

LA SOLUZIONE DI UN PROBLEMA DI METROLOGIA MECCANICA E ALCUNE OSSERVAZIONI SUL VALORE INTERDISCIPLINARE DELLE CONOSCENZE GEODETICHE

THE SOLUTION OF A MECHANICAL METROLOGY PROBLEM AND SOME REMARKS ON THE INTERDISCIPLINARY VALUE OF THE GEODETIC KNOWLEDGE

B. Benciolini^a, A. Vitti^a

^a Università degli Studi di Trento, Dipartimento di Ingegneria Civile Ambientale e Meccanica, via Mesiano 77, 38123 Trento, battista.benciolini@unitn.it, alfonso.vitti@unitn.it

PAROLE CHIAVE: AACMM, lavoro interdisciplinare

KEY WORDS: AACMM, interdisciplinary work

RIASSUNTO

Si descrive un modello cinematico di un braccio articolato che costituisce il componente fondamentale di una AACMM (Articulated Arm Coordinate Measuring Machine) e di un braccio robotico. Il modello è lo strumento per risolvere i problemi di funzionamento e di identificazione parametrica di una AACMM e di un braccio robotico. La descrizione del modello originale che è stato definito è seguita da alcune considerazioni sul carattere transdisciplinare del lavoro svolto.

ABSTRACT

We describe a kinematic model of an articulated arm that is the main component of an AACMM (Articulated Arm Coordinate Measuring Machine) and of a robotic arm. The operation and the parametric identification of an AACMM and of a robotic arm can be easily performed by means of the model. The original model that has been defined is described and the interdisciplinary nature of the job that we have developed is commented.

1. PRESENTAZIONE GENERALE DEL PROBLEMA TRATTATO E DEL LAVORO SVOLTO

Il lavoro che si descrive in questo scritto è stato svolto in ambito accademico su sollecitazione industriale. Una azienda che produce un dispositivo AACMM (Articulated Arm Coordinate Measuring Machine) ci ha chiesto di sviluppare alcune componenti del sistema di programmi che serve al funzionamento dello strumento stesso.

La richiesta arrivata da parte aziendale esprimeva il carattere interdisciplinare (o transdisciplinare) del lavoro. Il problema è stato annunciato, testualmente, come “un problema di topografia” pur essendo ovviamente, dal punto di vista applicativo, un problema di metrologia meccanica.

Una macchina tipo AACMM è costituita essenzialmente da una catena di aste collegate da cerniere cilindriche. Nelle cerniere si trovano dei goniometri le cui misure sono i dati primari da trattare. Le letture dei goniometri vengono usate assieme ad alcuni altri dati geometrici propri del sistema per calcolare le coordinate di una sonda che sta nella parte terminale dell'ultima delle aste.

Un braccio robotico è un oggetto molto diverso e svolge ovviamente delle funzioni diverse da una macchina di misura ma ha praticamente la stessa struttura geometrica. Di conseguenza gli algoritmi che servono per il funzionamento di una AACMM e di un braccio robotico si possono costruire sfruttando in gran parte lo stesso modello generale.

Abbiamo affrontato due problemi che sono noti in letteratura come *problema cinematico diretto* e *identificazione*. Il

problema cinematico diretto è semplicemente il calcolo delle coordinate della sonda di una AACMM. La identificazione è la determinazione dei parametri geometrici del sistema che devono essere stimati all'interno di un opportuno modello usando i dati raccolti su punti noti o su punti rilevati ripetutamente o ancora su punti appartenenti ad una particolare superficie. Abbiamo sostanzialmente trascurato un terzo problema, noto come *problema cinematico inverso*, la cui soluzione costituisce il nucleo di ogni algoritmo per il funzionamento di un braccio robotico.

