



# LA MODIFICA DELLE EQUAZIONI DI SOLDNER PER L'ESECUZIONE DEI CALCOLI GEODETICI IN COORDINATE DI GAUSS NELL'AMBITO DEL CAMPO SFERICO – PARTE 1: TEORIA

## MODIFICATION OF SOLDNER EQUATIONS FOR SOLVING GEODETIC PROBLEMS USING THE GAUSS COORDINATE SYSTEM IN THE LOCAL SPHERICAL FIELD – PART 1: THEORY

S. Di Filippo <sup>a</sup>

<sup>a</sup> Responsabile dell'Area Servizi Cartografici dell'Agenzia del Territorio (a.r.)

**PAROLE CHIAVE:** Soldner, campo sferico, Gauss, calcoli geodetici

**KEY WORDS:** Soldner equations, geodesy, Gauss coordinates, local sphere, spherical geometry

### RIASSUNTO:

Il presente lavoro trae origine da considerazioni di trigonometria sferica la quale, ricordiamo, definisce le relazioni esistenti tra i lati e gli angoli di un triangolo sferico. Al riguardo, le equazioni di Soldner, che si fondano proprio su teoremi di trigonometria sferica, mettono in relazione le coordinate geodetiche rettangolari di due punti della sfera, quando siano conosciute la lunghezza della linea geodetica che li unisce e l'azimut piano da questa formato nel primo dei due vertici considerati. Nel suddetto sistema di coordinate trovano quindi soluzione i due problemi fondamentali della geodesia.

Le citate equazioni trovano generale impiego nella rappresentazione di Cassini-Soldner, dove le coordinate geodetiche rettangolari coincidono con le coordinate plano-cartografiche, poiché consentono di risolvere i problemi geodetici senza dover passare per il calcolo del modulo di deformazione lineare, nonché della riduzione alla corda e della deformazione angolare (la suddetta rappresentazione infatti non è conforme).

La modifica delle equazioni di Soldner, proposta in questo studio, permette di applicare la medesima modalità operativa, quando occorra affrontare gli stessi problemi geodetici, utilizzando il sistema di coordinate di Gauss. In quest'ultimo caso, poiché la larghezza dei fusi supera di molto quella del campo sferico, le formule di Soldner possono cadere progressivamente in difetto, quando si operi a notevole distanza (maggiore di 180km) dal meridiano centrale e quindi per mantenere immutato il rigore dei risultati è necessario diminuire la lunghezza della linea geodetica rispetto a quella ammessa nel campo sferico.

A questo documento segue una seconda parte dedicata ad applicazioni numeriche e complementi di quanto qui trattato.

### ABSTRACT:

The present work originates from considerations of spherical trigonometry which, we recall, defines the relations existing between the sides and angles of a spherical triangle. In this regard, Soldner's equations, which are based precisely on spherical trigonometry theorems, relate the rectangular geodesic coordinates of two points of the sphere, when the length of the geodesic line that joins them and the plane azimuth from this format are known. in the first of the two vertices considered. The two fundamental problems of geodesy are therefore solved in the aforementioned coordinate system.

The aforementioned equations are generally used in the Cassini-Soldner representation, where the rectangular geodetic coordinates coincide with the plano-cartographic coordinates, since they allow to solve geodetic problems without having to go through the calculation of the linear deformation modulus, as well as of the reduction to the chord. and of the angular deformation (the aforementioned representation is in fact not compliant).

The modification of the Soldner equations, proposed in this study, allows to apply the same operative modality, when it is necessary to face the same geodetic problems, using the Gauss coordinate system. In the latter case, since the width of the spindles greatly exceeds that of the spherical field, Soldner's formulas can progressively fall into defect, when operating at a considerable distance (greater than 180km) from the central meridian and therefore to maintain the rigor unchanged. of the results it is necessary to decrease the length of the geodesic line with respect to that allowed in the spherical field.

This document is followed by a second part dedicated to numerical applications and complements of what is treated here.



## 1. INTRODUZIONE

Come è noto dalla cartografia teorica, per procedere alla costruzione della rappresentazione di una zona della superficie terrestre, occorre stabilire relazioni matematiche tra coordinate dei punti dell'ellissoide di riferimento, superficie obbiettiva, e punti immagine corrispondenti del piano, superficie subbiettiva. In tal modo si definiscono le equazioni della rappresentazione che permettono di risalire dalle proprietà analitiche o geometriche dell'immagine cartografica alle corrispondenti proprietà della figura rappresentata.

Il fine geodetico di una rappresentazione è quello di consentire la trattazione sul piano dei problemi geodetici, così da poter utilizzare i teoremi della trigonometria piana nell'esecuzione dei calcoli.

Naturalmente possiamo sempre eseguire i calcoli sulla superficie dell'ellissoide di rotazione, applicando le procedure date dalla geodesia, che però comportano il ricorso alla trigonometria ellissoidica assai più complessa.

Trasferendo il problema sul piano della rappresentazione, si ha il grande vantaggio di poter calcolare con estrema semplicità la lunghezza dei segmenti di retta che uniscono i vari punti immagine e gli angoli tra questi formati; tuttavia la determinazione degli elementi del triangolo piano non è che il primo passo verso la soluzione del problema geodetico.

Infatti il legame che occorre stabilire è tra elementi dell'ellissoide, archi di geodetica e azimut, e le corrispondenti immagini sul piano cartografico come scaturiscono dall'applicazione delle equazioni della carta.

In generale gli archi di geodetica si proiettano in immagini di curve di grado superiore al primo, dette trasformate, e gli angoli restano individuati dall'incontro delle trasformate nei diversi vertici.

La considerazione di triangoli piani sulla rappresentazione cartografica non è allora che una posizione di comodo, che si sovrappone all'immagine cartografica, senza tuttavia farne parte, solo per fornire, in via di prima approssimazione, la grandezza dei lati e degli angoli dei triangoli ellissoidici.

A tale riguardo la cartografia teorica fornisce i metodi di calcolo per definire le differenze di lunghezza tra archi di geodetica ellissoidici e segmenti rettilinei, o corde, tra gli stessi punti immagine della rappresentazione, nonché le differenze tra azimut delle trasformate e delle corde. Siamo così in grado di definire, basandoci sulla rappresentazione cartografica, le relazioni esistenti tra punti dell'ellissoide terrestre.

Naturalmente per le applicazioni geodetiche conviene utilizzare rappresentazioni cartografiche che offrono la maggiore semplicità possibile nel calcolo delle differenze tra elementi dei triangoli piani e delle immagini cartografiche degli elementi ellissoidici corrispondenti.

Ora è noto che le rappresentazioni che meglio rispondono alle esigenze di calcolo per le applicazioni geodetiche, sono le rappresentazioni isogone o conformi, che offrono la maggiore semplicità possibile per il calcolo dei moduli di deformazione lineari e delle riduzioni angolari, o alle corde.

In Italia, in particolare, a far tempo dall'anno 1946, è stata adottata la rappresentazione conforme di Gauss, secondo i canoni dati dal prof. Boaga, denominata per questa rappresentazione di Gauss-Boaga, che realizza la proiezione dell'ellissoide di Hayford (o internazionale) con orientamento Roma M. Mario – M. Soratte.

Quando il problema geodetico non supera i limiti del campo sferico, è possibile però affrontare la ricerca della soluzione operando sulla superficie sferica, nella fattispecie quella della sfera locale.

Perseguendo questo tipo di soluzione, tutti i problemi di calcolo ora, per sommi capi, richiamati, non si pongono dal momento che, in buona sostanza, il triangolo sferico e quello ellissoidico sono coincidenti e sovrapponibili senza che si verifichino alterazioni dell'uno o dell'altro.

Ciò significa che la soluzione fornita dal triangolo sferico si può applicare al triangolo ellissoidico istituito tra gli stessi vertici. La soluzione del triangolo sferico si presenta particolarmente comoda utilizzando le equazioni di Soldner che mettono in relazione le coordinate geodetiche polari con le coordinate geodetiche rettangolari.

Queste ultime coincidono con le coordinate plano-cartografiche della rappresentazione di Cassini-Soldner. Appare quindi naturale chiedersi se è possibile applicare questa procedura anche quando si devono trattare le coordinate di Gauss. La risposta positiva a questo quesito passa attraverso la definizione delle relazioni esistenti tra coordinate di Gauss e coordinate di Cassini-Soldner. Se infatti riusciamo, in funzione delle coordinate di Gauss, ad esprimere le coordinate di Cassini-Soldner, inserendo tali espressioni nelle equazioni di Soldner, riusciamo a risolvere il triangolo sferico operando sulle coordinate di Gauss. In questo modo si evita innanzitutto il passaggio sul piano della rappresentazione conforme, con tutto ciò che comporta per il calcolo delle riduzioni delle distanze e degli angoli come sopra richiamato, ma soprattutto si dispone di una metodologia di calcolo in più che permette di eseguire un controllo dei risultati.

D'altra parte questa è una situazione ben nota quando si opera sulla cartografia catastale in proiezione di Cassini-Soldner, dove i problemi geodetici, del campo sferico, possono essere affrontati sulla sfera locale attraverso le equazioni di Soldner, oppure riducendo il problema al piano della rappresentazione, procedendo attraverso la determinazione delle deformazioni lineari e delle variazioni angolari.

Nel seguito quindi si ricercheranno innanzitutto le relazioni tra coordinate di Cassini-Soldner e di Gauss per poi esaminare la modifica delle equazioni di Soldner per renderle idonee alla trattazione delle coordinate di Gauss.

## 2. LA SOSTITUZIONE DELL'ELLISSOIDE DI ROTAZIONE CON LA SFERA LOCALE

E' noto che nel caso in cui il problema geodetico ricada in una regione di territorio, intorno a un punto assunto come origine O, di raggio non superiore a 150 km, la superficie dell'ellissoide di rotazione può essere sostituita da una sfera (locale) di raggio:

$$R = (\rho \cdot N_0)^{1/2}$$

dove  $\rho_o, N_o$  sono i raggi di curvatura principali dell'ellissoide nell'origine  $O(\varphi_o, \lambda_o)$ .

Operando questa sostituzione, le linee geodetiche ellissoidiche vengono ad essere sostituite da archi di cerchio massimo della sfera di uguale lunghezza e di uguale azimuth, poiché risultano trascurabili, nell'ambito suddetto, le variazioni lineari e angolari, che non producono alterazione della precisione geodetica dei calcoli.

Si ottiene così una notevolissima semplificazione, poiché operando nel campo sferico, come sopra delimitato, è possibile far ricorso ai teoremi della trigonometria sferica in luogo dei teoremi assai più onerosi e complicati della trigonometria ellissoidica.

Si tratta di una semplificazione assai significativa sia per le notevoli facilitazioni dei calcoli, sia perché nell'ambito del campo sferico ricade la maggior parte dei problemi geodetici che si presentano nelle applicazioni.

