nelle quali, con l’eliminazione del tempo dt , si è tornati ad una notazione puramente “geometrica”.

E’ chiaro intanto che la (13a), che come già osservato fornisce subito l’espressione di $d\dot{k}$, è equivalente all’equazione per $d\dot{k}$ contenuta nel sistema (5).

E’ facile mostrare inoltre che la (12a) coincide con il sottosistema del sistema (5) dato da

$$\mathbf{J} \cdot d\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \sum_i \mathbf{x}^i \wedge d\dot{\mathbf{x}}^i \quad (15)$$

Applicando infatti l’identità vettoriale $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ al primo membro della (12a) si ha

$$\sum_i (\mathbf{x}^i)^2 d\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \sum_i (\mathbf{x}^i \cdot d\dot{\boldsymbol{\alpha}}) \mathbf{x}^i = \sum_i \mathbf{x}^i \wedge d\dot{\mathbf{x}}^i \quad (16)$$

che coincide esattamente con la (15). Per verificarlo basta esplicitare, componente per componente, il primo membro della (16) (vds. Appendice).

5. CONCLUSIONI

Seguendo l’impostazione meccanica sopra illustrata, equivalente a quella classica “numerica” ai minimi quadrati, risulta evidente la ragione per cui *il minore principale \mathbf{J} della matrice normale $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ nella (5) ha la forma ed il significato di*

un tensore di inerzia, in quanto, in tale impostazione, la trasformazione di coordinate di una rete geodetica è assimilata al moto di rotazione intorno al baricentro di un corpo semi-rigido, le cui equazioni cinematiche coinvolgono, come noto, anche il tensore di inerzia relativo alla sua distribuzione di masse.

Anche le componenti $\sum_i \mathbf{x}^i \wedge d\mathbf{x}^i$ (vettoriale) e $\sum_i \mathbf{x}^i \cdot d\mathbf{x}^i$ (scalare) del termine noto $\mathbf{A}^T \mathbf{b}$ nella (6c) possono essere lette, rispettivamente, come spostamento “trasversale” complessivo del corpo semi-rigido $C = \{P_1, \dots, P_n\}$ e come deformazione radiale complessiva del corpo rispetto al baricentro⁸. In particolare, se si torna alla notazione “cinematica” (9), la componente vettoriale $\sum_i \mathbf{x}^i \wedge d\mathbf{x}^i$ diventa $\sum_i \mathbf{x}^i \wedge \dot{\mathbf{x}}^i$ e rappresenta quindi il *momento angolare* del corpo (vds. Appendice).

BIBLIOGRAFIA

Boucher C., Altamimi Z., 2011, Memo: Specifications for reference frame fixing in the analysis of a EUREF GPS campaign. *EUREF Guidelines* (www.euref.eu/euref_docs.html)

Corben H.C., Stehle P., 1994. *Classical Mechanics, 2nd Edition*. Dover Publications, New York, pp. 38-40; 141-142

Maseroli R., Surace L., 2007, Coordinate baricentriche e trasformazione di Helmert. *Bollettino di Geodesia e Scienze Affini*, vol. LXVI, n.4, pp. 221-238.

Torge W., Müller J., 2012, *Geodesy, 4th Edition*. De Gruyter, Berlin/Boston, pp.240-244.

⁸ Vds. precedente nota 4

APPENDICE⁹

Cinematica del corpo rigido con un punto fisso

Per un corpo rigido $C = \{P_1, \dots, P_n\}$, rotante intorno ad un suo punto fisso O , origine di un sistema di riferimento \mathbf{S} cui le coordinate dei punti di C sono riferite, vale la seguente relazione

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{x}^i\|^2 = 2 \mathbf{x}^i \cdot \dot{\mathbf{x}}^i = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (A1)$$

dove \mathbf{x}^i è il raggio vettore del punto P_i .

La (A1) può essere espressa nel modo seguente

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \dot{\boldsymbol{\alpha}}^i \wedge \mathbf{x}^i, \quad i = 1, \dots, n \quad (A2)$$

dove $\dot{\boldsymbol{\alpha}}^i$ è un vettore assiale denominato velocità angolare di P_i intorno all'origine O .