Il lavoro svolto si può descrivere sommariamente per punti:

- definizione di un modello analitico che descrive la catena articolata e che fornisce direttamente la soluzione del problema cinematico diretto,
- linearizzazione delle equazioni del modello necessaria per la identificazione che è un tipico problema inverso,
- analisi della stimabilità dei parametri,
- realizzazione di programmi di calcolo e sperimentazioni.

Le Sezioni 2, 3 e 4 danno una sommaria descrizione del modello geometrico-analitico del braccio articolato e delle scelte operate nel definire il modello stesso e nel realizzare gli algoritmi che ne sono derivati. La descrizione non è completa; trascuriamo, tra le altre cose, i dettagli della linearizzazione delle equazioni e accenniamo appena all'uso dei quaternioni per svolgere alcune operazioni che coinvolgono le rotazioni. La descrizione dovrebbe essere comunque sufficiente per apprezzare il tipo di lavoro sviluppato e per riconoscere il ruolo svolto da conoscenze e procedure tipicamente geodetiche in un diverso ambito disciplinare. La Sezione 5 rimarca alcune

caratteristiche peculiari del modello che è stato definito. La Sezione 6 contiene alcune riflessioni che speriamo possano risultare di interesse. Si tratta di riflessioni sul carattere interdisciplinare del lavoro svolto e sullo stimolo al lavoro di ricerca che è stato dato dalla collaborazione industriale. La descrizione completa del nostro lavoro si trova in (Benciolini e Vitti, 2017); la descrizione di alcuni elementi si trova anche in (Benciolini e Vitti, 2011).

2. MODELLO ALGEBRICO-GEOMETRICO DEL BRACCIO ARTICOLATO

Consideriamo un braccio articolato formato da n elementi rigidi e da n cerniere. La prima cerniera si trova tra un supporto fissato nell'ambiente di lavoro e il primo elemento rigido. L'ultimo elemento rigido termina con la sonda di cui si devono determinare le coordinate.

Ogni elemento rigido è descritto geometricamente da un vettore nello spazio. Il vettore è la differenza di posizione tra due punti nello spazio. Tali punti non sono necessariamente punti fisicamente materializzati.

Ogni cerniera è descritta geometricamente da un versore che individua l'asse della rotazione permessa dalla cerniera.

La geometria propria del braccio cinematico è descritta dall'insieme di tutti i vettori associati agli elementi e tutti i versori associati alle cerniere considerati in una postura del braccio stesso detta postura base e scelta ad arbitrio. Qualsiasi altra postura è pienamente individuata dagli angoli di rotazione di tutte le cerniere tra la postura stessa e la postura base. La descrizione analitica del braccio articolato si realizza con un insieme di variabili scalari o vettoriali che corrispondono alle entità geometriche descritte sopra e con le espressioni matematiche che li legano. L'uso di variabili vettoriali implica la assunzione, meramente arbitraria, di un sistema di riferimento.

Le variabili che descrivono la geometria intrinseca del braccio e la sua postura sono:

- vettori associati agli elementi rigidi nella postura base,
- versori della direzione degli assi delle cerniere nella postura base,
- letture dei goniometri delle cerniere nella postura base,
- letture dei goniometri delle cerniere in una postura generica,
- vettore posizione della sonda.

Per le variabili menzionate si usano i simboli seguenti:

- \mathbf{r}_k ($k = 1..n$) vettore associato all'elemento rigido k in postura base,
- \mathbf{u}_k versore associato alla cerniera k in postura base,
- α_{0k} lettura del goniometro della cerniera k in postura base,
- α_k lettura del goniometro della cerniera k in postura generica,
- \mathbf{x} vettore delle coordinate della sonda.

Il legame tra le variabili inserite sopra è dato dalla espressione che fornisce \mathbf{x} in funzione di tutte le altre variabili. Si indica con $\mathbf{R}(\mathbf{u}, \alpha)$ la matrice (3x3) che opera una rotazione di angolo α attorno ad asse con direzione di \mathbf{u} .