### 3. LA TRATTAZIONE DEI PROBLEMI GEODETICI IN COORDINATE DI CASSINI-SOLDNER

#### 3.1 Richiami del sistema di rappresentazione Cassini-Soldner

Come è noto, nella rappresentazione di Cassini-Soldner, le coordinate plano-cartografiche  $p(x, y)$  di un punto immagine  $p$

della carta (superficie subbiettiva  $\Sigma'$ ) coincidono con le coordinate geodetiche-rettangolari  $P(X, Y)$  del corrispondente punto  $P$  della sfera (superficie obbiettiva  $\Sigma$ ), cosicché le equazioni della carta sono (v. fig. 1):

$$x = X;$$

$$y = Y;$$

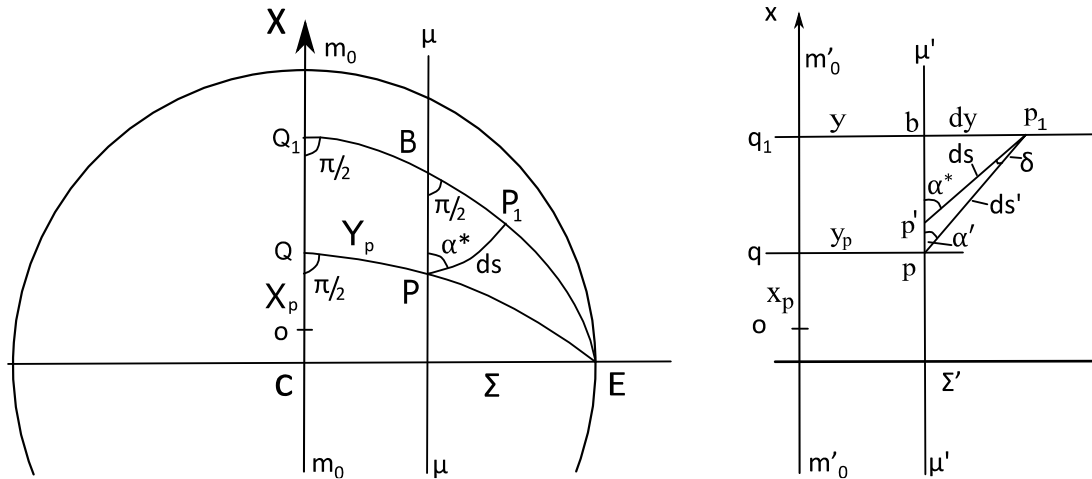
e così per un punto  $P$  della sfera corrispondente al punto  $p$  del piano cartografico si ha:

$$x_p = X_P;$$

$$y_p = Y_P;$$

Per quanto riguarda le proprietà differenziali della carta, rinviando per la dimostrazione a testi specializzati (v. bibliografia), ricordiamo che il modulo di deformazione lineare  $m$  in un punto  $p(x, y)$  della rappresentazione vale:

$$m = ds'/ds = 1 + [y^2/(2R^2)] \cos^2\alpha'$$



- $m_0-m_0$  = meridiano principale
- $\mu-\mu$  linea geodeticamente parallela a  $m_0-m_0$

- $q_1-q = Q_1-Q$
- $m_0 bp = q_1-q > BP$

- E = polo di  $m_0-m_0$
- $BP < Q_1Q$
- O = origine del sistema di riferimento
- C = centro della sfera

- $bp' = BP$
- $ds' \geq ds$
- $\delta \neq 0$  deformazione angolare
- $\alpha' = \alpha* - \delta$

Figura 1. Schema della concezione e delle proprietà differenziali della rappresentazione di Cassini-Soldner.

Ora si vede subito che  $m$  raggiunge il valore massimo per  $\cos^2 \alpha' = 1$ , in direzione quindi dell'asse  $X$  e minimo per  $\cos^2 \alpha' = 0$ , cioè in direzione dell'asse  $Y$ .

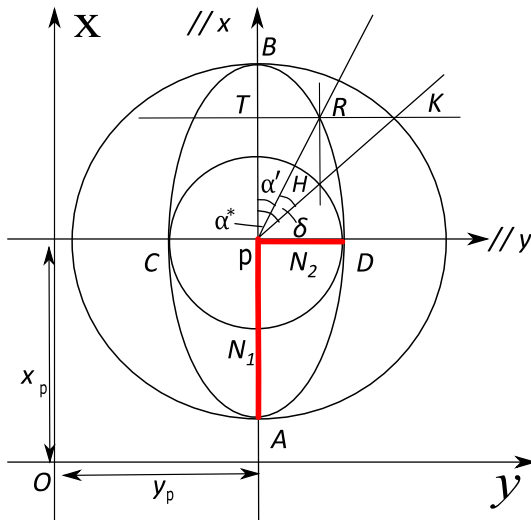


Figura 2. Ellisse del modulo di deformazione lineare  $m$  e di origine della deformazione angolare.  $N_1, N_2$ , moduli principali di deformazione lineare.

Quindi per i moduli principali di deformazione lineare  $N_1, N_2$  relativi al punto  $p$  si ha (v. fig. 2):

$$N_1 = 1 + y^2/(2R^2) \text{ nella direzione dell'asse } X; (\cos^2 \alpha' = 1)$$

$$N_2 = 1 \text{ nella direzione dell'asse } Y; (\cos^2 \alpha' = 0)$$

Sul meridiano principale  $Y = 0$ , quindi  $N_1 = N_2 = 1$  cioè il meridiano principale si proietta sulla carta in vera lunghezza.

Il fatto che le direzioni dei moduli principali di deformazione lineare coincidono con le direzioni degli assi cartografici, costituisce una proprietà notevole del sistema di rappresentazione Cassini-Soldner, proprietà essenziale per i successivi sviluppi di questo studio, come verranno illustrati più avanti.

Definiti i moduli principali di deformazione lineare  $N_1, N_2$ , è semplice definire il modulo di deformazione superficiale  $\eta$ . E' noto infatti che:

$$\eta = d\sigma'/d\sigma = N_1 \cdot N_2$$

dove  $d\sigma', d\sigma$  sono aree infinitesime nell'intorno di  $p$  (su  $\Sigma'$ ) e di  $P$  (su  $\Sigma$ ) rispettivamente.

Nel nostro caso si ha:

$$\eta = d\sigma'/d\sigma = N_1 \cdot N_2 = [1 + y^2/(2R^2)] \cdot 1 = 1 + y^2/(2R^2) \neq 1$$

quindi in definitiva  $\mu \neq 1$ , cosicché si conclude che la rappresentazione di Cassini-Soldner non conserva le aree, non è pertanto una rappresentazione equivalente (se non nei punti del meridiano principale dove  $y = 0$  e  $\eta = 1$ ).

Infine, per quanto riguarda gli azimut,  $\alpha'$ , azimut cartografico dell'elemento di corda  $ds'$ , e  $\alpha^*$ , azimut piano dell'elemento di linea geodetica  $ds$ , sussiste, come è noto la relazione:

$$\operatorname{tg} \alpha' = (N_2/N_1) \operatorname{tg} \alpha^*$$

e considerando la deformazione angolare:

$$\delta = \alpha' - \alpha^*$$

sussiste la relazione:

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg}(\alpha' - \alpha^*) =$$

$$\{[(N_2/N_1) - 1] \operatorname{tg} \alpha^*\} / [1 + (N_2/N_1) \operatorname{tg}^2 \alpha^*]$$

se esplicitiamo le precedenti relazioni nel caso della rappresentazione di Cassini-Soldner introducendo le espressioni di  $N_1, N_2$ , si perviene infine alle espressioni:

$$\operatorname{tg} \alpha' = [(N_2/N_1) \operatorname{tg} \alpha^*] \approx [1 - y^2/(2R^2)] \operatorname{tg} \alpha^*$$

e:

$$|\delta| = |[y^2/(4R^2)] \operatorname{sen} 2\alpha^*|$$

le quali pongono in evidenza che  $\alpha' \neq \alpha^*$ , ovvero anche che  $\delta \neq 0$ ; quindi la rappresentazione non conserva gli angoli, non è pertanto una rappresentazione isogona o conforme. Fanno eccezione i punti del meridiano principale, dove  $y = 0$ , e perciò  $\alpha' = \alpha^*$ , ovvero  $\delta = 0$ .

Lungo il meridiano principale ( $y = 0$ ) allora la rappresentazione è equidistante ( $N_1 = N_2 = 1$ ), nonché anche equivalente ( $\eta = 1$ ) e isogona ( $\alpha' = \alpha^*$  ovvero  $\delta = 0$ ).

In tutti gli altri punti della rappresentazione si manifestano deformazioni delle distanze ( $m \neq 1$ ), ad eccezione di quelle parallele all'asse  $Y$  (caratterizzate da  $\cos \alpha' = 0$ ), delle superfici ( $\eta \neq 1$ ) e degli angoli ( $\delta \neq 0$ ). Non conservando né le aree né gli angoli in tutti i punti della rappresentazione, questa si definisce afilattica.

Possiamo ora applicare questi risultati al caso di archi di geodetica non di lunghezza infinitesima  $ds$  o  $ds'$ , bensì di lunghezza finita  $S_{12}$ , tra i punti  $P_1$  e  $P_2$  di  $\Sigma$ , e  $S'_{12}$ , tra i punti immagine  $p_1$  e  $p_2$  di  $\Sigma'$ ; vale come è noto la relazione (v. fig. 3):

$$m_{12} = S'_{12}/S_{12} = 1 + (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) \cos^2 \alpha' / (6R^2)$$

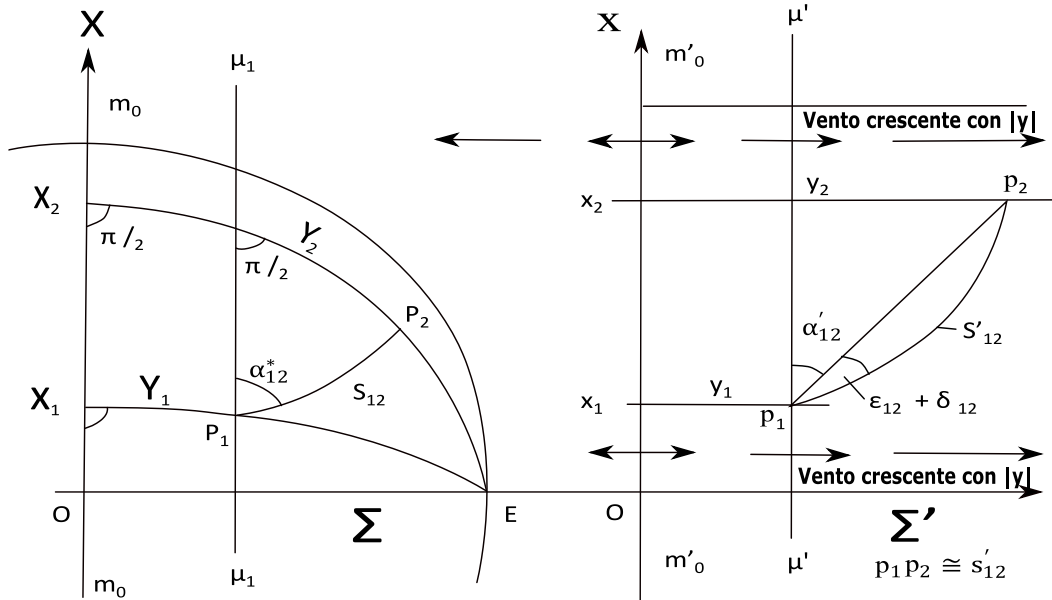


Figura 3. Deformazione lineare e riduzione angolare di archi di geodetica di lunghezza finita.