($\dot{\boldsymbol{\alpha}}^i$ tuttavia non è definito in modo unico dalla (A2): ad esempio, per il vettore $\dot{\boldsymbol{\alpha}}_0^i = \dot{\boldsymbol{\alpha}}^i + a^i \mathbf{x}^i$ si ha $\dot{\boldsymbol{\alpha}}_0^i \wedge \mathbf{x}^i = \dot{\boldsymbol{\alpha}}^i \wedge \mathbf{x}^i$).

In virtù della rigidità di C , per due punti qualsiasi $P_i, P_j \in C$ vale la seguente relazione

$$(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j) \cdot (\dot{\mathbf{x}}^i - \dot{\mathbf{x}}^j) = 0 \quad (A3)$$

che equivale alla condizione che P_i e P_j rimangano sempre alla stessa distanza l'uno dall'altro.

Dalle (A2) e (A3) segue poi, per sostituzione e usando l'identità vettoriale $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$,

$$(\dot{\boldsymbol{\alpha}}^i - \dot{\boldsymbol{\alpha}}^j) \cdot \mathbf{x}^i \wedge \mathbf{x}^j = 0 \quad (A4)$$

Affinché la (A4) sia soddisfatta per ogni coppia di punti P_i, P_j di C è necessario (e evidentemente sufficiente) che

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}^i = \dot{\boldsymbol{\alpha}} + a^i \mathbf{x}^i, \quad i = 1, \dots, n \quad (A5)$$

dove $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ è indipendente da i .

Infatti, dalla (A4) segue che $\dot{\boldsymbol{\alpha}}^i - \dot{\boldsymbol{\alpha}}^j$ è combinazione lineare di \mathbf{x}^i e di \mathbf{x}^j :

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}^i - \dot{\boldsymbol{\alpha}}^j = a^{ij} \mathbf{x}^i + b^{ij} \mathbf{x}^j, \quad i, j = 1, \dots, n$$

e quindi

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}^i - a^{ij} \mathbf{x}^i = \dot{\boldsymbol{\alpha}}^j + b^{ij} \mathbf{x}^j = \dot{\boldsymbol{\alpha}} \quad (A6)$$

Ora, si può dimostrare che lo scalare $-a^{ij}$ è indipendente da j e, analogamente, lo scalare b^{ij} è indipendente da i (basta considerare un terzo punto P_k), cosicché il vettore $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ nella (A6) è ben definito e, pertanto, la (A5) vale per ogni $i = 1, \dots, n$.

Il vettore $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ definisce perciò la *velocità angolare del corpo rigido C nel suo insieme*.

La (A2) quindi ammette ora l'espressione, in cui $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ è unico per tutti i punti,

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \dot{\boldsymbol{\alpha}} \wedge \mathbf{x}^i, \quad i = 1, \dots, n \quad (A7)$$

La velocità angolare $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ di C può tuttavia essere meglio caratterizzata nel modo seguente. Siano $\bar{\mathbf{x}}^i$ le coordinate di un punto P_i del corpo rigido C in un sistema di riferimento $\bar{\mathbf{S}}$ solidale con C e con l'origine nel punto fisso O e \mathbf{x}^i le coordinate di P_i nel sistema fisso spaziale \mathbf{S} , anch'esso con l'origine nel punto O . Sia \mathbf{R} la matrice 3×3 ortogonale (cioè $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}_3$) che lega le coordinate \mathbf{x}^i e $\bar{\mathbf{x}}^i$:

$$\bar{\mathbf{x}}^i = \mathbf{R} \mathbf{x}^i \quad (A8)$$

Il moto di C può allora essere descritto considerando \mathbf{R} come funzione del tempo. Differenziando la (A8) si ha

$$\mathbf{0} = \dot{\bar{\mathbf{x}}}^i = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{x}^i + \mathbf{R} \dot{\mathbf{x}}^i$$

dove le derivate $\dot{\bar{\mathbf{x}}}^i$ si annullano perché $\bar{\mathbf{S}}$ è solidale con C , e quindi

$$\dot{\mathbf{x}}^i = -\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} \mathbf{x}^i = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}^i \quad (A9)$$

dove $\boldsymbol{\Omega} = -\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}}$. La matrice $\boldsymbol{\Omega}$ è antisimmetrica ($\boldsymbol{\Omega} = -\boldsymbol{\Omega}^T$) come è facile verificare differenziando l'identità $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}_3$.