La rotazione che l'elemento rigido k subisce nel passare dalla postura base alla postura attuale generica è data dalla combinazione di tutte le rotazioni delle cerniere che lo precedono. La matrice che rappresenta la rotazione complessiva applicata all'asta k è data quindi da:

$$\mathbf{P}_k = \prod_{l=1}^k \mathbf{R}(\mathbf{u}_l, (\alpha_l - \alpha_{0l})) \quad (1)$$

e la espressione di \mathbf{x} è quindi:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \sum_{k=1}^n \mathbf{P}_k \mathbf{r}_k \quad (2)$$

in cui resta implicita, attraverso le matrici \mathbf{P}_k , la dipendenza di \mathbf{x} dagli assi delle cerniere e dalle rotazioni.

Il vettore \mathbf{x}_0 contiene le coordinate del punto in cui si considera applicato il vettore del primo elemento rigido.

Le relazioni descritte sono di carattere analitico, è quindi possibile ricavare da queste le relazioni differenziali tra tutte le grandezze in gioco, in particolare sono di interesse le derivate dei parametri \mathbf{x} rispetto a tutti gli altri parametri.

Le rotazioni si rappresentano usando sia la notazione matriciale (come nelle espressioni 1 e 2) sia la notazione basata sui quaternioni. La rappresentazione delle rotazioni mediante l'algebra dei quaternioni è particolarmente vantaggiosa in questa applicazione per tre motivi principali:

- esiste un legame molto semplice tra le componenti del quaternioni di una rotazione e gli elementi geometrici della stessa, cioè asse e angolo,
- è facile operare la combinazione di rotazioni che produce \mathbf{P}_k ,
- è abbastanza facile esprimere le derivate che costituiscono i coefficienti delle equazioni linearizzate.

L'uso dei quaternioni è ben noto per la soluzione diretta del problema di Helmerl proposta da Sansò (1973), ma è evidente che i vantaggi dell'uso dei quaternioni per trattare le rotazioni non sono limitati a questa applicazione.

Per lo studio delle rappresentazioni delle rotazioni si possono vedere i testi di Altmann (1986) e di Kuipers (2002) e i contributi di Stuelpnagel (1964), Nitschke and Knickmeyer (2000) e Waldron and Schmiedeler (2008).

La espressione (2) si usa per il calcolo delle coordinate del punto terminale (sonda) di una AACMM e quindi fornisce la soluzione del problema cinematico diretto. Il modello già descritto è quindi sufficiente per il funzionamento della macchina di misura. I dati variabili da punto a punto sono gli α_k , che vengono forniti dai goniometri su richiesta dell'operatore in caso di macchina con sonda passiva (hard probe), o in modo automatico in caso di sonda con rilevamento di contatto (switching probe), oppure in modo programmato ad intervalli di tempo per rilevamenti densi di particolari estesi, salvo successiva selezione in base a parametri geometrici. Si utilizzano i valori costanti dei parametri descrittivi del braccio articolato provenienti dal progetto del sistema o meglio, per maggiore precisione, determinati nel processo di identificazione. La semplicità del procedimento di calcolo permette la esecuzione "in linea".

3. PROCEDURA PER LA IDENTIFICAZIONE DELLA CATENA CINEMATICA

Il procedimento si compone di raccolta dati e successiva stima dei parametri da svolgere fuori linea. La raccolta dei dati consiste nella simultanea registrazione dei valori di α_k e di informazioni di vario tipo sulla posizione del punto terminale del braccio articolato (punto di coordinate \mathbf{x}). La procedura di raccolta dei dati è diversa per il braccio articolato di una AACMM e per il braccio articolato di un sistema robotico, ma in ogni caso le informazioni disponibili sul punto terminale del braccio si descrivono geometricamente in uno dei modi seguenti:

- (a) le coordinate del punto sono note in un sistema di riferimento unico per tutti i punti coinvolti,
- (b) le coordinate del punto sono note in un sistema di riferimento non unico perché si usano sistemi di riferimento diversi per gruppi di punti,
- (c) le coordinate del punto sono incognite, ma lo stesso punto si raggiunge più volte con pose diverse del braccio articolato,
- (d) le coordinate del punto sono incognite, ma il punto appartiene ad una superficie nota almeno parzialmente (per esempio: piano con giacitura incognita, coppia di piani paralleli a distanza nota, sfera con tutti i parametri incogniti, sfera con centro incognito e raggio noto, coppia di sfere con raggio noto e distanza tra i centri nota).