Mentre per le superfici non infinitesime si ha:

$$\sigma = \int_{\sigma'} \frac{d\sigma'}{\eta} \approx \int_{\sigma'} \left(1 - \frac{y^2}{2R^2}\right) d\sigma'$$

dove, per risolvere l'integrale definito si ricorre alla considerazione di una sommatoria di prodotti.

Infine, per quanto si riferisce alla riduzione angolare dell'azimut di una linea geodetica  $S_{12}$  nel punto iniziale si ha intanto la relazione (v. fig. 3):

$$\alpha'_{12} = \left| \arctg \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| + p\pi \right|$$

Con il seguente significato dei simboli:

$$\Delta x = x_2 - x_1; \quad \Delta y = y_2 - y_1;$$

$p$	$\Delta x$	$\Delta y$	Quadrante
0	+	+	I
-1	+	-	II
1	-	-	III
-2	-	+	IV

e quindi:

$$\begin{aligned} \alpha^*_{12} &= \alpha'_{12} + \epsilon_{12} + \delta_{12} \\ &= \alpha'_{12} + (2y_1 + y_2)(x_2 - x_1) / (6R^2) \\ &\quad + (y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2) \operatorname{sen} \alpha'_{12} \operatorname{cos} \alpha'_{12} / (6R^2) \end{aligned}$$

Per vedere come si colloca la trasformata  $S'_{12}$  rispetto alla corda  $p_1p_2$  vale la nota regola del vento, per la quale la trasformata giace, rispetto alla corda, dalla parte opposta rispetto all'asse X e rivolge la concavità verso la corda stessa (v. fig. 3). Se la trasformata taglia l'asse X l'andamento della stessa può risultare

più complesso, pur restando valido il principio della regola del vento.

### 3.2 La soluzione del problema geodetico sul piano della rappresentazione

Abbiamo così presentato tutti gli elementi che permettono di trasferire la soluzione del problema geodetico, contenuto nell'ambito del campo sferico, dalla superficie dell'ellissoide di rotazione a quella del piano della rappresentazione di Cassini-Soldner.

### 3.3 La soluzione del problema geodetico sulla sfera locale mediante le equazioni di Soldner

Le equazioni di Soldner si fondano sull'applicazione dei teoremi di trigonometria sferica, che mettono in relazione angoli e lati di un triangolo sferico. In un triangolo sferico ciascun lato è un arco di cerchio massimo della sfera, ovvero dato dall'intersezione della sfera con il piano passante per il centro della stessa, oltreché per i punti estremi del lato considerato. La trigonometria sferica permette di scrivere le relazioni tra angoli e lati del triangolo sferico, a condizione di esprimere questi ultimi in funzione dell'angolo sotteso al centro della sfera e del raggio di questa.

La potenza delle equazioni di Soldner per la risoluzione dei problemi geodetici, limitati al campo sferico, in funzione delle coordinate plano-cartografiche dei punti della rappresentazione di Cassini-Soldner, si impenna sui due punti fondamentali seguenti:

- 1.) la superficie dell'ellissoide di rotazione, superficie obbiettiva  $\Sigma$ , è sostituita da quella della sfera locale;
- 2.) le coordinate plano-cartografiche di ciascun punto (immagine) del piano della rappresentazione,  $p(x,y)$ , superficie subbiettiva  $\Sigma'$ , coincidono con le coordinate geodetiche rettangolari dei punti corrispondenti sulla sfera  $P(X,Y)$  (v. par. 3.1); si hanno cioè le seguenti equazioni di corrispondenza:

$$x = X; \quad y = Y;$$

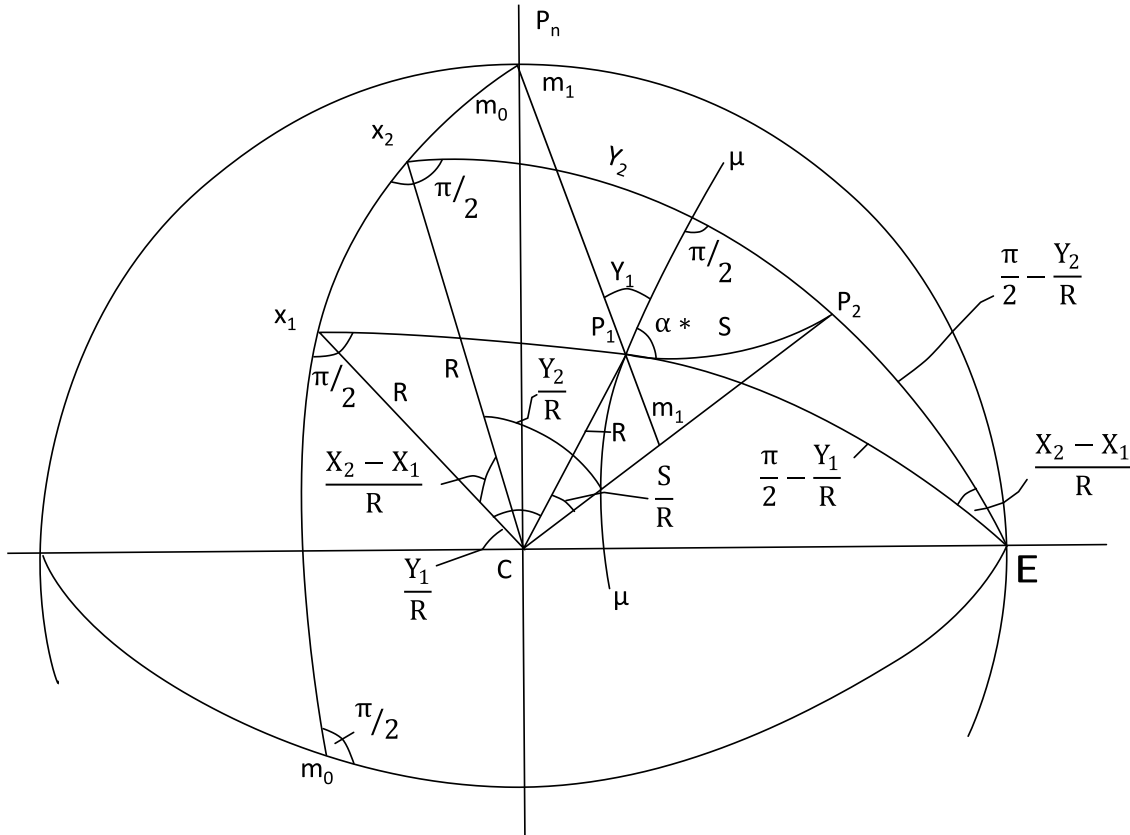
Il primo punto è importante poiché individua il campo sferico come ambito di validità delle relazioni matematiche.

Il secondo punto è addirittura decisivo per evidenziare il valore assoluto delle equazioni di Soldner che, operando in coordinate plano-cartografiche della rappresentazione di Cassini-Soldner, permettono di risolvere il problema geodetico sulla sfera, evitando così tutti i calcoli di variazione delle lunghezze delle trasformate e del valore degli azimut, necessari per riportare il problema tra corde tracciate sul piano della rappresentazione.

Come abbiamo ricordato in premessa, operando all'interno del campo sferico, le lunghezze degli archi di geodetica  $S$  e gli azimut piani  $\alpha^*$  coincidono sostanzialmente con quelli esistenti sull'ellissoide di rotazione.

### 3.4 Richiami sulle equazioni di Soldner

Richiamiamo ora, brevemente, la genesi delle equazioni di Soldner. Con riferimento alla fig. 4, consideriamo dapprima la formula del coseno sferico applicata al triangolo sferico  $P_1P_2E$



$E = \text{polo di } m_0 - m_0;$

$X_2CE = \pi/2;$

$X_1CE = \pi/2;$

Figura 4. Campo sferico di riferimento per lo sviluppo delle equazioni di Soldner.

La richiamata formula fornisce:

$$\cos(\pi/2 - Y_2/R) = [\cos(S/R)] \cdot \cos(\pi/2 - Y_1/R) + [\sin(S/R)] \cdot \sin(\pi/2 - Y_1/R) \cdot \cos(\pi/2 - \alpha^*)$$

da cui si ricava immediatamente:

$$\sin(Y_2/R) = \cos(S/R) \cdot \sin(Y_1/R) + \sin(S/R) \cdot \cos(Y_1/R) \cdot \sin \alpha^*$$

Possiamo ora sostituire alle funzioni trigonometriche degli angoli al centro della sfera, caratterizzati da valori piccoli, tenendo conto della lunghezza dei lati del triangolo sferico rispetto al raggio della sfera, i relativi sviluppi in serie, arrestati ai termini in  $1/R^5$  inclusi; si ha così:

$$Y_2/R - Y_2^3/(6R^3) + Y_2^5/(120R^5) = [1 - S^2/(2R^2) + S^4/(24R^4)][Y_1/R - Y_1^3/(6R^3) + Y_1^5/(120R^5)] + [S/R - S^3/(6R^3) + S^5/(120R^5)][1 - Y_1^2/(2R^2) + Y_1^4/(24R^4)] \sin \alpha^*$$

Moltiplichiamo ora entrambi i membri per  $R$  e svolgiamo le parentesi, tralasciando i termini in  $1/R^5$  e superiori. Si ha:

$$Y_2 - Y_2^3/(6R^2) + Y_2^5/(120R^4) = Y_1 - Y_1^3/(6R^2) + Y_1^5/(120R^4) - [S^3/(6R^2) + Y_1^2S^3/(12R^4) - S^5/(120R^4) - S + Y_1^2S/(2R^2) - Y_1^4S/(24R^4)] \sin \alpha^*$$

Poiché la formula deve riuscire valida operando nel campo sferico, poniamo in essa:

$$Y_1 = Y_2 = Y = S = 150 \text{ km e } R = 6300 \text{ km}$$

cosciché risulta:

$$YS^2/(2R^2) = Y^2S/(2R^2) \leq 42,52 \text{ m};$$

$$Y^3/(6R^2) = S^3/(6R^2) \leq 14,17 \text{ m};$$



$$Y^3S^2/(12R^4) = Y^2S^3/(12R^4) \leq 4 \text{ mm};$$

$$YS^4/(24R^4) = Y^4S/(24R^4) \leq 2 \text{ mm};$$

$$Y^5/(120R^4) = S^5/(120R^4) \leq 0,4 \text{ mm}.$$

Nel campo sferico è quindi lecito tralasciare i termini in  $1/R^4$  cosicché si ha infine:

$$Y_2 - Y_2^3/(6R^2) = Y_1[1 - S^2/(2R^2) - Y_1^2/(6R^2)] + [1 - Y_1^2/(2R^2) - S^2/(6R^2)]S \cdot \text{sen}\alpha^*$$

Si dovrebbe ora procedere alla risoluzione di un'equazione di terzo grado, o cubica, nell'incognita  $Y_2$ . Tuttavia questo calcolo non è necessario; risulta infatti dalla precedente:

$$Y_2 = Y_1 + S \cdot \text{sen}\alpha^* - Y_1[S^2/(2R^2) + Y_1^2/(6R^2)] - [Y_1^2/(2R^2) + S^2/(6R^2)]S \cdot \text{sen}\alpha^* + Y_2^3/(6R^2)$$