Perciò

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (A10)$$

e la (A9) può essere espressa nel modo seguente

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}^i, \quad i = 1, \dots, n$$

in cui $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3)^T$ costituisce un'espressione "costruttiva", a partire da \mathbf{R} , dell'omologa quantità $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ nella (A7).

Il *momento angolare* \mathbf{L} del corpo rigido C rotante intorno al punto fisso O , origine del sistema di riferimento, è definito, come noto, dall'espressione

$$\mathbf{L} = \sum_i m^i \mathbf{x}^i \wedge \dot{\mathbf{x}}^i \quad (A11)$$

⁹ Cfr. (Corben, Stehle, 1994)

e, sostituendovi la (A7) e utilizzando l'identità vettoriale $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$, si esprime anche come

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i m^i \mathbf{x}^i \wedge (\dot{\boldsymbol{\alpha}} \wedge \mathbf{x}^i) = \\ &= \sum_i m^i \left[(\mathbf{x}^i)^2 \dot{\boldsymbol{\alpha}} - (\mathbf{x}^i \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}) \mathbf{x}^i \right] \end{aligned} \quad (\text{A12})$$

che, utilizzando la notazione matriciale, può essere scritta nella forma

$$\mathbf{L} = \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\alpha}} \quad (\text{A13})$$

dove

$$\mathbf{J} = m^i \begin{vmatrix} \sum_i (x_2^{i2} + x_3^{i2}) & -\sum_i x_1^i x_2^i & -\sum_i x_1^i x_3^i \\ -\sum_i x_1^i x_2^i & \sum_i (x_3^{i2} + x_1^{i2}) & -\sum_i x_2^i x_3^i \\ -\sum_i x_1^i x_3^i & -\sum_i x_2^i x_3^i & \sum_i (x_1^{i2} + x_2^{i2}) \end{vmatrix},$$

come è facile verificare sviluppando per componenti l'ultimo membro della (A12). Ad esempio, considerando la prima componente si ha

$$\begin{aligned} &\sum_i m^i (\mathbf{x}^i)^2 \dot{\alpha}_1 - \sum_i m^i (x_1^i \dot{\alpha}_1 + x_2^i \dot{\alpha}_2 + x_3^i \dot{\alpha}_3) x_1^i = \\ &= \sum_i m^i \left[\left((\mathbf{x}^i)^2 - (x_1^i)^2 \right) \dot{\alpha}_1 - x_2^i x_1^i \dot{\alpha}_2 - x_3^i x_1^i \dot{\alpha}_3 \right] = \\ &= \sum_i m^i \left[\left((x_2^i)^2 + (x_3^i)^2 \right) \dot{\alpha}_1 - x_2^i x_1^i \dot{\alpha}_2 - x_3^i x_1^i \dot{\alpha}_3 \right] \end{aligned}$$

che coincide con il prodotto della prima riga di \mathbf{J} con $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$. Analogamente per le altre due componenti.

\mathbf{J} è un *tensore di inerzia* e la (A13) rappresenta una delle equazioni fondamentali della meccanica del corpo rigido vincolato ad un punto fisso.

Anche l'*energia cinetica rotazionale* ammette una significativa espressione contenente il tensore di inerzia \mathbf{J} . Infatti, partendo dall'energia cinetica dall'espressione generale

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \sum_i m^i (\dot{\mathbf{x}}^i)^2$$

si ha, sostituendovi la (A7), utilizzando l'identità vettoriale $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$ e tenendo presenti la prima uguaglianza della (A12) e la (A13),

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{1}{2} \sum_i m^i (\dot{\boldsymbol{\alpha}} \wedge \mathbf{x}^i) \cdot (\dot{\boldsymbol{\alpha}} \wedge \mathbf{x}^i) = \\ &= \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \sum_i m^i \left[\mathbf{x}^i \wedge (\dot{\boldsymbol{\alpha}} \wedge \mathbf{x}^i) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{L} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\alpha}} \end{aligned} \quad (\text{A14})$$