Le equazioni formate dalla espressione (2) scritta per tutti i punti considerati e le equazioni eventualmente necessarie per descrivere le quattro situazioni elencate qui sopra formano un sistema di equazioni ridondanti che viene trattato secondo la teoria della stima a minimi quadrati e applicando un procedimento iterativo. In ogni iterazione si usano le equazioni in forma linearizzata e si aggiorna la soluzione.

La situazione (a) è quella più semplice da trattare numericamente, ma di fatto non è molto realistica nelle applicazioni. Le situazioni (a) e (b) richiedono l'utilizzo di un campione complesso che presenti un insieme di punti ben individuati e rilevabili e di coordinate note. Noi abbiamo utilizzato un campione di questo tipo solo in qualche fase preliminare del lavoro usando come campione una piastra di alluminio con un certo numero di punti incisi con un trapano. Questa metodica di lavoro è stata poi abbandonata. Le situazioni (c) e (d) elencate sopra sono le più tipiche e le più importanti. Per realizzare misure ripetute di uno stesso punto, come nel caso (c), si usa un campione costituito da un pezzo di metallo con un piccolo incavo di forma conica. La sonda dello strumento utilizzato termina in una piccola sfera. Appoggiando la sfera nella sede conica si riesce a occupare ripetutamente lo stesso punto con il centro della sfera. Nelle diverse rioccupazioni alcuni tra gli elementi del braccio articolato possono avere orientamento diverso. La situazione (d) può essere realizzata, come detto, con diversi tipi di campioni. Noi abbiamo usato una sfera con raggio noto (due pollici) e un manubrio costituito da due sfere di raggio noto (un pollice) con distanza tra i centri nota (pari nel nostro caso a 80 centimetri). L'uso di questi campioni è raccomandato in letteratura per il controllo della accuratezza dei risultati che si possono ottenere con una AACMM ma evidentemente può fornire anche le informazioni per svolgere la identificazione dei parametri.

4. LA RIDONDANZA DEL MODELLO E LA STIMABILITÀ DEI PARAMETRI

Si devono scegliere le variabili che possono e devono essere stimate nel processo di identificazione. La geometria intrinseca del braccio è descritta da un insieme di enti algebrici che qui si elencano:

- vettori associati agli elementi rigidi nella postura base,
- versori della direzione degli assi delle cerniere nella postura base,
- letture dei goniometri delle cerniere nella postura base.

Non è possibile stimare tutti questi enti per vari motivi che sono in particolare:

- la arbitrarietà del sistema di riferimento,
- la arbitrarietà della postura base,

- la invarianza della posizione della sonda rispetto a certe trasformazioni dei parametri.

Si deve poi considerare che se si esprime un versore con le sue componenti queste sono soggette ad un vincolo.

Qui si trattano tutti i quattro aspetti citati per valutare quali parametri si debbano stimare.

L'uso di grandezze vettoriali richiede la scelta di un sistema di riferimento. Il sistema stesso è arbitrario perché nessun elemento dell'apparato permette di individuare un sistema privilegiato. D'altra parte la posizione della sonda deve essere calcolata in un sistema legato allo strumento, ma deve essere poi trasformata in un sistema legato all'ambiente o all'oggetto con la ben nota trasformazione a sette parametri. L'arbitrarietà del sistema di riferimento richiede di fissare un opportuno insieme di parametri durante il processo di stima. Si possono per esempio fissare il vettore \mathbf{x}_0 e tre componenti opportunamente scelte dei vettori \mathbf{r}_k e \mathbf{u}_k . Tutto questo non è molto diverso da fissare alcune coordinate di punti di una rete topografica.