E quindi tralasciando i termini di ordine pari a  $1/R^4$  o superiori, come già fatto in precedenza, nello sviluppo di  $Y_2^3$  dato dalla precedente espressione, potremo scrivere, senza perdita di precisione:

$$Y_2^3/(6R^2) \approx (Y_1 + S \cdot \text{sen}\alpha^*)^3/(6R^2)$$

Introducendo questa espressione nell'equazione cubica, si ottiene dopo facili passaggi:

$$Y_2 = Y_1 + S_{12} \cdot \text{sen}\alpha^*_{12} - Y_1 S_{12}^2 \cdot \cos^2\alpha^*_{12}/(2R^2) - S_{12}^3 \cdot \text{sen}\alpha^*_{12} \cdot \cos^2\alpha^*_{12}/(6R^2)$$

Se ora al medesimo triangolo sferico  $P_1P_2E$  applichiamo la formula del seno e procediamo in maniera analoga otteniamo la relazione:

$$X_2 = X_1 + S_{12} \cdot \cos\alpha^*_{12} + Y_2^2 \cdot S_{12} \cdot \cos\alpha^*_{12}/(2R^2) - S_{12}^3 \cdot \text{sen}^2\alpha^*_{12} \cdot \cos\alpha^*_{12}/(6R^2)$$

Per il calcolo dell'azimut piano reciproco si trova infine la relazione:

$$\alpha^*_{21} = \alpha^*_{12} - Y_1 \cdot S_{12} \cdot \cos\alpha^*_{12}/R^2 - S_{12}^2 \cdot \text{sen}\alpha^*_{12} \cdot \cos\alpha^*_{12}/(2R^2) \pm \pi$$

Ricordando ora le equazioni di corrispondenza della rappresentazione di Cassini-Soldner (v. p. 16) e ponendo altresì:

$$S_{12} \cdot \cos\alpha^*_{12} = u; \quad S_{12} \cdot \text{sen}\alpha^*_{12} = v;$$

Dalle precedenti si hanno le espressioni:

$$y_2 = y_1 + v - y_1 \cdot u^2/(2R^2) - u^2v/(6R^2)$$

$$x_2 = x_1 + u - y_2^2 \cdot u/(2R^2) - uv^2/(6R^2)$$

$$\alpha^*_{21} = \alpha^*_{12} - y_1 \cdot u/R^2 - uv/(2R^2) \pm \pi$$

Si vede così che le equazioni di Soldner mettono in relazione le coordinate geodetiche rettangolari  $P(X,Y)$  con le coordinate geodetiche polari  $P(\alpha^*, S)$  dei punti della sfera. Poiché le coordinate geodetiche rettangolari coincidono con le coordinate plano-cartografiche dei punti della rappresentazione di Cassini-Soldner, le precedenti mettono anche in relazione le coordinate

dei punti della rappresentazione  $p(x, y)$  con le coordinate geodetiche polari dei punti della sfera  $P(\alpha^*, S)$ .

Se utilizziamo le equazioni di Soldner per la soluzione del problema geodetico attraverso gli elementi della rappresentazione cartografica, questa circostanza si traduce in un sostanziale snellimento e alleggerimento dei calcoli, con conseguente riduzione dei rischi di errore, non dovendosi più eseguire la riduzione del problema al piano della rappresentazione, con la necessità di dover procedere alla determinazione dei moduli di deformazione delle distanze o delle variazioni degli azimut delle trasformate rispetto alle corde.

Le precedenti possono essere facilmente invertite per il calcolo di  $u, v$  note le coordinate plano-cartografiche dei punti  $p_1(x_1, y_1), p_2(x_2, y_2)$ .

Basta porre dapprima:

$$\Delta x = x_2 - x_1; \quad \Delta y = y_2 - y_1;$$

e quindi:

$$u = x_2 - x_1 - y_2^2 u/(2R^2) + uv^2/(6R^2) = \Delta x - y_2^2 u/(2R^2) + uv^2/(6R^2);$$

$$v = y_2 - y_1 + y_1 u^2/(2R^2) + u^2 v/(6R^2) = \Delta y + y_1 u^2/(2R^2) + u^2 v/(6R^2);$$

Introducendo queste espressioni di  $u, v$  nei secondi membri delle precedenti, svolgendo le parentesi e tralasciando i termini in  $1/(R^4)$  si ricavano subito, senza perdita di precisione, le relazioni:

$$u = \Delta x - y_2^2 \Delta x/(2R^2) + \Delta x \Delta y^2/(6R^2) = S_{12} \cos^2\alpha^*_{12};$$

$$v = \Delta y + y_1 \Delta x^2/(2R^2) + \Delta x^2 \Delta y/(6R^2) = S_{12} \text{sen}^2\alpha^*_{12};$$

In tal modo le equazioni di Soldner permettono di ricavare gli elementi ellissoidici  $\alpha^*_{12}, S_{12}$  direttamente dalle coordinate plano-cartografiche dei punti della rappresentazione  $p_1(x_1, y_1), p_2(x_2, y_2)$ . Basta porre infatti:

$$S_{12} = (u^2 + v^2)^{1/2};$$

Mentre l'azimut piano, nel vertice  $P_1$ , dell'arco di geodetica  $S_{12}$  vale:

$$\alpha^*_{12} = \left| \arctg \left| \frac{v}{u} \right| + p\pi \right| \quad \text{con } p = (\text{v. p. 16})$$

A questo punto si può applicare la terza equazione di Soldner per il calcolo dell'azimut  $\alpha^*_{21}$  della  $S_{12}$  nel vertice  $P_2$ .

Infine se si vuole determinare il valore dell'azimut  $\alpha_{12}$  della  $S_{12}$  nel vertice  $P_1(\varphi_1, \lambda_1)$ , contato a partire dal meridiano passante per il punto  $P_1$ , occorre determinare la convergenza  $\gamma_1$  del meridiano di  $P_1$  rispetto al meridiano passante per l'origine  $O(\varphi_0, \lambda_0)$  del sistema di riferimento (v. fig. 4); operando nell'ambito del campo sferico, per il calcolo della convergenza  $\gamma_1$  vale la relazione:

$$\gamma_1 = (\lambda_1 - \lambda_0) \cdot \text{sen}\varphi_1 + [(\lambda_1 - \lambda_0)^3/3] \cdot \text{sen}\varphi_1 \cdot \cos^2\varphi_1$$

si pone infine:

$$\alpha_{12} = \alpha^*_{12} + \gamma_1$$

#### 4. LA RELAZIONE TRA COORDINATE DI CASSINI-SOLDNER E DI GAUSS

##### 4.1 La trasformazione della rappresentazione afilattica di Cassini-Soldner nella rappresentazione conforme di Gauss

Abbiamo visto che nella rappresentazione di Cassini-Soldner i moduli principali di deformazione lineare  $N_1$ ,  $N_2$ , valgono rispettivamente (v. p. 15):

$$N_1 = 1 + y^2/(2R^2) \quad \text{nella direzione dell'asse X; } (\cos^2 \alpha' = 1);$$

$$N_2 = 1 \quad \text{nella direzione dell'asse Y; } (\cos^2 \alpha' = 0);$$

Tanto premesso, possiamo modificare leggermente le leggi di corrispondenza della rappresentazione di Cassini-Soldner in modo da far subire alle ordinate  $y$  dei punti, lo stesso allungamento unitario subito dall'ascissa  $x$  (v. fig. 5); otteniamo in tal modo che i due moduli principali di deformazione lineare  $N_1$ ,  $N_2$ , assumono lo stesso valore, pari a quello di  $N_1$ , e si ha:

$$N_1 = N_2 = N = 1 + y^2/(2R^2) = m$$

Espressione di  $m$  che, come è noto, caratterizza la rappresentazione conforme di Gauss.

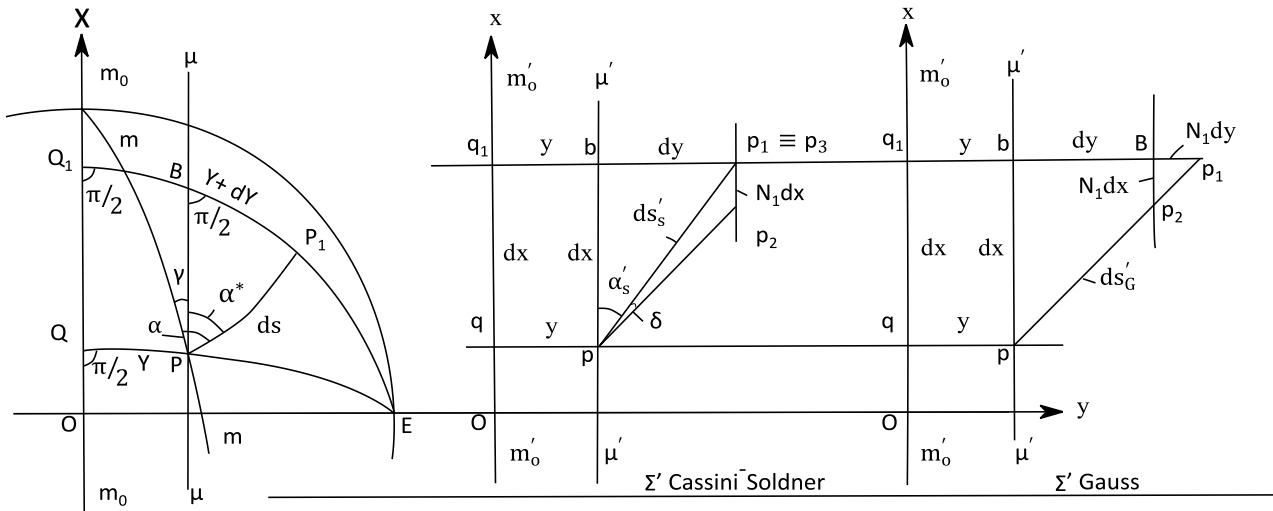


Figura 5. Immagine grafica del passaggio dalla rappresentazione di Cassini-Soldner alla rappresentazione di Gauss

Per una maggiore intelligibilità degli sviluppi che seguono, contrassegniamo con l'indice "S" gli elementi relativi alla rappresentazione di Cassini-Soldner e con l'indice "G" quelli relativi alla rappresentazione di Gauss.

In questa esposizione i due sistemi di riferimento cartografico hanno, per ipotesi, la stessa origine e assi coincidenti. Da quanto precede, l'ascissa  $x_G$  coinciderà con l'ascissa  $x_S$ , mentre l'ordinata  $y_G$  risulterà più lunga dell'ordinata  $y_S$  in ragione del modulo di deformazione  $m = N_1 \geq 1$ . Possiamo quindi scrivere le seguenti relazioni tra coordinate di Gauss e di Cassini-Soldner:

$$x_G = x_S$$

$$y_G = \int_0^{y_S} m dy$$

$$= \int_0^{y_S} [1 + y^2/(2R^2)] dy$$

$$= \int_0^{y_S} dy + [1/(2R^2)] \int_0^{y_S} y^2 dy$$

$$= y_S + y_S^3/(6R^2)$$

$$= y_S [1 + y_S^2/(6R^2)]$$

Riepilogando si hanno le relazioni:

$$x_G = x_S$$

$$y_G = y_S [1 + y_S^2/(6R^2)]$$

Risulta così che nel passaggio dalla rappresentazione afilattica di Cassini-Soldner alla rappresentazione conforme di Gauss, della sfera, su piani riferiti alla stessa origine e con assi coincidenti, le

ascisse  $x_G$  assumono lo stesso valore delle ascisse  $x_S$  mentre le ordinate  $y_G$  della proiezione conforme di Gauss si possono ottenere aggiungendo il valore  $y_S^3/(6R^2)$  alle ordinate  $y_S$  di Cassini-Soldner.