La scelta della postura base è anch'essa arbitraria e deve essere operata fissando un insieme di parametri. Una scelta conveniente è quella di fissare i valori dei parametri α_{0k} . I valori, una volta fissati, definiscono la postura base. Questo non significa che tutte le scelte siano altrettanto convenienti: una scelta comoda deve permettere di determinare facilmente i valori approssimati degli altri parametri. In pratica si procede nel modo seguente: si porta lo strumento in una postura comoda, per esempio con alcuni elementi allineati e altri ortogonali. In questa postura è facile attribuire un valore a tutte le componenti dei vettori \mathbf{r}_k e \mathbf{u}_k . Non ci si deve preoccupare di realizzare esattamente una certa postura, perché i valori delle componenti dei vettori \mathbf{r}_k e \mathbf{u}_k così ottenuti servono solo come valori approssimati per la linearizzazione delle equazioni. Nella stessa postura si leggono i valori indicati dai goniometri. Si fissano gli α_{0k} ai valori ottenuti e con questo si definisce la postura base.

Il modello rappresentato dalla espressione (2) è ridondante dal punto di vista algebrico. Tutti i parametri usati sono geometricamente significativi, e la descrizione geometrica che essi forniscono è anche legata, ancorché in modo non completo e rigoroso, ad una descrizione fisica della apparecchiatura. D'altra parte le coordinate della sonda \mathbf{x} espresse dalla (2) sono invarianti per alcune trasformazioni dell'insieme dei vettori \mathbf{r}_k .

Queste trasformazioni sono:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{(k-1),2} &= \mathbf{r}^{(k-1),1} - a\mathbf{u}_k \\ \mathbf{r}_{k,2} &= \mathbf{r}_{k,1} + a\mathbf{u}_k \end{aligned} \quad (3)$$

dove l'indice 1,2 si riferisce ai valori prima e dopo la trasformazione e la variabile a è un parametro della trasformazione. In altre parole \mathbf{x} risulta indipendente da $\mathbf{u}_k \cdot (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}^{(k-1)})$. La stima di tutte le componenti di tutti i vettori \mathbf{r}_k genererebbe quindi un sistema singolare. Abbiamo scelto di eseguire la stima mantenendo la variazione degli \mathbf{r}_k entro un sottospazio bidimensionale scelto in modo opportuno cioè ortogonale a \mathbf{u}_k .

I versori \mathbf{u}_k devono essere iterativamente calcolati con variazioni che rispettino il vincolo sulla norma (che è uguale a 1). Dunque anche la variazione di \mathbf{u}_k , come quella di \mathbf{r}_k , deve essere operata nel sottospazio ortogonale a \mathbf{u}_k . Si devono comunque rinormalizzare i versori stimati ad ogni iterazione per correggere gli effetti non lineari. In ogni iterazione si determina una base del sottospazio ortogonale a \mathbf{u}_k e si esprimono le variazioni di \mathbf{r}_k e \mathbf{u}_k usando questa base. In pratica si trovano con un semplice procedimento algebrico due versori ortogonali

a \mathbf{u}_k denominati \mathbf{v}_k e \mathbf{w}_k . Le variazioni di \mathbf{u}_k e \mathbf{r}_k prendono la forma: $\delta\mathbf{u}_k = a_k\mathbf{v}_k + b_k\mathbf{w}_k$ e $\delta\mathbf{r}_k = c_k\mathbf{v}_k + d_k\mathbf{w}_k$. I parametri che effettivamente si stimano sono quindi a_k, b_k, c_k e d_k .