Le precedenti si invertono facilmente ponendo nell'espressione delle ordinate, a meno di termini trascurabili in  $1/R^4$ :

$$x_S = x_G$$

$$y_S = y_G - y_S^3/(6R^2) \approx y_G - y_G^3/(6R^2) = y_G [1 - y_G^2/(6R^2)]$$

Riepilogando si hanno le relazioni:

$$x_S = x_G$$

$$y_S = y_G [1 - y_G^2/(6R^2)]$$

Relazioni che permettono, tra l'altro, di passare dalle coordinate plano-cartografiche dei punti immagine  $p(x_G, y_G)$  della rappresentazione conforme di Gauss alle coordinate geodetiche rettangolari dei corrispondenti punti  $P(\varphi, \lambda)$  dell'ellissoide di rotazione (v. pp. 17-18).

Nel seguito indicheremo le coordinate plano-cartografiche della rappresentazione conforme di Gauss semplicemente con  $x$ ,  $y$  a meno di diverso esplicito avviso.



#### 4.2 Richiami del sistema di rappresentazione conforme di Gauss

Come è evidente da quanto precede, la proiezione di Gauss della sfera sul piano è conforme poiché, per le modalità costruttive che la caratterizzano, in ogni punto della rappresentazione risulta rispettata la condizione:

$$N_1 = N_2 = m = 1 + y^2/(2R^2)$$

L'ellisse che fornisce l'immagine geometrica del modulo di deformazione lineare  $m$ , ha quindi i semiassi principali  $N_1, N_2$ , uguali tra loro, cosicché assume la forma di un cerchio di raggio  $m = N_1 = N_2$  (v. fig. 6).

Se quindi prendiamo in esame sulla sfera un triangolo elementare  $PP_1B$  e sul piano della rappresentazione il corrispondente triangolino immagine  $pp_1b$  (v. fig. 7) si avrà che:

$$pp_1/PP_1 = p_1b/P_1B = bp/BP = m = ds'/ds = 1 + y^2/(2R^2)$$

Cioè i due triangoli elementari  $pp_1b$  e  $PP_1B$  sono legati da un rapporto di similitudine o di conformità e pertanto hanno gli angoli corrispondenti uguali (condizione di isogonia).

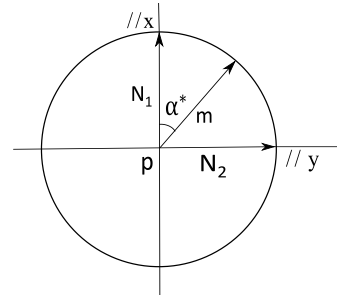


Figura 6. Modulo di deformazione lineare  $m$  in una rappresentazione conforme come quella di Gauss.

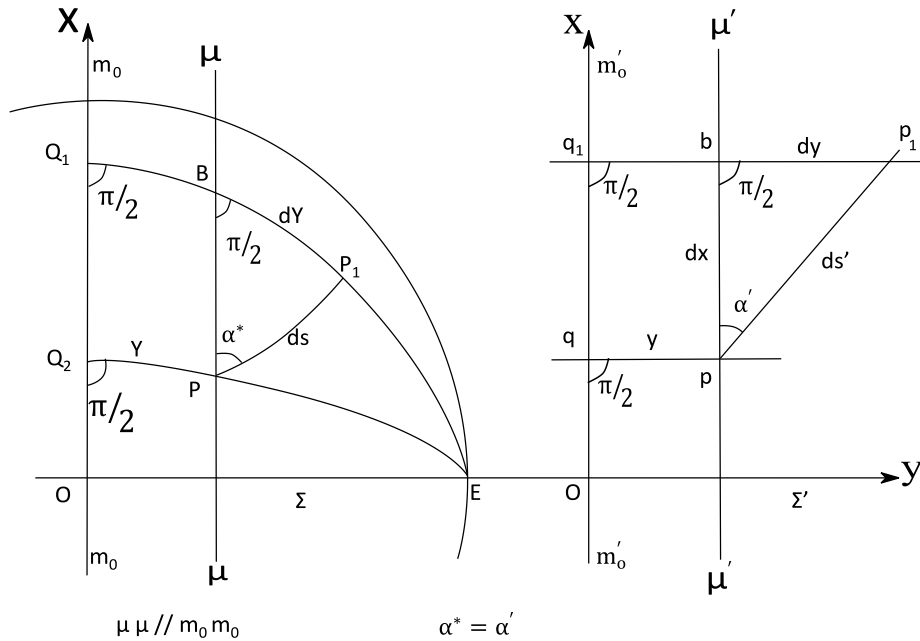


Figura 7. Immagine sullo sferoide e sul piano di Gauss di un triangolo elementare per lo studio delle proprietà differenziali della rappresentazione.

In particolare, per quanto riguarda gli azimut degli elementi lineari  $ds$  e  $ds'$ , risulta  $\alpha^* = \alpha'$ .

Rimane così assicurato lo scopo fondamentale delle rappresentazioni isogone o conformi.

Definiti i moduli principali di deformazione lineare, si ottiene facilmente il modulo di deformazione superficiale  $\eta$ . Basta porre infatti:

$$\eta = d\sigma'/d\sigma = N_1 \cdot N_2 = [1 + y^2/(2R^2)]^2 = 1 + y^2/R^2 + y^4/4R^4 \approx 1 + y^2/R^2$$

essendo trascurabili in campo sferico i termini in  $1/R^4$ .

Per quanto riguarda gli angoli, si ha ( $N_1 = N_2$ ):

$$\operatorname{tg} \alpha' = N_2/N_1 \operatorname{tg} \alpha^* = \operatorname{tg} \alpha^*$$

ovvero anche:

$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg}(\alpha' - \alpha^*) = [(N_2/N_1) \operatorname{tg} \alpha^* - 1] / [1 + (N_2/N_1) \operatorname{tg}^2 \alpha^*] = 0$   
 relazioni che pongono in evidenza che  $\alpha' = \alpha^*$ , ovvero anche  $\delta = 0$ ; quindi, con riguardo alle proprietà differenziali, la rappresentazione conserva gli azimut, è pertanto una rappresentazione isogona o conforme, mentre non conserva le superfici poiché  $\eta \neq 1$ .

Passiamo ora ad esaminare la situazione nel caso di archi di geodetica non di lunghezza infinitesima  $ds$  o  $ds'$ , ma finita ovvero  $S_{12}$  tra i punti  $P_1P_2$  di  $\Sigma$  e  $S'_{12}$  tra i punti  $p_1, p_2$  di  $\Sigma'$  (v. fig. 8).

Valgono, come è noto, le relazioni:

$$p_1p_2 \approx S'_{12} = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2}$$

$$m_{12} = 1 + (y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2)/(6R^2)$$

$$S_{12} = S'_{12}/m_{12}$$

Mentre per le superfici finite si ha, per noti sviluppi in serie

$$\sigma = \int_{\sigma'} d\sigma' / \eta = \int_{\sigma'} (1 - y^2/R^2) d\sigma'$$

dove per risolvere l'integrale definito si ricorre alla considerazione di una sommatoria di prodotti.

Infine, per quanto si riferisce alla variazione dell'azimut della trasformata  $S'_{12}$  rispetto alla corda  $p_1p_2$  si ha intanto:

$$\Delta x = x_2 - x_1; \quad \Delta y = y_2 - y_1;$$

$$\alpha'_{12} = \left| \arctg \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| + p\pi \right| \quad p = (\text{v. p. 16})$$

e altresì:

$$\varepsilon_{12} = (2y_1 + y_2)(x_2 - x_1)/(6R^2)$$

relazione anche questa valida nel campo sferico

Infine si pone:

$$\alpha^*_{12} = \alpha'_{12} + \varepsilon_{12}$$

Per vedere come si colloca la trasformata  $S'_{12}$  rispetto alla corda  $p_1p_2$  vale la nota regola del vento per la quale la trasformata giace, rispetto alla corda, dalla parte opposta rispetto all'asse X e rivolge la concavità verso la corda stessa (v. fig. 8). Nel caso la trasformata intersechi la corda in prossimità dell'asse X, ivi l'andamento della trasformata può essere anche più complesso, pur restando valido il richiamo alla regola del vento.

Abbiamo così richiamato tutti gli elementi che permettono di conseguire la soluzione del problema geodetico, contenuto nell'ambito del campo sferico, operando sulla superficie del piano della rappresentazione di Gauss, invece che su quella dell'ellissoide.

Vedremo, nella seconda parte della trattazione, un esempio di calcolo al riguardo.

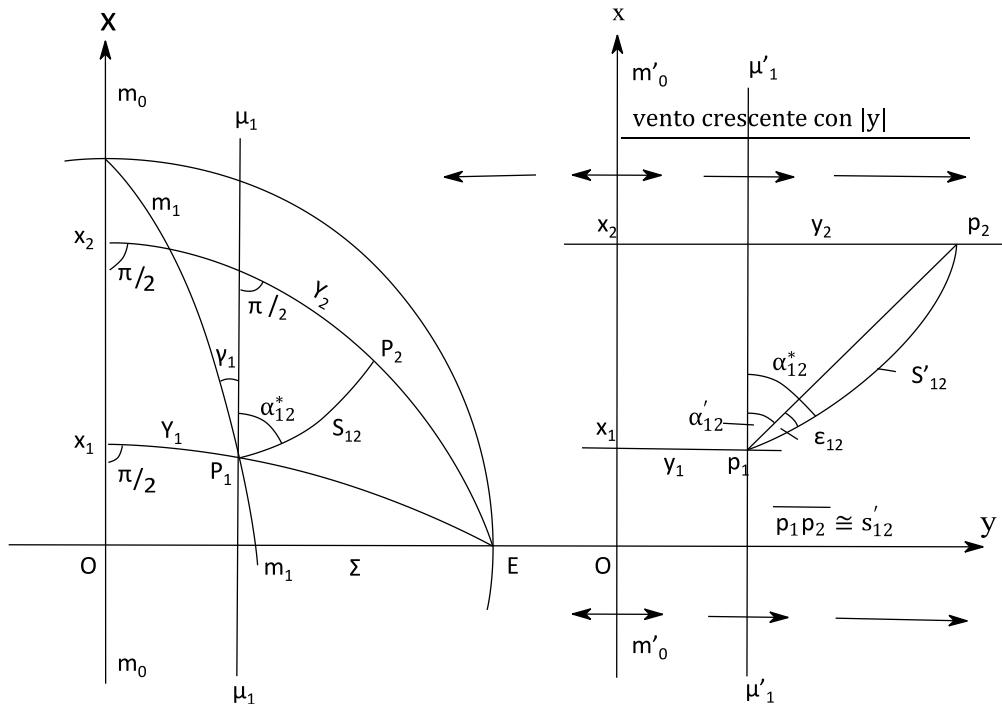


Figura 8. Immagine sullo sferoide e sul piano della rappresentazione di un triangolo finito per la risoluzione del problema geodetico sul piano di Gauss.