5. ALCUNE CARATTERISTICHE DISTINTIVE DEL MODELLO PROPOSTO

Il modello che abbiamo definito per descrivere la catena articolata è significativamente diverso da quelli presenti nella letteratura specializzata. Il nostro modello pare simile solo a quello descritto da Horn (1987) pur con alcune differenze significative. I modelli maggiormente presenti nella letteratura sono quelli di Denavit e Hartenberg (1955) e di Sheth e Uicker (1971) che vengono citati in un gran numero di lavori. In particolare il modello di Denavit e Hartenberg è spesso trattato come uno standard di fatto. Il modello DH utilizza il formalismo delle coordinate omogenee e delle matrici omogenee che permettono di unificare la trattazione di parametri di posizione e di orientamento. Noi preferiamo utilizzare la geometria analitica ordinaria, l'algebra e l'analisi vettoriali e l'algebra dei quaternioni. Con questi strumenti riusciamo a utilizzare nel modello analitico solo elementi di preciso significato geometrico e fisico. Il nostro modello, inoltre, è completo e privo di singolarità indotte dalla scelta dei parametri. La analisi della ridondanza del modello e l'accurata scelta di quali parametri si debbano stimare permette di evitare le singolarità non essenziali cioè non legate alla struttura stessa del dispositivo. Questo tra l'altro permette di ottenere sempre una matrice normale non singolare senza la necessità di una regolarizzazione numerica.

L'utilizzo della stima a minimi quadrati è un fatto assolutamente scontato nell'ambito della cultura geodetica, mentre nell'ambito della metrologia meccanica si usa una varietà di metodi che ci pare non sempre ben giustificata, viste le note proprietà ottime delle stime a minimi quadrati.

Vari autori propongono la derivazione numerica delle equazioni per costruire il modello linearizzato, mentre noi abbiamo sempre usato la derivazione analitica.

6. OSSERVAZIONI SUL LAVORO

Una prima serie di commenti riguarda la importanza della relazione sviluppata con un ambiente industriale. La prima parte del lavoro, cioè la definizione di un modello e la sua implementazione per risolvere il problema cinematico diretto, è stata svolta sulla base di sollecitazioni di ambito industriale. Il successivo sviluppo del modello e dei programmi per eseguire anche l'identificazione (stima dei parametri propri del sistema di misura) è stata una iniziativa essenzialmente accademica. La richiesta iniziale formulata da una azienda di sviluppare un programma di calcolo che svolgesse certe funzioni è stata per noi la occasione di venire a conoscenza del problema che è stato trattato in questa ricerca. Successivamente alcune conversazioni quasi casuali riguardanti la raccolta delle misure hanno stimolato una riflessione su un paio di argomenti di trattamento delle osservazioni. Il primo è la necessità di una adeguata ridondanza se si vuole usare la stima della varianza dell'unità di peso $\hat{\sigma}_0^2$ come segnalatore delle situazioni anomale con particolare riferimento all'orientamento assoluto. Il secondo è uno studio sulla valutazione della qualità della disposizione dei punti nell'orientamento assoluto e ha prodotto il lavoro (Benciolini et al., 2016).

Ci sembra importante sottolineare l'importanza di trattare tutti i problemi con un adeguato approfondimento teorico. Non si intende con questo esaltare la trattazione astratta a scapito degli aspetti operativi. Vorremo invece richiamare la stretta relazione tra adeguata trattazione teorica dei problemi e soluzione dei problemi operativi. Le conoscenze utilizzate in questa ricerca sono sostanzialmente quelle che si applicano alla compensazione delle reti topografiche e dei blocchi fotogrammetrici. In questa ricerca ha giocato un ruolo importante la applicazione delle conoscenze sulla rappresentazione e il trattamento delle rotazioni. Sono conoscenze che derivano dallo studio del problema di Helmert, del problema dell'orientamento assoluto in fotogrammetria e di altri problemi fotogrammetrici. Lo studio dell'invarianza della posizione della sonda rispetto a certe componenti dello spazio dei parametri (Sezione 4) è stato in gran parte realizzato con conoscenze apprese trattando la calibrazione delle camere fotogrammetriche. La costruzione della base del sottospazio dei parametri stimabili è basata su una visione essenzialmente geometrica dei problemi di stima a minimi quadrati.