## 5. LA MODIFICA DELLE EQUAZIONI DI SOLDNER PER L'APPLICAZIONE ALLA RAPPRESENTAZIONE CONFORME DI GAUSS

### 5.1 Ricerca delle equazioni modificate

Ricordiamo che le equazioni di Soldner stabiliscono le relazioni tra coordinate geodetiche rettangolari dei punti della sfera  $P(X,Y)$  e le corrispondenti coordinate polari dei punti  $P(\alpha^*, S)$ , definite cioè in funzione dell'azimut piano  $\alpha^*$  e dell'arco di geodetica  $S$ .

Queste equazioni (v. p. 18) possono trovare diretta applicazione nella rappresentazione di Cassini-Soldner che, rispetto alle coordinate geodetiche rettangolari, è caratterizzata dalle seguenti leggi di corrispondenza:

$$x_s = X; \quad y_s = Y;$$

dove  $x_s, y_s$  sono le coordinate plano-cartografiche dei punti della rappresentazione Cassini-Soldner.

Le equazioni di Soldner, incardinate sui punti già evidenziati (v. sezione 3 p. 17), hanno la facoltà di risolvere i problemi geodetici sulla superficie ellissoidica, approssimata dalla sfera locale, e di presentare i risultati direttamente sul piano della rappresentazione di Cassini-Soldner evitando l'onere di indagare sulle trasformate delle linee geodetiche e delle variazioni degli azimut rispetto alle rispettive corde, a cui si va inevitabilmente incontro operando sul piano della rappresentazione, analisi che

semmai possono essere ottenute come semplici differenze, a valle della risoluzione del problema geodetico (v. pp. 18 - 19).

Naturalmente anche operando in coordinate di Cassini-Soldner è possibile trasferire la soluzione del problema geodetico sul piano della rappresentazione (v. pp. 14 - 16), che però si traduce in un ingiustificato aumento di operazioni di calcolo.

Riconosciuti così i vantaggi offerti dall'impiego delle formule di Soldner nella risoluzione dei problemi geodetici contenuti nell'ambito del campo sferico, operando in coordinate di Cassini-Soldner, ovvero in coordinate geodetiche rettangolari della sfera, appare naturale chiedersi se si può adottare un'analoga procedura anche utilizzando le coordinate plano-cartografiche della rappresentazione conforme di Gauss.

In effetti questa soluzione appare certamente perseguibile, disponendo delle relazioni che permettono di passare con facilità dalle coordinate di Gauss alle coordinate di Cassini-Soldner e viceversa (v. p. 19).

La soluzione del problema geodetico tra punti dati in coordinate di Gauss si può così sviluppare nelle tre fasi seguenti:

- 1) passaggio dalle coordinate di Gauss dei punti,  $p(x_G, y_G)$ , alle coordinate di Cassini-Soldner,  $p(x_S, y_S)$ , riferite a sistemi di assi coincidenti per origine e orientamento;
- 2) risoluzione del problema geodetico mediante l'applicazione delle equazioni di Soldner;
- 3) passaggio dalle coordinate di Cassini-Soldner,  $p(x_S, y_S)$ , risultato dei calcoli della fase 2), alle coordinate di Gauss  $p(x_G, y_G)$ .

Però, giacché le relazioni tra coordinate di Gauss e di Cassini-Soldner sono alquanto semplici (sempre che siano riferite a sistemi di assi coincidenti per origine e orientamento), si può pensare di inserire nelle equazioni di Soldner le coordinate di Cassini-Soldner dei punti  $p(x_S, y_S)$  espresse in funzione delle corrispondenti coordinate di Gauss ( $x_G, y_G$ ) e risolvere direttamente le equazioni così risultanti.

Nella sostanza non rimane allora che esaminare la forma assunta dalle tre equazioni di Soldner per effetto della accennata sostituzione di coordinate. Riprendiamo a tal fine le equazioni di Soldner (v. p. 18) dove si pone innanzitutto:

$$u = S_{12} \cdot \cos \alpha^*_{12}; \quad v = S_{12} \cdot \sin \alpha^*_{12};$$

e quindi:

$$y_{S2} = y_{S1} + v - y_{S1}u^2/(2R_2) - u^2v/(6R_2)$$

$$x_{S2} = x_{S1} + u + y_{S2}u/(2R_2) - uv^2/(6R_2)$$

$$\alpha^*_{21} = \alpha^*_{12} - y_{S1}u/(R_2) - uv/(2R_2) \pm \pi$$

e ricordiamo altresì le relazioni tra coordinate di Soldner e coordinate di Gauss (v. p. 19):

$$x_S = x_G$$

$$y_S = y_G[1 - y_G^2/(6R^2)]$$

Possiamo ora inserire nelle precedenti equazioni le coordinate di Soldner espresse in funzione delle coordinate di Gauss; trascurando i termini in  $1/R^4$  si ha per la prima di esse:

$$y_{S2} = y_{S1} + v - y_{S1}u^2/(2R^2) - u^2v/(6R^2) =$$

$$y_{G2} - y_{G2}^3/(6R^2) = y_{G1} - y_{G1}^3/(6R^2) + v -$$

$$[y_{G1} - y_{G1}^3/(6R^2)]u^2/(2R^2) - u^2v/(6R^2) \approx$$

$$y_{G1} + v - y_{G1}u^2/(2R^2) - u^2v/(6R^2) - y_{G1}^3/(6R^2)$$

Si dovrebbe ora procedere alla risoluzione di un'equazione di 3° grado nell'incognita  $y_{G2}$ ; però in considerazione del fatto che  $y_{G2}^3/(6R^2)$  è un termine correttivo, molto piccolo rispetto a  $y_{G2}$ , possiamo porre, a meno di termini in  $1/R^4$  e quindi senza perdita di precisione:

$$y_{G2}^3/(6R^2) \approx (y_{G1} + v)^3/(6R^2)$$

cosicché otteniamo dalla precedente:

$$y_{G2} - y_{G2}^3/(6R^2) = y_{G2} - (y_{G1} + v)^3/(6R^2) =$$

$$y_{G1} + v - y_{G1}u^2/(2R^2) - u^2v/(6R^2) - y_{G1}^3/(6R^2)$$

infine:

$$y_{G2} = y_{G1} + v - y_{G1}u^2/(2R^2) - u^2v/(6R^2) - y_{G1}^3/(6R^2) +$$

$$(y_{G1} + v)^3/(6R^2)$$

Per la seconda equazione di Soldner si ha, procedendo con analoghi criteri:

$$x_{S2} = x_{S1} + u + y_{S2}u/(2R^2) - uv^2/(6R^2) =$$

$$= x_{G2} = x_{G1} + u + [y_{G2} - y_{G2}^3/(6R^2)]u/(2R^2) - uv^2/(6R^2)$$

ovvero anche:

$$x_{G2} = x_{G1} + u + y_{G2}u/(2R^2) - uv^2/(6R^2)$$

Infine per la terza equazione si ha:

$$\alpha^*_{21} = \alpha^*_{12} - y_{S1}u/(R^2) - uv/(2R^2) \pm \pi =$$

$$\alpha^*_{12} - [y_{G1} - y_{G1}^3/(6R^2)]u/(R^2) - uv/(2R^2) \pm \pi =$$

$$\alpha^*_{21} = \alpha^*_{12} - y_{G1}u/(R^2) - uv/(2R^2) \pm \pi$$

Raccogliendo insieme i risultati ottenuti e togliendo ora l'indice "G", con l'intesa di riferirci alle coordinate di Gauss, si ha il seguente sistema di equazioni di Soldner modificate:

$$y_2 = y_1 + v - y_1u^2/(2R^2) - u^2v/(6R^2) - y_1^3/(6R^2) +$$

$$(y_1 + v)^3/(6R^2)$$

$$x_2 = x_1 + u - y_2^2u/(2R^2) - uv^2/(6R^2)$$

$$\alpha^*_{21} = \alpha^*_{12} - y_1u/(R^2) - uv/(2R^2) \pm \pi$$

Ricordando le espressioni delle equazioni per il calcolo in coordinate di Cassini-Soldner, si vede che la modifica da introdurre per poter eseguire gli stessi calcoli operando in

coordinate del sistema di rappresentazione conforme di Gauss, riguarda soltanto la prima equazione di Soldner.

Le tre precedenti equazioni possono essere facilmente invertite per risolvere il 2° problema fondamentale della geodesia, concernente il calcolo delle coordinate geodetiche polari di un punto  $P_2(\alpha^*_{12}, S_{12})$  sull'orizzonte di un punto  $P_1$ , note le coordinate di Gauss dei corrispondenti punti immagine  $p_1(x_1, y_1)$  e  $p_2(x_2, y_2)$  della rappresentazione cartografica.

A tal fine poniamo le prime due equazioni nella forma:

$$u = x_2 - x_1 - y_2^2 u / (2R^2) + uv^2 / (6R^2)$$

$$v = y_2 - y_1 + y_1 u^2 / (2R^2) + u^2 v / (6R^2) + y_1^3 / (6R^2) - (y_1 + v)^3 / (6R^2)$$

Per i termini correttivi ai secondi membri possiamo porre, a meno di termini in  $1/R^4$  e quindi senza perdita di precisione:

$$u = S_{12} \cos \alpha^*_{12} \approx \Delta x = x_2 - x_1;$$

$$v = S_{12} \sin \alpha^*_{12} \approx \Delta y = y_2 - y_1;$$

cosicché risulta:

$$u = \Delta x - y_2^2 \Delta x / (2R^2) + \Delta x \Delta y^2 / (6R^2)$$

$$v = \Delta y + y_1 \Delta x^2 / (2R^2) + \Delta x^2 \Delta y / (6R^2) + y_1^3 / (6R^2) - y_2^3 / (6R^2)$$

Determinati in tal modo i valori di  $u, v$ , possiamo scrivere (v. p. 18):

$$S_{12} = (u^2 + v^2)^{1/2}$$

$$\alpha^*_{12} = \left| \arctg \left| \frac{v}{u} \right| + p\pi \right| \quad p = (\text{v. p. 16})$$

Infine per la terza equazione si ottiene con facili passaggi:

$$\alpha^*_{21} = \alpha^*_{12} - [\Delta x / (2R_2)](y_1 + y_2) \pm \pi$$

Ricapitolando, operando in coordinate di Gauss nell'ambito del campo sferico, per la risoluzione del 1° problema fondamentale della geodesia, valgono le relazioni:

$$u = S_{12} \cos \alpha^*_{12}; \quad v = S_{12} \sin \alpha^*_{12};$$

$$y_2 = y_1 + v - y_1 u^2 / (2R_2) - u^2 v / (6R_2) - y_1^3 / (6R^2) + (y_1 + v)^3 / (6R^2)$$

$$x_2 = x_1 + u + y_2^2 u / (2R^2) - uv^2 / (6R^2)$$

$$\alpha^*_{21} = \alpha^*_{12} - y_1 u / (R_2) - uv / (2R_2) \pm \pi$$

mentre per la risoluzione del 2° problema fondamentale della geodesia, valgono le relazioni:

$$\Delta x = x_2 - x_1; \quad \Delta y = y_2 - y_1;$$

$$u = \Delta x - y_2^2 \Delta x / (2R^2) + \Delta x \Delta y^2 / (6R^2)$$

$$v = \Delta y + y_1 \Delta x^2 / (2R^2) + \Delta x^2 \Delta y / (6R^2) + y_1^3 / (6R^2) - y_2^3 / (6R^2)$$

$$S_{12} = (u^2 + v^2)^{1/2}$$

$$\alpha^*_{12} = \left| \arctg \left| \frac{v}{u} \right| + p\pi \right| \quad p = (\text{v. p. 16})$$

$$\alpha^*_{21} = \alpha^*_{12} - [\Delta x / (2R_2)](y_1 + y_2) \pm \pi$$

## 5.2 Nuova forma delle equazioni di Soldner modificate per la programmazione di calcolo su elaboratori elettronici

Le precedenti relazioni sono state ottenute rispettando la forma originale delle equazioni di Soldner, che ben si prestava all'esecuzione dei calcoli per mezzo dei logaritmi. Si ritiene utile suggerire adesso una loro nuova forma, ottenuta facilmente dalla precedente, che meglio si adatta alla programmazione su elaboratori elettronici o all'esecuzione dei calcoli con una semplice calcolatrice elettronica.

Tanto premesso, per il sistema di equazioni relative al 1° problema fondamentale della geodesia, possiamo scrivere:

$$y_2 = y_1 + v - y_1 u^2 / (2R^2) - u^2 v / (6R^2) - y_1^3 / (6R^2) + (y_1 + v)^3 / (6R^2) = y_1 + v - [1 / (6R^2)] [(3y_1 + v)u^2 + y_1^3 - (y_1 + v)^3]$$

$$x_2 = x_1 + u + y_2^2 u / (2R^2) - uv^2 / (6R^2) = x_1 + u \{ 1 + [1 / (6R^2)] (3y_2^2 - v^2) \}$$

$$\alpha^*_{21} = \alpha^*_{12} - y_1 u / (R_2) - uv / (2R_2) \pm \pi = \alpha^*_{12} - [u / (2R_2)](y_1 + y_2) \pm \pi$$

Mentre per la risoluzione del 2° problema fondamentale della geodesia possiamo scrivere:

$$u = \Delta x - y_2^2 \Delta x / (2R^2) + \Delta x \Delta y^2 / (6R^2) =$$

$$\Delta x \{ 1 - [1 / (6R^2)] (3y_2^2 - \Delta y^2) \}$$

$$v = \Delta y + y_1 \Delta x^2 / (2R^2) + \Delta x^2 \Delta y / (6R^2) + y_1^3 / (6R^2) - y_2^3 / (6R^2) =$$

$$\Delta y + [1 / (6R^2)] [\Delta x^2 (2y_1 + y_2) + y_1^3 - y_2^3]$$

$$S_{12} = (u^2 + v^2)^{1/2}$$

$$\alpha^*_{12} = \left| \arctg \left| \frac{v}{u} \right| + p\pi \right| \quad p = (\text{v. p. 16})$$

$$\alpha^*_{21} = \alpha^*_{12} - [\Delta x / (2R_2)](y_1 + y_2) \pm \pi$$

Ricapitolando la forma delle equazioni di Soldner, che si ritiene più comoda per l'esecuzione dei calcoli, è la seguente:

- per la risoluzione del 1° problema fondamentale della geodesia si pone:

$$u = S_{12} \cos \alpha^*_{12}; \quad v = S_{12} \sin \alpha^*_{12};$$

$$y_2 = y_1 + v - [1 / (6R^2)] [(3y_1 + v)u^2 + y_1^3 - (y_1 + v)^3]$$

$$x_2 = x_1 + u \{ 1 + [1 / (6R^2)] (3y_2^2 - v^2) \}$$

$$\alpha^*_{21} = \alpha^*_{12} - [u / (2R_2)](y_1 + y_2) \pm \pi$$

- per la risoluzione del 2° problema fondamentale della geodesia si pone:

$$\Delta x = x_2 - x_1; \quad \Delta y = y_2 - y_1;$$

$$u = \Delta x \{ 1 - [1 / (6R^2)] (3y_2^2 - \Delta y^2) \}$$

$$v = \Delta y + [1 / (6R^2)] [\Delta x^2 (2y_1 + y_2) + y_1^3 - y_2^3]$$

$$S_{12} = (u^2 + v^2)^{1/2}$$

$$\alpha^*_{12} = \left| \arctg \left| \frac{v}{u} \right| + p\pi \right| \quad p = (\text{v. p. 16})$$

Nell'esempio di calcolo proposto nella seconda parte, utilizzeremo le equazioni di Soldner modificate, nella forma qui suggerita.

Le equazioni ottenute dalla modifica delle equazioni di Soldner, operano, per la risoluzione del problema geodetico, diretto o inverso, sulla superficie dell'ellissoide di rotazione (approssimato dalla sfera locale), ma per la determinazione della posizione dei punti accettano o restituiscono le coordinate di Gauss relative al piano della rappresentazione conforme.

## 6. MODALITA' APPLICATIVE DELLE FORMULE DI SOLDNER MODIFICATE PER LA RAPPRESENTAZIONE CONFORME DI GAUSS-BOAGA

Nel corso dell'esposizione che precede, abbiamo, a più riprese, evidenziato che lo studio ha per oggetto la ricerca di equazioni valide per l'esecuzione di calcoli geodetici nelle applicazioni ricadenti nell'ambito del campo sferico.

Ciò significa che le ordinate dei punti immagine  $p(x, y)$  devono soddisfare la condizione  $|y| \leq 150$  km; in questo caso le relazioni di calcolo forniscono risultati validi per archi di geodetica  $S \leq 150$  km (v. p. 17).

La validità delle relazioni di calcolo quindi dipende sia dalla lunghezza dell'arco di geodetica trattato, sia dalla distanza degli estremi di tale arco dal meridiano passante per l'origine delle coordinate.

Se ci si allontana da questo meridiano di una distanza superiore a 150km, limite convenzionale del campo sferico, per mantenere immutato il livello di precisione dei risultati, è necessario diminuire progressivamente, al crescere di  $|y|$ , la lunghezza dell'arco di geodetica che può essere considerato nel calcolo.

Per quanto riguarda il valore dell'ascissa  $x$ , osserviamo che nelle formule interviene sempre il valore  $\Delta x$  e quindi deve risultare comunque  $|\Delta x| \leq 150$ km, per restare nell'ambito del campo sferico. Questa situazione si presenta sia per le formule che permettono di riportare il problema geodetico sul piano della rappresentazione conforme, quali quelle relative al calcolo del modulo di deformazione lineare  $m_{12}$  e della riduzione angolare  $\varepsilon_{12}$  (v. p. 20-21), sia per le formule di Soldner modificate, che eseguono la trattazione del problema sulla superficie ellissoidica (approssimata dalla sfera locale) (v. par. 5).

In sostanza, come è lecito attendersi, i due gruppi di formule hanno lo stesso campo di applicabilità. Le osservazioni svolte rivelano tutto il loro valore quando si deve operare sulla rappresentazione di Gauss-Boaga e devono essere tenute in debita considerazione. Ricordiamo al riguardo che nella rappresentazione di Gauss-Boaga, il territorio dell'Italia è stato suddiviso in due fusi, nel senso dei meridiani, dell'ampiezza in longitudine di  $6^\circ$  ciascuno, che vanno sotto il nome di fuso Ovest e di fuso Est, oppure di fuso 1 e di fuso 2 rispettivamente.

Le coordinate geografiche sono definite sull'ellissoide di Hayford (o internazionale) con orientamento Roma M. Mario - Monte Soratte.

Le longitudini estreme dei due fusi sono:

fuso 1:  $6^\circ 00' 00'', 000$  e  $12^\circ 27' 08'', 400$  Est di Greenwich;  
fuso 2:  $11^\circ 57' 08'', 400$  e  $18^\circ 30' 00'', 000$  Est di Greenwich;

quindi con una zona di sovrapposizione di  $30'$  fra i due fusi.

Ciascun fuso è stato riferito al proprio meridiano centrale; i due meridiani centrali sono caratterizzati rispettivamente dalle longitudini  $9^\circ$  e  $15^\circ$  Est di Greenwich (v. fig. 9). Un fuso si estende quindi per  $3^\circ$  ad Ovest e  $3^\circ$  ad Est del proprio meridiano centrale. La zona di sovrapposizione dei due fusi è utile per ridurre gli inconvenienti relativi alla discontinuità tra i due fusi che presentano, come detto, due diversi sistemi di riferimento. Occorre inoltre tener conto del fatto che l'I.G.M. fornisce le longitudini dei punti trigonometrici, indicate con  $\omega$ , rispetto al meridiano di Roma M. Mario, di longitudine:

$$\omega_0 = 12^\circ 27' 08'', 400 \text{ Est di Greenwich.}$$

Quindi per ottenere la longitudine  $\lambda$  di un punto riferita al meridiano centrale del fuso si deve porre:

$$\lambda = \omega - \omega^* \quad (i = 1, 2)$$

con  $\omega^*$  longitudine del meridiano centrale del fuso (1 o 2) rispetto a Roma M. Mario e quindi:

$$\omega^* = \begin{aligned} & - 3^\circ 27' 08'', 400 \text{ per il fuso Ovest (o fuso 1)} \\ & + 2^\circ 32' 51'', 600 \text{ per il fuso Est (o fuso 2)} \end{aligned}$$

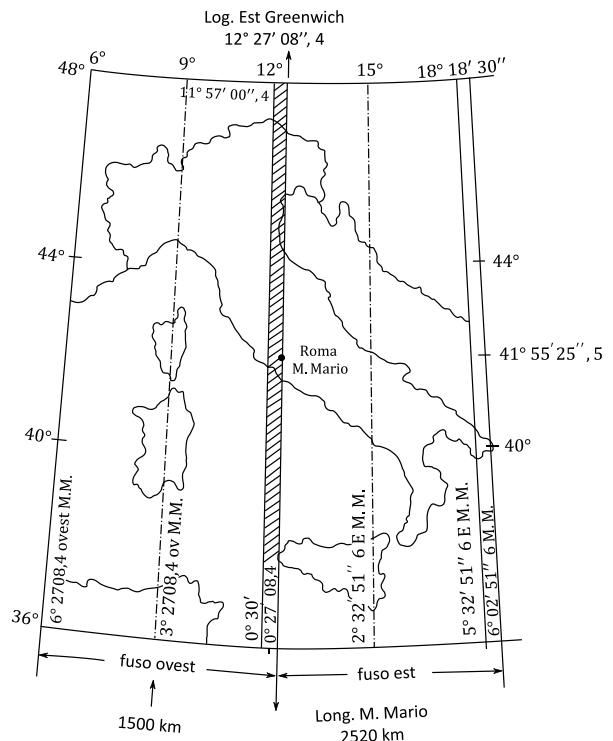


Figura 9. Suddivisione del territorio italiano in due fusi nella rappresentazione di Gauss-Boaga.

Allo scopo di limitare le deformazioni lineari della rappresentazione, si è adottato l'artificio di ridurre il valore delle coordinate plano-cartografiche di Gauss per il coefficiente  $m_0 =$

0,9996; in ragione di ciò, il modulo di deformazione lineare varia da un valore minimo di 0,9996 ad un valore massimo di 1,0004.

Per evitare i valori negativi delle ordinate  $y$  dei punti ad Ovest dei rispettivi meridiani centrali ed altresì per distinguere i punti appartenenti al primo fuso e quelli appartenenti al secondo fuso, si è attribuito un valore convenzionale  $f_0$  alla  $y$  del meridiano centrale di ciascun fuso, del valore  $f_0 = 1500\text{km}$  per il fuso 1 e di  $f_0 = 2520\text{km}$  per il fuso 2. L'ordinata risultante viene indicata con  $E$ .