Il trasferimento delle conoscenze da un settore all'altro è stato reso possibile dalla cura prestata in tutte le occasioni ad uno studio ragionevolmente approfondito degli aspetti formali e teorici dei problemi.

Siamo convinti di avere realizzato un modello per descrivere il cinematico di un braccio articolato che è originale e che presenta alcuni pregi specifici. Sarebbe stato probabilmente impossibile produrre qualche cosa di originale se avessimo iniziato il lavoro studiando la letteratura di settore, che invece abbiamo preso in considerazione solo in un secondo momento, perché la conoscenza delle soluzioni già disponibili ci avrebbe fortemente condizionati. In questa occasione abbiamo sperimentato il singolare vantaggio di essere sostanzialmente dei neofiti.

7. CONCLUSIONI

Il lavoro che abbiamo descritto ci pare un esempio significativo di come si possano spendere le competenze geodetiche in settori applicativi anche lontani dalle nostre discipline. Esiste da lungo tempo un legame fra il trattamento delle osservazioni in geodesia e topografia e nella metrologia meccanica, ma nella applicazione che abbiamo presentato le competenze geodetiche sono state sfruttate anche per la definizione del modello fondamentale di una AACMM.

Il rapporto con una piccola azienda manifatturiera e l'occasione di lavorare su un tema completamente nuovo per noi hanno motivato l'inclusione nel testo delle osservazioni espresse nella Sezione 6.

8. BIBLIOGRAFIA

Altmann, S.L., 1986, *Rotations, Quaternions, and Double Groups*, Clarendon Press, Oxford.

Benciolini, B., Vitti, A., 2011, Calcolo delle coordinate in una poligonale tridimensionale in metrologia meccanica, *Atti del 15esimo convegno ASITA*, 1, 299–304.

Benciolini, B., Vitti, A., 2017, A new quaternion based kinematic model for the operation and the identification of an articulated arm coordinate measuring machine inspired by the geodetic methodology, *Mechanism and Machine Theory*, 112, 192–204, DOI 10.1016/j.mechmachtheory.2017.02.008.

Benciolini, B., Vitti, A., Zatelli, P., 2016, A practical quality index for the applied Helmert transformation, *Journal of Surveying Engineering of the ASCE*, 142, no. 1, 04015006 1-7, DOI 10.1061/(ASCE)SU.1943- 5428.0000161.

Denavit, J., Hartenberg, R.S., 1955, A kinematic notation for lower-pair mechanism based on matrices, *Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME*, 22, 215–221.

Horn, B.K.P., 1987, New Notation for Serial Kinematic Chains, url: people.csail.mit.edu/bkph/articles/New_Notation.pdf (16 Mar. 2017).

Kuipers, J.B., 2002, Quaternions and rotation sequences: a primer with applications to orbits, aerospace, and virtual reality, Princeton University Press, Oxford.

Nitschke, M., Knickmeyer, E.E., 2000, Rotation parameters, a survey of techniques, *Journal of Surveying Engineering of the ASCE*, 126.3, 69–105.

F. Sansò, F., 1973, An exact solution of the roto-translation problem, *Photogrammetria*, 29, 203–216.

Sheth, P.N., Uicker, J.J., 1971, A generalized symbolic notation for mechanisms, *Journal of Engineering for Industry*, 93, 102–112.

Stuelpnagel, J., 1964, On the parametrization of the three-dimensional rotation group, *SIAM Review*, 6.4, 422–430.

Waldron, K., Schmiedeler, J., 2008, *Kinematics*, *Springer Handbook of Robotics* (B. Siciliano, O. Khatib, eds.), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, pp. 9–33.