La relazione tra ordinata  $E$  della rappresentazione di Gauss-Boaga e ordinata  $y$  di Gauss è quindi:

$$E = y \cdot m_0 + f_0$$

E con riferimento ai due fusi si ha:

$$E = \begin{cases} 1'500'000 \text{ nel fuso Est (fuso 1)} \\ y \cdot 0,9996 + 2'520'000 \text{ nel fuso Ovest (fuso 2)} \end{cases}$$

Per quanto riguarda l'ascissa  $x$ , essa varia da circa 4'000'000 m a circa 5'300'000 m per un'estensione in latitudine da  $36^\circ \text{ N}$  a  $48^\circ \text{ N}$ . L'ascissa  $x$  moltiplicata per il coefficiente 0,9996 è indicata con  $N$ . La relazione tra ascissa  $N$  nella rappresentazione di Gauss-Boaga e ascissa  $x$  di Gauss è pertanto:

$$N = x \cdot m_0 = x \cdot 0,9996$$

In definitiva quindi risulta che l'ordinata  $y$  copre una differenza di longitudine:

$$\Delta\lambda = \pm 3^\circ = \pm 0,0523598776\text{rad}$$

rispetto al meridiano centrale del fuso; ora il raggio del parallelo di latitudine  $\varphi = 36^\circ$  vale:

$$\begin{aligned} r_{36^\circ} &= [a/(1 - e \cdot \text{sen}^2\varphi)] \cos\varphi = \\ &= [6.378.388 / (1 - 0,006722670 \text{sen}^2 36^\circ)] \cos 36^\circ \\ &= 5.166.227,37\text{m} \end{aligned}$$

da cui segue:

$$|y| = r_{36^\circ} \cdot |\Delta\lambda| = 5.166.227,37 \cdot 0,0523598776 = 270.503,033\text{m} \approx 270\text{km}$$

Ci troviamo quindi con un valore delle ordinate del fuso che supera addirittura il doppio del limite del campo sferico. Nelle suddette condizioni, per mantenere invariato il livello di precisione dei risultati, occorre ridurre, a volte anche fortemente, la lunghezza degli archi di geodetica che è possibile introdurre nei calcoli, lunghezza che, alla periferia dei fusi può essere limitata anche a un terzo di quella ammessa nel campo sferico.

Ricerche sperimentali condotte dallo scrivente (v. bibliografia anno 2007), hanno messo in evidenza sostanzialmente che (v. fig. 10):

1) conviene definire innanzitutto un valore  $y_m$  in funzione delle ordinate degli estremi della trasformata  $S'_{12}$  dell'arco di geodetica  $S_{12}$  da trattare, mediante la relazione:

$$y_m = \left| [y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2] / 3 \right|^{1/2}$$

2) le formule di riduzione di distanze e angoli al piano della rappresentazione, quelle cioè comunemente utilizzate per il calcolo di  $m_{12}$  e  $\varepsilon_{12}$ , risultano valide, con archi di geodetica di lunghezza fino a  $S_{\max} = 150\text{km}$ , entro una fascia, intorno al meridiano centrale, di ampiezza pari a 2/3 dell'ampiezza del fuso, cioè finché è soddisfatta la condizione.  $y_m \leq 180\text{km}$ ;

3) quando l'ordinata  $y_m$  supera tale valore, la lunghezza dell'arco di geodetica che le formule sono in grado di trattare, mantenendo immutato il livello di precisione dei risultati, si riduce rapidamente fino a scendere al valore  $S_{\max} = 50\text{km}$ , cioè ad 1/3 di quella ammessa nel campo sferico, nelle zone periferiche dei fusi ( $180\text{km} < y_m \leq 270\text{km}$ );

4) la legge con la quale diminuisce la lunghezza  $S_{\max}$  al crescere della ordinata  $y_m$  è una parabola di  $2^\circ$  grado, cioè di espressione:

$$S_{\max} = a_0 + a_1 y_m + a_2 y_m^2$$

In cui i valori dei coefficienti sono da determinare, conoscendo le coppie di valori ( $y_m, S_{\max}$ ) di almeno tre punti della parabola;

5) si calcola quindi il valore di  $S_{\max}$  e si verifica che risulti verificata la condizione  $S/S_{\max} \leq 1$ ;

6) la ricerca del valore di  $S_{\max} = S_{\max}(y_m)$  si semplifica moltissimo, senza significativa perdita di precisione, se alla parabola si sostituisce la retta passante per i punti  $A=(180, 150)$ ,  $B=(270, 50)$  (v. fig. 10).

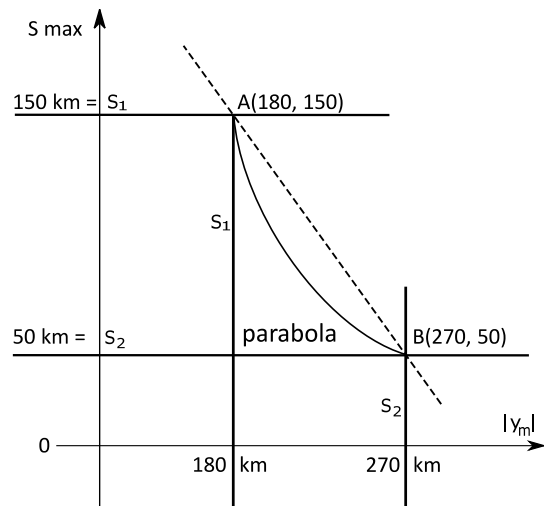


Figura 10. Grafico dei valori di  $S_{\max}$  in funzione di  $|y_m|$  ammissibili per assicurare la validità delle formule di Soldner adattate alla rappresentazione di Gauss per fusi di  $6^\circ$ . Nella valutazione di  $S_{\max}$  la parabola può essere sostituita dalla retta senza apprezzabile perdita di precisione.

Applicando noti risultati di geometria analitica, l'equazione di tale retta si può ottenere facilmente sviluppando il seguente determinante:

$$\begin{vmatrix} y_m & S_{\max} & 1 \\ y_1 & S_1 & 1 \\ y_2 & S_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_m & S_{\max} & 1 \\ 180 & 150 & 1 \\ 270 & 50 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= y_m(150 \cdot 1 - 50 \cdot 1) - S_{\max}(180 \cdot 1 - 270 \cdot 1) + (180 \cdot 50 - 150 \cdot 270) = 0$$

da cui segue:

$$100 \cdot y_m + 90 \cdot S_{\max} - 31500 = 0$$

e infine:

$$S_{\max} = -(10/9) \cdot y_m + 350 \quad (\text{in chilometri})$$

valide per:

$$270 \text{ km} \geq y_m > 180 \text{ km};$$

assumendo

$$S_{\max} = 150 \text{ km per } 0 \leq y_m \leq 180 \text{ km}$$

## 7. CONCLUSIONI

In questa nota sono state illustrate le relazioni tra coordinate di Cassini-Soldner e di Gauss, ed è stata trattata la modifica delle equazioni di Soldner per renderle idonee alla trattazione delle coordinate di Gauss, per la risoluzione dei due problemi fondamentali della geodesia, nell'ambito del campo sferico.

Le equazioni di Soldner, modificate nel modo qui presentato, forniscono lo strumento idoneo per la risoluzione dei due problemi fondamentali della geodesia, nell'ambito del campo sferico, operando mediante le coordinate della rappresentazione conforme di Gauss.

La soluzione offerta si realizza sulla superficie della sfera locale, cosa che costituisce un considerevole vantaggio rispetto alla procedura tradizionale che si sviluppa sul piano della rappresentazione. E' noto infatti che rimanendo nel campo sferico, il triangolo sferico e quello ellissoidico possono considerarsi con grandissima approssimazione coincidenti e sovrapponibili senza che si verificano alterazioni rilevabili dell'uno e dell'altro. Ciò significa che le coordinate geodetiche polari dei lati del triangolo sferico si possono applicare ai lati del triangolo ellissoidico, come chiaramente mostrato infine dall'esempio di calcolo proposto nella seconda parte del lavoro.

Questa favorevole circostanza si traduce, attraverso le equazioni di Soldner modificate, in una soluzione diretta, stringata ed essenziale, scevra dalla necessità di ricercare elementi di passaggio intermedi che, oltre ad appesantire il processo di calcolo, elevano il rischio di errori nei risultati finali.

Per questi motivi la procedura tradizionale, unica a tutt'oggi disponibile, appare al confronto con quella nuova ora proposta, tortuosa, gravosa e insidiosa, potenzialmente capace di indurre, più facilmente, in errori di calcolo.

Nel nuovo quadro profilato essa può assumere un ruolo di controllo dei risultati ottenuti con l'applicazione delle formule di Soldner nella forma modificata e integrata, come risulta dal presente studio.

Modifica e integrazione, tra l'altro, che poi riguarda fondamentalmente una sola equazione, ovvero quella relativa all'ordinata  $y$ , poiché le modifiche delle altre equazioni sfociano nella costituzione di termini di ordine  $1/R^4$  o superiore, trascurabili, come è ben noto, in campo sferico.

Appare infine sempre opportuno, se non addirittura indispensabile, eseguire un controllo del campo di applicabilità delle relazioni di calcolo, indipendentemente dal metodo seguito, secondo le modalità qui descritte, quando si opera nelle zone periferiche dei fusi della rappresentazione di Gauss-Boaga.

## RICONOSCIMENTI

### Contributi dei singoli autori

Idea, concezione, metodologia, supervisione: S. Di Filippo.

### Fonti di finanziamento

Nessuna

### Conflitti di interessi

L'autore dichiara di non avere alcun conflitto di interesse.

## BIBLIOGRAFIA

- Aquilina, C., Ferrara, E., Giannoni, U., 1973. Lezioni di topografia, Cedam.
- Bezoari, G., Monti, C., Selvini, A., 1993. Fondamenti di rilevamento generale, Hoepli.
- Birardi, G., 1980. Corso di topografia, Pitagora.
- Boaga, G., 1948. Trattato di geodesia, topografia con elementi di fotogrammetria, Cedam.
- Di Filippo, S., 1995. Sulla trasformazione delle coordinate planocartografiche dalla rappresentazione di Cassini-Soldner alla rappresentazione di Gauss-Boaga e viceversa, Rivista del Dipartimento del Territorio, n. 3.
- Di Filippo, S., 1996. Sulla trasformazione delle coordinate planocartografiche dalla rappresentazione di Cassini-Soldner alla rappresentazione di Gauss-Boaga e viceversa, Rivista del Dipartimento del Territorio, n. 1.
- Di Filippo, S., 2007. Riflessioni sull'utilizzazione della rappresentazione piana conforme di Gauss per la trasformazione delle coordinate catastali in campo sferico, Rivista dell'Agenzia del Territorio, n. 2.
- Franchi, N., 1950. Elementi di cartografia, Istituto Geografico Militare.
- Inghilleri G., 1974. Topografia Generale, UTET.
- Jordan, W., 1923, Handbuch der Vermessungskunde, Metzlersche.
- Maffiotti, G.B., 1899. I sistemi di proiezione nei rilevamenti catastali moderni, Rivista di Topografia e Catasto.
- Paroli A., Triangolazioni topografiche e del Catasto, Hoepli, 1948.